

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estimativas locais para complexos elíticos

Tiago Henrique Picon

São Carlos

2011

Estimativas locais para complexos elíticos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estimativas locais para complexos elíticos**

Tiago Henrique Picon (Bolsista CAPES)

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos

2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P598el

Picon, Tiago Henrique.

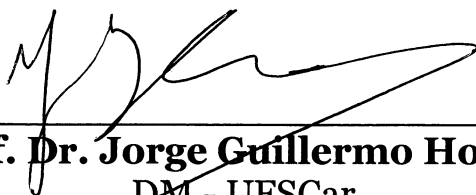
Estimativas locais para complexos elípticos. / Tiago Henrique Picon. -- São Carlos : UFSCar, 2011.  
80 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Gagliardo-Nirenberg. 2. Estimativas – L1. 3. Complexo de de Rham. 4. Sistemas elípticos. I. Título.

CDD: 515.26 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



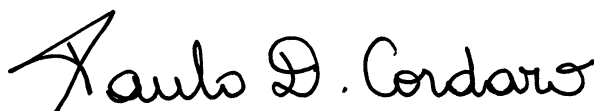
---

**Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie**  
DM - UFSCar



---

**Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho**  
DM - UFSCar



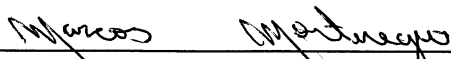
---

**Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro**  
IME - USP



---

**Prof. Dr. Sérgio Luiz Zani**  
ICMC - USP



---

**Prof. Dr. Marcos da Silva Montenegro**  
UFMG

*em memória ao ilustríssimo palestrino Danilo Chiari*

# Agradecimentos

A Deus por iluminar meu caminho.

À Nossa Senhora de Fátima por proteger minha família.

À minha mãe Cristina e ao meu pai Francisco pelo carinho, pelo incentivo ao estudo e pela formação pessoal e intelectual.

À minha esposa Paula pelo companheirismo e dedicação à família.

À minha querida e doce filha Laura a quem o papai tanto ama.

Aos meus avós Agostinho, Ercília e Santo que tanto fazem falta.

À minha sobrinha Barbara, minha irmã Francini e minha avó Alice.

Ao professor Jorge Hounie pela orientação e amizade, o qual tenho uma imensa admiração pessoal e profissional.

Aos professores José Ruidival dos Santos e Sávio Rodrigues por fazerem parte dessa longa trajetória até o doutorado.

À banca de defesa de doutorado composta pelos professores Jorge Hounie, José Ruidival dos Santos, Paulo Cordaro, Sérgio Zani e Marcos Montenegro.

Aos meus amigos de doutorado, em especial: Bruna Oréfice, Francisco Braun, João Biesdorf, Patrícia Desideri, Paulo Liboni, Rafael Barostichi e Romel da Silva.

Ao meu amigo de longa data, palmeirense, Danilo Chiari que partiu para o céu precocemente, ao qual dedico, singelamente, esse trabalho.

À CAPES pelo financiamento da bolsa.

# Resumo

Neste trabalho, estendemos algumas estimativas  $L^1$  provadas por Bourgain-Brezis no caso do complexo de de Rham em  $\mathbb{R}^N$  para o contexto local de estimativas  $L^1$  para complexos elípticos, a saber, aqueles associados a uma estrutura involutiva elítica gerada por uma família de campos vetoriais suaves e linearmente independentes. Em particular, obtemos uma versão local da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para um sistema de campos vetoriais elípticos.

**Palavras chave:** estimativas  $L^1$ , complexo de de Rham, complexos elípticos, desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.



# Abstract

In this work, we extend some global  $L^1$  estimates proved by Bourgain-Brezis in the case of the de Rham complex on  $R^N$  to the setup of local  $L^1$  estimates for elliptic complexes, namely, those associated to involutive elliptic structures spanned by a family of linearly independent smooth complex vector fields. In particular, we obtain a local version of Gagliardo-Nirenberg estimates for elliptic systems of vector fields.

**Keywords:**  $L^1$  estimates, de Rham complex, elliptic complexes, Gagliardo-Nirenberg estimates.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Estimativas <math>L^1</math> para sistemas do tipo div-rot</b>	<b>5</b>
2.1	Demonstração da estimativa integral generalizada . . . . .	7
2.2	Aplicações para o sistema div-rot . . . . .	11
2.3	Estimativas $L^1$ para o complexo de de Rham . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Estimativas <math>L^1</math> para sistemas elíticos de campos vetoriais.</b>	<b>17</b>
3.1	Sistema elítico de campos vetoriais complexos e o Teorema A . . . . .	21
3.2	Demonstração do Teorema 3.3 . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Estimativa <math>L^1</math> para o complexo <math>d_{\mathcal{L}}</math></b>	<b>31</b>
4.1	O complexo diferencial $d_{\mathcal{L}}$ . . . . .	31
4.2	Demonstração do Teorema B . . . . .	34
4.3	O Teorema C . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Contra exemplos para desigualdades do tipo div-rot em <math>L^1</math></b>	<b>41</b>
5.1	Contra exemplo para a estimativa (1.4) quando $k = 1$ . . . . .	42
5.2	Contra exemplo para a estimativa (2.11) quando $p=1$ . . . . .	45
5.3	Contra exemplo do Teorema 3.3 quando $n=1$ . . . . .	52
<b>6</b>	<b>O Problema de Bourgain-Brezis</b>	<b>55</b>
6.1	Demonstração da Proposição 6.1 . . . . .	62

