Lista de exercício 1 - Problemas de valor inicial

1. Deduza o método de Euler e seu erro de truncamento local.

2. Deduza o Método de Taylor de ordem 3 e mostre que seu erro de truncamento local é $O(h^3)$.

3. Dado o PVI

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{t} + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que $y(t) = t^2(e^t - e)$ é solução do PVI. Mostre que $y(t) = t^2(e^t - e)$ é a **única** solução do PVI e que o problema é bem posto;

   (b) Aplique o método de Euler com $h = 0,25$ e monte uma tabela para as soluções aproximadas com as colunas t_i e w_i;

   (c) Use as respostas obtidas no item (b) e a interpolação linear para aproximar $y(1,97)$ e compare com o valor exato. Explique;

   (d) Usando a fórmula $|y(t_i) - u_i| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right) + |\delta_0|\left(e^{L(t_i-a)} - 1\right)$ supondo $\delta_0 = \delta = 5 \times 10^{-9}$ se for usada aritmética de 8 dígitos, calcule o limite do erro em cada passo do item (c). O que esse erro significa? Compare em relação ao erro absoluto real;

   (e) Qual o valor ótimo de h? Lembre-se que esse valor minimiza a função $E(h) = \frac{hM}{L} + \frac{\delta}{h}$. O que significa o valor de h obtido? O que aconteceria com os resultados do item (c) se esse valor fosse utilizado? É errado usar $h = 0,25$ como no item (c)?

4. Voltando ao PVI do Ex. 3, calcule uma aproximação para $y(1,5)$ usando $h = 0,25$ e

   - o Método do Ponto Médio;

- o Método de Heun;
- o Método de Runge-Kutta de 4a. ordem;
- o Método de Adams-Bashforth de 2 passos;

Compare a precisão de cada solução, inclusive do Método de Euler (obtida no item b) do Ex. 3).

5. Deduza o Método de Adams-Bashforth de 3 passos bem como seu erro de truncamento local.

6. Deduza o Método de Adams-Moulton de 3 passos bem como seu erro de truncamento local.

7. Obtenha Método de Simpson abaixo, Eq. (1), para resolver um PVI de 1ª. ordem

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})\right] \tag{1}$$

$$\tau_{i+1}(h) = -\frac{h^4}{90}y^{(5)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1}) \tag{2}$$

integrando a EDO em $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ e interpolando a função $f(t, y)$ nos pontos (t_{i-1}, f_{i-1}), (t_i, f_i) e (t_{i+1}, f_{i+1}), sendo $f_k = f(t_k, y(t_k))$.

Analise a consistência, a convergência e a estabilidade do Método de Simpson.

8. O Método de Euler Modificado é resumido no seguinte algoritmo:

1. Estime w_{i+1} usando o Método de Euler:

$$w_{i+1}^{EU} = w_i + hf(t_i, w_i).$$

2. Calcule a solução numérica em $t = t_{i+1}$:

$$w_{i+1} = w_i + h\frac{f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}^{EU})}{2}.$$

Use este método para resolver o seguinte PVI, usando $h = 0,2$. Dê a resposta em forma de tabela.

$$\begin{cases} y' = -1,2y + 7e^{-0,3t}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

9. Voltando ao Ex. 3), resolva-o usando o Método Previsor-Corretor de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4, com duas correções em cada passo. Use as soluções exatas com 5 casas decimais para iniciar o método.

10. Dado o método multipassos para resolver um PVI de 1ª ordem:

$$\begin{cases} w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2 \\ w_{i+1} = -\frac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \frac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i), \quad i = 2, 3, ..., N-1. \end{cases}$$

(a) encontre o erro de truncamento local;

(b) analise esse método quanto à consistência, convergência e estabilidade.

11. Faça uma análise comparativa entre os métodos para solução de PVI de primeira ordem vistos na disciplina. Compare, por exemplo, dificuldade de implementação, número de avaliações da função $f(t, y)$ e precisão.

12. Dado o PVI

$$\begin{cases} y''' + 2y'' - y' = e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \\ y''(1) = 0 \end{cases}$$

(a) Quais as condições que garantem que um sistema de equações diferenciais de primeira ordem tem solução única? Transformando um PVI de ordem superior em um sistema de primeira ordem, como podemos traduzir as condições de unicidade? O PVI de 3a. ordem acima tem solução única?

(b) Estenda o método de Euler para obter soluções aproximadas de sistemas de equações de primeira ordem. Usando esse método, obtenha a solução aproximada para $y(1,1)$ usando $h = 0,1$.

13. Transforme o PVI de 3ª ordem abaixo em um sitema de EDOs e encontre uma aproximação para $y(0,4)$ usando

- o Método de Runge-Kutta de 4a. ordem;
- o metodo de Adams-Bashfoth de 2 passos.

$$\begin{cases} y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, & 0 \leq x \leq 0,4 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 9 \end{cases}$$

Obs. Use $h = 0.2$ e as seguintes soluções iniciais $y(0.2) = 2.9808$, $y'(0.2) = 0.8243$, $y''(0.2) = 9.4673$, obtidas a partir da solução exata $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$.

14. Dados dois métodos numéricos para resolver um PVI de 1ª ordem,

$$\text{MÉTODO I} \begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}h(t_i, w_i)), & i = 0, 1, ..., N-1. \end{cases}$$

MÉTODO II $\begin{cases} w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2 \\ w_{i+1} = -\frac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \frac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i), \quad i = 2, 3, ..., N-1. \end{cases}$

Analise o método I quanto à consistência, estabilidade e convergência e o método II quanto à estabilidade.