<b>A Adicionais</b>	<b>71</b>
A.1 O cálculo para $h_{\Sigma}^1$ . . . . .	71
A.2 O contra exemplo de Ornstein . . . . .	75
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>76</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em recentes trabalhos Jean Bourgain e Haim Brezis têm publicado uma série de resultados envolvendo estimativas para o sistema divergente-rotacional. Um dos principais resultados nessa direção é a surpreendente desigualdade em  $L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ .

**Proposição 1.1** *Se  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  então*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \vec{f} \cdot u \right| \leq c_N \|\vec{f}\|_1 \|\nabla u\|_N \quad (1.1)$$

para toda  $\vec{f} \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) = \{\vec{f} \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div} \vec{f} = 0\}$ .

Quando  $N = 2$  a proposição é trivialmente satisfeita pela desigualdade de Nirenberg [N]  $\|\xi\|_2 \leq c \|\nabla \xi\|_1$ . De fato, como  $\operatorname{div} \vec{f} = 0$  então podemos escrever  $f = \nabla^\perp \xi$  e então

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \vec{f} \cdot u \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \xi \cdot \nabla^\perp u \right| \leq \|\xi\|_2 \|\nabla u\|_2 \leq \|\vec{f}\|_1 \|\nabla u\|_2.$$

Note que a desigualdade (1.1) poderia ser obtida trivialmente, sem a condição de divergente nulo, se fosse válida a imersão de Sobolev do espaço  $W^{1,N}$  em  $L^\infty$ , que de fato é falsa [Br, pg 286]. Aqui denotamos o espaço de Sobolev  $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$  como o completamento de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  na norma  $\|\nabla u\|_N$ . Claramente a estimativa (1.1) implica a clássica desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \sum_{j=1}^N \|\partial_{x_j} u\|_{L^1}, \quad (1.2)$$

bem como a desigualdade

$$\|Z\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \|\text{rot } Z\|_{L^1} \quad (1.3)$$

para  $Z \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . Enquanto (1.2) é obtido como consequência de (1.3), não existe uma forma direta de deduzir (1.3) de (1.2). Entretanto, facilmente podemos obter (1.1) de (1.3). Num contexto mais geral, a desigualdade (1.3) foi obtida por Lanzani e Stein em [LS] na linguagem de formas.

**Teorema 1.1** *Seja  $N \geq 3$ . Então existe  $C > 0$  tal que para toda  $u \in C_0^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  vale*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C (\|du\|_{L^1} + \|d^*u\|_{L^1}) \quad (1.4)$$

desde que  $k \neq 1, N-1$ . Quando  $k = 1$  a estimativa (1.4) é válida substituindo  $\|d^*u\|_{L^1}$  por  $\|d^*u\|_{H^1}$ , no qual  $H^1$  é o espaço real de Hardy em  $\mathbb{R}^N$ . O mesmo vale substituindo  $\|du\|_{L^1}$  por  $\|du\|_{H^1}$  quando  $k = N-1$ .

Uma versão mais forte que (1.4) foi apresentada por Bourgain e Brezis em [BB2] no qual a norma  $L^1$  é substituída pela norma  $L^1 + W^{-1, \frac{N}{N-1}}$  definida por

$$\|f\|_{L^1 + W^{-1, \frac{N}{N-1}}} = \inf_{f=g+h} \left( \|g\|_{L^1} + \|h\|_{W^{-1, \frac{N}{N-1}}} \right).$$

**Teorema 1.2** *Seja  $N \geq 4$ . Então existe  $C > 0$  tal que para toda  $u \in C_0^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  vale*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \left( \|du\|_{L^1 + W^{-1, \frac{N}{N-1}}} + \|d^*u\|_{L^1 + W^{-1, \frac{N}{N-1}}} \right)$$

desde que  $2 \leq k \leq N-2$ . Em particular vale (1.4).

A estimativa (1.4) tem sido estendida em muitas direções como no contexto de campos vetoriais constantes ([VS2],[M1],[MM]), campos vetoriais sobre grupos homogêneos ([CVS]) e complexos CR ([Y]). Nós estamos interessados na seguinte questão: suponhamos  $L_1, \dots, L_n$  um sistema de campos vetoriais linearmente independentes com coeficientes complexos suaves definidos num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Nestas condições, para quais sistemas a estimativa

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \left( \sum_{j=1}^n \|L_j u\|_{L^1} \right) \quad (1.5)$$

é válida localmente? Nós obtivemos o seguinte resultado.

**Teorema A.** *Seja  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 2$ , um sistema elítico de campos vetoriais. Então para cada ponto  $x_0 \in \Omega$  existe uma vizinhança aberta  $U \subset \Omega$  de  $x_0$  e  $C > 0$  tal que (1.5) vale para toda  $u \in C_0^\infty(U)$ . Reciprocamente, se (1.5) vale então o sistema é elítico em  $\Omega$ .*

Quando o sistema  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$  é involutivo, isto é, cada comutador  $[L_j, L_k]$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , é combinação linear de  $L_1, \dots, L_n$ , então o subfibrado de  $\mathbb{C}T\Omega$  gerado por  $\mathcal{L}$  é denotado por  $(\Omega, \mathcal{L})$  e chamado uma estrutura involutiva ou formalmente integrável. Exemplos de estruturas involutivas incluem distribuições integráveis no sentido de Frobenius, estruturas complexas e estruturas CR. Se, além do mais, o sistema  $L_1, \dots, L_n$  é elítico, uma versão apropriada do teorema de Newlander-Nirenberg diz que a estrutura  $\mathcal{L}$  é localmente integrável ([Tr] e [BCH]). Em particular, existe um complexo natural de operadores diferenciais  $d_{\mathcal{L}}$  (que precisamente é o complexo de de Rham quando  $L_j = \partial_{x_j}$  e  $j = 1, \dots, N$ ) e a seguinte questão pode ser colocada: vale uma estimativa análoga a (1.4) para o complexo  $d_{\mathcal{L}}$ ? Este é o conteúdo do nosso segundo resultado.

**Teorema B.** *Seja  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 2$ , um sistema elítico e involutivo de campos vetoriais. Então para cada ponto  $x_0 \in \Omega$  existe uma vizinhança aberta  $U \subset \Omega$  de  $x_0$  e  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C (\|d_{\mathcal{L}, k} u\|_{L^1} + \|d_{\mathcal{L}, k}^* u\|_{L^1}), \quad u \in \tilde{E}_0^k(U) \quad (1.6)$$

para  $0 \leq k \leq n$  e  $k \neq 1, n-1$ .

Quando  $k = 1$  e  $k = n-1$  nós obtivemos um substituto similar ao apresentado no Teorema 1.1.

**Teorema C.** *Nas hipóteses do teorema anterior temos*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} &\leq C (\|d_{\mathcal{L}, 1} u\|_{L^1} + \|d_{\mathcal{L}, 0}^* u\|_{h^1}), & u \in \tilde{E}_0^1(U), \\ \|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} &\leq C (\|d_{\mathcal{L}, n} u\|_{h^1} + \|d_{\mathcal{L}, n-1}^* u\|_{L^1}), & u \in \tilde{E}_0^{n-1}(U), \end{aligned}$$

no qual  $h^1$  é o espaço localizável de Hardy em  $\mathbb{R}^N$ .

O texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, nós apresentamos uma breve introdução sobre os recentes resultados de Bourgain, Brezis, Van Schaftingen,

Lanzani e Stein no contexto das estimativas  $L^1$  para sistemas do tipo divergente rotacional. Em especial, destacamos algumas técnicas e conceitos básicos da teoria que serão utilizados no transcorrer do texto. O Capítulo 3 tem como objetivo central a demonstração do Teorema A. Na Seção 3.1 apresentamos a afirmação principal do teorema, que é destacada pela Proposição 3.1, enquanto que a Seção 3.2 fica a cargo da recíproca do resultado, que é enunciada pelo Teorema 3.3. Ao final desta mesma seção, nós apresentamos um resultado de resolubilidade local para a equação  $L_1u_1 + \dots + L_nu_n = f$ . No Capítulo 4 apresentamos a prova dos Teoremas B e C. Inicialmente, na Seção 4.1, nós introduzimos o complexo diferencial associado a uma estrutura involutiva, em especial, quando a estrutura é gerada por um sistema involutivo de campos vetoriais complexos. Na seção seguinte, sob a hipótese de eliticidade do sistema, nós construímos a demonstração do Teorema B. A demonstração do Teorema C é destacada separadamente na Seção 4.3. Já o Capítulo 5 é destinado a uma seleção de contra exemplos. Em destaque, na Seção 5.1, demonstramos que a desigualdade (1.6) não é válida quando  $k = 1$  e  $k = n - 1$ . Finalmente, no Capítulo 6 nós exploramos a validade de uma desigualdade de segunda ordem proposta por Bourgain e Brezis no artigo [BB2]. Os Teoremas A, B e C são os principais resultados do artigo [HP] publicado em colaboração com o professor Jorge Hounie.

## Capítulo 2

# Estimativas $L^1$ para sistemas do tipo div-rot

A primeira versão da Proposição 1.1 foi apresentada por Bourgain, Brezis e Mironescu no artigo [BB3] no contexto de curvas retificáveis em  $\mathbb{R}^3$ . Em mais dimensões, o resultado é enunciado da seguinte forma.

**Proposição 2.1** *Seja  $\Gamma$  uma curva retificável fechada em  $\mathbb{R}^N$  com vetor unitário tangente  $\vec{t}$  e  $Y \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Então*

$$\left| \int_{\Gamma} Y \cdot \vec{t} \right| \leq c_N |\Gamma| \|\nabla Y\|_N.$$

A demonstração original em  $\mathbb{R}^3$  é bem engenhosa e remete ao uso da decomposição de Littlewood-Paley. No entanto, Van Schaftingen apresentou uma demonstração elegante ([VS4]) fazendo uso das desigualdades de Morrey-Sobolev ([Br, Teorema 9.12]). A equivalência entre a Proposição 1.1 e a Proposição 2.1 é esboçada no artigo [BB1] como consequência dos resultados de Smirnov ([S]). Basicamente, medidas vetoriais com divergente nulo são decompostas em curvas fechadas retificáveis em  $\mathbb{R}^N$ . Uma versão da Proposição 1.1 é obtida para funções cujo divergente pertence a  $L^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Proposição 2.2** *Existe uma constante  $c_N > 0$  tal que para cada  $f \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  com*



$\operatorname{div} f \in L^1$  vale

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f \cdot u \right| \leq c_N (\|f\|_1 \|\nabla u\|_N + \|\operatorname{div} f\|_1 \|u\|_N), \quad \forall u \in (L^\infty \cap W^{1,N})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N). \quad (2.1)$$

Neste texto nós denotamos  $f \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ , ou simplesmente  $\vec{f}$ , um campo vetorial  $f = (f_1, \dots, f_N)$  no qual  $f_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_j \in L^1(\mathbb{R}^N)$  para  $j = 1, \dots, N$ . Analogamente vale a mesma notação substituindo  $L^1$  por  $C_0^\infty$ ,  $L^p$ ,  $W^{1,N}$ , etc. Se  $u = (u_1, \dots, u_N)$  então definimos o produto de campos da forma  $f \cdot u = \sum_{j=1}^N f_j u_j$ . Quando  $u$  é uma função, o produto é definido da mesma forma com  $u_j \doteq u$  para  $j = 1, \dots, N$ . A norma de um vetor em  $L^1$  (analogamente para outros espaços normados) é definido por  $\|f\|_{L^1} = \sum_{j=1}^N \|f_j\|_{L^1}$ . Muitas vezes denotamos  $\| \cdot \|_{L^p}$  simplesmente por  $\| \cdot \|_p$  (analogamente  $\| \cdot \|_{W^{1,N}}$  por  $\| \cdot \|_{1,N}$ ).

Voltando a proposição, claramente se  $\operatorname{div} f = 0$  então (2.1) torna-se (1.1). Uma versão mais refinada da estimativa (1.1) pode ser dada quando  $\|\nabla u\|_N$  é substituída por uma semi-norma fracionária de Sobolev  $\|u\|_{s,p}$ , que é definida por

$$\|u\|_{s,p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2N}} dx dy$$

para  $1 < p < \infty$ ,  $0 < s < 1$  e  $sp = N$  (veja o Teorema 1.3 em [BB3]). Entretanto, a estimativa (1.1) falha quando substituimos  $\|\nabla u\|_N$  por  $\|u\|_{BMO}$ , o que é plausível de questionar uma vez que  $W^{1,N}$  está imerso em  $BMO$ .

**Definição 2.1** *Uma função localmente integrável pertence a  $BMO(\mathbb{R}^N)$  se*

$$\|u\|_{BMO} \doteq \sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B \left| f(x) - \frac{1}{|B|} \int_B f \right| dx \right\} < \infty$$

para toda bola  $B$  em  $\mathbb{R}^N$ .

De fato, seja  $\langle \cdot \rangle$  a semi-norma em  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  definida por

$$\langle u \rangle = \sup_\Gamma \left\{ \frac{1}{|\Gamma|} \left| \int_\Gamma u \cdot \vec{t} \right| \right\},$$

no qual o sup é tomado sobre todas as curvas fechadas retificáveis  $\Gamma$ . Van Schaftingen em [VS5] mostrou que existe  $c > 0$  tal que

$$\|u\|_{BMO} \leq c \langle u \rangle,$$

cuja a recíproca é falsa (veja a observação 5.4 em [FOS]).

Outra observação sobre a Proposição 1.1 é que a hipótese  $\operatorname{div} f = 0$  pode ser substituída por uma condição de maior ordem de derivadas sobre  $f$ . Um dos resultados nessa direção foi obtido por Bourgain e Brezis em [BB1].

**Teorema 2.1** *Seja  $u \in (W^{1,N} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  com*

$$\sum_{j=1}^N \partial_j^k f_j = 0$$

*então*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f \cdot u \right| \leq c \|f\|_1 \|\nabla u\|_N, \quad \forall u \in (W^{1,N} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

*no qual  $c$  é uma constante que depende somente de  $N$  e  $k$ .*

Versões mais gerais desse teorema podem ser encontradas no artigo [VS3].

## 2.1 Demonstração da estimativa integral generalizada

Antes de iniciarmos a prova da Proposição 2.2, nós iremos apresentar o seguinte lema técnico.

**Lema 2.1** *Seja  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$  uma função complexa. Então para cada  $\lambda > 0$  existe uma decomposição de  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  tal que*

$$\|\Phi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^\nu)} \leq c\lambda^\gamma \|\nabla \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^\nu)} \tag{2.2}$$

$$\|\Phi_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^\nu)} \leq c\lambda^{\gamma-1} \|\Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^\nu)} \tag{2.3}$$

$$\|\nabla \Phi_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^\nu)} \leq c\lambda^{\gamma-1} \|\nabla \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^\nu)} \tag{2.4}$$

*sempre que  $p > \nu$ ,  $\gamma = 1 - \nu/p$  e  $c$  independente de  $\lambda$  e  $\Phi$ .*

Na literatura existe uma série de provas para o Lema 2.1. Lanzani e Stein apresentaram uma demonstração via espaços de Lorentz ([LS]). Já Yung apresentou uma prova via decomposição de Littlewood Paley ([Y1]), enquanto que uma versão mais refinada foi dada por Chanillo e Van Schaftingen no contexto de grupos homogêneos ([CVS]). Aqui faremos um esboço da demonstração de Van Schaftingen como visto em [VS1].

**Demonstração do Lema 2.1.** Seja  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$  uma função positiva tal que  $\int_{\mathbb{R}^\nu} \eta(x) dx = 1$  e  $\eta_\lambda(x) = \lambda^{-\nu} \eta(\lambda^{-1}x)$ . Dada  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$  consideremos a decomposição

$$\Phi = (\Phi - \Phi * \eta_\lambda) + \Phi * \eta_\lambda = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (\textit{respectivamente}).$$

Claramente

$$|\nabla \Phi_2(x)| \leq (|\nabla \Phi| * \eta_\lambda)(x) \leq \|\nabla \Phi\|_p \|\eta_\lambda\|_q$$

para  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Uma vez que  $\|\eta_\lambda\|_q = \lambda^{-\frac{\nu}{p}} \|\eta\|_q$  segue da desigualdade acima

$$\|\nabla \Phi_2\|_\infty \leq c(\eta) \lambda^{\nu-1} \|\nabla \Phi\|_p,$$

isto é, a estimativa (2.4). Da mesma forma, seguindo os mesmos argumentos, obtemos (2.3). Agora, note que como  $\eta_\lambda$  converge para a distribuição de Dirac  $\delta_0$  quando  $\lambda \rightarrow 0$  e  $\int_{\mathbb{R}^\nu} \eta(x) dx = 1$  então

$$\Phi_1(x) = - \int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial s} (\Phi * \eta_s)(x) ds. \quad (2.5)$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial s}(x) = s^{-1} \sum_{k=1}^\nu (\partial_{x_k} (x_k \eta))_s(x) = - \sum_{k=1}^\nu \partial_{x_k} (x_k \eta)_s(x).$$

Substituindo a identidade acima em (2.5) nós obtemos

$$|\Phi_1(x)| \leq \sum_{k=1}^\nu \int_0^\lambda (|\nabla \Phi| * (|x_k| \eta)_s)(x) ds.$$

Repetindo o mesmo argumento anterior, como feito para  $\nabla \Phi_2$ , nós obtemos

$$\|\Phi_1\|_\infty \leq c(\eta, \nu) \|\nabla \Phi\|_p \int_0^\lambda s^{\frac{-\nu}{p}} ds \underbrace{c(\eta, \nu)}_{p > \nu} \lambda^{1-\frac{\nu}{p}} \|\nabla \Phi\|_p,$$

o que conclui (2.2).

■

**Demonstração da Proposição 2.2.** Sem perda de generalidade, nós podemos considerar  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  ao invés de  $u \in (L^\infty \cap W^{1,N})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . Para fixarmos ideias vamos estimar o lado esquerdo em (2.1) simplesmente por

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_1(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} J(x_1)dx_1$$

para  $J(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_1(x_1, x')\phi(x_1, x')dx'$ . Aplicando o Lema 2.1 a função

$\phi^{x_1}(x') \doteq \phi(x_1, x')$  em  $\mathbb{R}^{N-1}$  e  $p = N$  podemos escrever  $J(x_1) = \sum_{i=1}^2 J_i(x_1)$  para

$$J_i(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_1(x_1, x')\phi_i^{x_1}(x')dx',$$

no qual  $\phi^{x_1} = \phi_1^{x_1} + \phi_2^{x_1}$  é uma decomposição do lema satisfazendo (2.2),(2.3) e (2.4).

Claramente

$$\begin{aligned} |J_1(x_1)| &\leq \|f_1^{x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \|\Phi_1^{x_1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \\ &\lesssim \lambda^{\frac{1}{N}} \|f_1^{x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \|\nabla \Phi^{x_1}\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} \end{aligned}$$

e

$$J_2(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left( \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial f_1}{\partial s}(s, x')ds \right) \Phi_2^{x_1}(x')dx' = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial f_1}{\partial s}(s, x')\Phi_2^{x_1}(x')dx' ds.$$

Pela identidade

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = - \sum_{k=2}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_k} + \operatorname{div} f$$

segue que  $J_2(x_1) =$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{k=2}^N \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(s, x')\Phi_2^{x_1}(x')dx' ds + \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \operatorname{div} f(s, x')\Phi_2^{x_1}(x')dx' ds \\ &= - \sum_{k=2}^N \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_k(s, x')\frac{\partial \Phi_2^{x_1}}{\partial x_k}(x')dx' ds + \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \operatorname{div} f(s, x')\Phi_2^{x_1}(x')dx' ds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

e assim

$$\begin{aligned} |J_2(x_1)| &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\nabla \Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \\ &\lesssim \lambda^{-\frac{N-1}{N}} \left( \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\nabla \Phi^{x_1}\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\Phi^{x_1}\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})} \right) \end{aligned}$$

para  $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ . Escolhendo

$$\lambda(x_1) = (\|f\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1} \|\Phi^{x_1}\|_{L^N}) / \|f_1^{x_1}\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N}$$

para  $\|f_1^{x_1}\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N} \neq 0$  nós obtemos

$$|J(x_1)| \lesssim (\|f\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1} \|\Phi^{x_1}\|_{L^N})^{\frac{1}{N}} (\|f_1^{x_1}\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N})^{\frac{N-1}{N}}.$$

Note que se  $\|f_1^{x_1}\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N} = 0$  então  $J(x_1) = 0$ . Pela desigualdade de Holder segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |J(x_1)| dx_1 &\lesssim \left( \int_{\mathbb{R}} (\|f\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1} \|\Phi^{x_1}\|_{L^N})^N dx_1 \right)^{\frac{1}{N^2}} \times \\ &\times \left( \int_{\mathbb{R}} (\|f_1^{x_1}\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N})^{\frac{N}{N+1}} dx_1 \right)^{\frac{N^2-1}{N^2}}. \end{aligned}$$

Agora, novamente pela desigualdade de Holder quando  $p = (N+1)/N$  e  $p^* = N+1$  nós obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\|f_1^{x_1}\|_{L^1} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N})^{\frac{N}{N+1}} dx_1 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \|f_1^{x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} dx_1 \right)^{\frac{N}{N+1}} \times \\ &\times \left( \int_{\mathbb{R}} \|\nabla\Phi^{x_1}\|_{L^N}^N dx_1 \right)^{\frac{1}{N+1}} \\ &= \left( \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\nabla\Phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{N}{N+1}}. \end{aligned}$$

A estimativa para  $\int_{\mathbb{R}^N} f_1(x)\phi(x)dx$  segue da desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |J(x_1)| dx_1 &\lesssim \left( \|f\|_{L^1} \|\nabla\Phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\Phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{N}} \times \\ &\times \left( \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\nabla\Phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{N-1}{N}} \\ &\lesssim \|f\|_{L^1} \|\nabla\Phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|\operatorname{div} f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\Phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analogamente o mesmo argumento é válido para estimarmos  $\int_{\mathbb{R}^N} f_j(x)\phi(x)dx$  definindo

$$J(x_j) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_j^{x_j}(x')\phi^{x_j}(x')dx' \text{ para } x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N).$$

■

Uma observação da demonstração é que o termo  $\|\nabla u\|_N$  na desigualdade (2.1) pode ser

substituído por  $\sum_{i \neq j} \|\partial_{x_i} u_j\|_N$ .

## 2.2 Aplicações para o sistema div-rot

Nesta seção ilustraremos uma aplicação da desigualdade integral (1.1) para a classificação de regularidade de uma solução  $\vec{Y}$  da equação

$$\operatorname{rot} \vec{Y} = \vec{f} \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \quad (2.8)$$

quando  $\vec{f} \in L^3_{\sharp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , que pode ser reescrita pelo sistema

$$\begin{cases} \partial_{x_3} Y_2 - \partial_{x_2} Y_3 = f_1, \\ \partial_{x_1} Y_3 - \partial_{x_3} Y_1 = f_2, \\ \partial_{x_2} Y_1 - \partial_{x_1} Y_2 = f_3. \end{cases}$$

Claramente (2.8) admite muitas soluções e impondo a condição  $\operatorname{div} \vec{Y} = 0$ , isto é,  $\sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} Y_j = 0$ , configuramos o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{Y} = \vec{f}, \\ \operatorname{div} \vec{Y} = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

para  $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ . Uma solução para (2.9) é dada por

$$\vec{Y} = G * \operatorname{rot} \vec{f}, \quad (2.10)$$

no qual  $G$  é uma solução fundamental do operador de Laplace  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^3$ . A convolução de uma função  $h$  (ou distribuição) por um campo vetorial  $f = (f_1, \dots, f_N)$  também é denotada por  $*$  e define o campo vetorial  $h * f = (h * f_1, \dots, h * f_N)$ . Em especial, nós consideramos  $G$  uma solução invariante por rotações, que explicitamente é dada por  $G(x) = c/|x|^{N-2}$  quando  $N \geq 3$  e  $G(x) = (2\pi)^{-1} \log |x|$  quando  $N = 2$ . Da teoria de Calderon-Zygmund, nós obtemos a desigualdade

$$\|\nabla Y\|_p \leq c \|f\|_p \quad (2.11)$$

para  $1 < p < \infty$ . Por simplicidade denotaremos os campos  $\vec{Y}$  simplesmente por  $Y$ . Precisamente,  $\nabla Y = \nabla \operatorname{rot} G * f$  é um operador integral singular com núcleo par que é

limitado em  $L^p$  para  $1 < p < \infty$ . Como consequência do Teorema de imersão de Sobolev,  $W^{1,p} \subset L^{p^*}$ , a estimativa (2.11) torna-se

$$\|Y\|_{p^*} \leq c\|f\|_p \quad (2.12)$$

para  $p^* = 3p/(3-p)$  e  $1 < p < 3$ . Apesar da desigualdade (2.11) em geral não ser válida quando  $p = 1$ , surpreendentemente a desigualdade (2.12) é válida para  $p = 1$ .

**Teorema 2.2** *Seja  $\vec{f} \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . Então existe  $C > 0$  tal que*

$$\|Y\|_{3/2} \leq C\|f\|_1. \quad (2.13)$$

Claramente o Teorema 2.2 implica a Proposição 1.1 quando  $N = 3$ . Com efeito,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot u \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} Y \cdot (\text{rot } u) \right| \leq \|Y\|_{3/2} \|\text{rot } u\|_3 \leq C\|f\|_1 \|\nabla u\|_3.$$

A recíproca também é verdadeira. Por dualidade é suficiente demonstrarmos que existe  $C > 0$ , constante universal, tal que  $\left| \int_{\mathbb{R}^3} Y \cdot h \right| \leq C\|f\|_1 \|h\|_3$  para toda  $h \in L^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . Pelo Teorema de decomposição de Hodge  $h = g + \text{grad} p$  para  $g \in L^3_{\sharp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  e  $\|g\|_3 \leq C\|h\|_3$ . Além do mais, podemos encontrar  $\tilde{Z} \in W^{1,3}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tal que  $\text{rot } \tilde{Z} = g$ ,  $\text{div } \tilde{Z} = 0$  e  $\|\nabla \tilde{Z}\|_3 \leq \|g\|_3$  donde

$$\int_{\mathbb{R}^3} Y \cdot h = \int_{\mathbb{R}^3} Y \cdot (\text{rot } \tilde{Z}) = - \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot \tilde{Z}$$

e pela Proposição 1.1 concluímos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} Y \cdot h \right| \leq C\|f\|_1 \|\nabla \tilde{Z}\|_3 \leq C\|f\|_1 \|\nabla g\|_3 \leq C\|f\|_1 \|\nabla h\|_3.$$

O análogo ao Teorema 2.2 quando  $N=2$  é falso. Se nós definirmos  $Y = \left( -\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \right)$  então

$$\begin{cases} \text{rot } Y &= 2\pi\delta_0, & (\text{distribuição de Dirac na origem}) \\ \text{div } Y &= 0, \end{cases}$$

porém,  $Y$  não pertence a  $L^2$ . Com efeito, seja  $g = (g_1, g_2)$  definida por  $g_1 = -2\pi \frac{x_2}{|x|^2} * \phi_\varepsilon$  e  $g_2 = 2\pi \frac{x_1}{|x|^2} * \phi_\varepsilon$  para  $\phi_\varepsilon$  uma aproximação da identidade. Claramente  $\text{rot } g = \phi_\varepsilon$ ,

$\operatorname{div} g = 0$  e  $g \notin L^2$ , uma vez que pelo Teorema de Plancherel e o Teorema da Convergência Dominada  $\|g_1\|_{L^2} \rightarrow \left\| \frac{x_1}{|x|^2} \right\|_{L^2}$  quando  $\varepsilon \searrow 0$  (analogamente vale a mesma conclusão para  $\|g_2\|_{L^2}$ ).

Equivalentemente a desigualdade (2.13) nós escrevemos

$$\left\| \nabla \left( \frac{1}{|x|} * f \right) \right\|_{3/2} \leq c \|f\|_1 \quad (2.14)$$

para  $f \in L^3_{\sharp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , o que implica

$$\left\| \frac{1}{|x|} * f \right\|_3 \leq c \|f\|_1. \quad (2.15)$$

**Observação 2.1** *Analogamente, os respectivos substitutos de (2.14) e (2.15) quando  $N = 2$  são*

$$\|\nabla(\log|x| * f)\|_2 \leq c \|f\|_1 \quad e \quad \|\log|x| * f\|_{\infty} \leq c \|f\|_1. \quad (2.16)$$

## 2.3 Estimativas $L^1$ para o complexo de de Rham

Num contexto mais geral, o sistema (2.9) pode ser escrito na linguagem do complexo de Hodge-de Rham em  $\mathbb{R}^N$ . Seja  $\Lambda^k(\mathbb{R}^N)$  o conjunto das  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^N$  e  $W^{1,N}(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  o conjunto das  $k$ -formas cujos coeficientes pertencem a  $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$  (analogamente  $C_0^{\infty}(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$ ,  $L^p(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$ , etc.). Denotamos uma  $k$ -forma  $u$  por  $\sum_{|J|=k} u_J dx_J$  e dizemos que  $u$  é suave de suporte compacto se cada componente  $u_J$  goza de tal propriedade. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} du = f, \\ d^*u = g, \end{cases} \quad (2.17)$$

no qual  $d$  é a derivada exterior e  $d^*$  a derivada co-exterior. Uma versão da desigualdade (2.11) na linguagem de Hodge é dada por

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq C_p (\|du\|_{L^p} + \|d^*u\|_{L^p}), \quad u \in C_0^{\infty}(\Lambda^k \mathbb{R}^N) \quad (2.18)$$

para  $1 < p < \infty$ . Em geral, a estimativa acima não é válida quando  $p = 1$  e  $p = \infty$ . Pelas estimativas de Sobolev a desigualdade (2.18) implica

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C_p (\|du\|_{L^p} + \|d^*u\|_{L^p}), \quad (2.19)$$



no qual  $p^* = pN/(N - p)$ . O caso limite quando  $p \searrow 1$  de (2.19) é dado por

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C (\|du\|_{L^1} + \|d^*u\|_{L^1}),$$

que não pode ser obtido por combinação da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg com (2.18), uma vez que  $C_p \rightarrow \infty$  quando  $p \searrow 1$ . Entretanto a estimativa acima para  $k \neq 1$  e  $k \neq N - 1$  permanece válida, como enunciado pelo Teorema 1.1. No contexto de formas, a Proposição 1.1 pode ser reescrita na seguinte maneira.

**Proposição 2.3** *Se  $f$  e  $\Phi$  são 1-formas suaves de suporte compacto em  $\mathbb{R}^N$  e  $d^*f = 0$  então*

$$|\langle f, \Phi \rangle| \leq c \|f\|_1 \|d\Phi\|_N.$$

Uma consequência do Teorema 1.1 é o seguinte resultado.

**Teorema 2.3** *Seja  $1 \leq k \leq N - 1$ . Então para toda  $\phi \in W^{1,N}(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  existe  $\psi \in L^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  tal que*

$$\begin{cases} d\phi = d\psi, \\ \|\psi\|_\infty \leq C \|d\phi\|_N. \end{cases}$$

**Teorema 1.1**  $\Rightarrow$  **Teorema 2.3**. Seja  $\phi \in W^{1,N}(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  para  $1 \leq k \leq N - 1$ . Queremos exibir  $\psi \in L^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  tal que  $d\phi = d\psi$ , isto é,

$$\langle d\phi, \beta \rangle = \langle \psi, d^*\beta \rangle$$

para toda  $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} \mathbb{R}^N)$ . Consideremos o operador linear definido em

$d^*(C_0^\infty(\Lambda^{k+1} \mathbb{R}^N))$  dado por

$$T(d^*\beta) = \langle d\phi, \beta \rangle.$$

Logo, T está bem definido e do fato que  $d^*\beta = d^*\gamma$  para alguma  $\gamma$  com  $d\gamma = 0$  temos

$$\begin{aligned} |T(d^*\beta)| &= |T(d^*\gamma)| \\ &= |\langle d\phi, \gamma \rangle| \\ &\leq \|d\phi\|_N \|\gamma\|_{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq C \|d\phi\|_N \|d^*\gamma\|_1 \\ &= C \|d\phi\|_N \|d^*\beta\|_1, \end{aligned}$$

no qual a segunda desigualdade é devida ao Teorema 1.1. Observemos que o caso crítico seria se  $\gamma$  fosse uma 1-forma, o que não acontece uma vez que  $k \geq 1$ . Pelo Teorema de Hahn-Banach,  $T$  pode ser estendido a um funcional linear em  $L^1(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  tal que  $\|T\| \leq C\|d\phi\|_N$ . Pelo Teorema de Representação de Riesz existe  $\psi \in L^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  tal que  $T(d^*\beta) = \langle \psi, d^*\beta \rangle$  e assim,

$$\langle d\psi, \beta \rangle = \langle \psi, d^*\beta \rangle = T(d^*\beta) = \langle d\phi, \beta \rangle$$

para toda  $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} \mathbb{R}^N)$ , o que implica  $d\phi = d\psi$ . Além do mais,

$$\|\psi\|_\infty = \|T\| \leq C\|d\phi\|_N.$$

■

A recíproca também é válida.

**Teorema 2.3  $\Rightarrow$  Proposição 2.3.** Consideremos a decomposição de Hodge de  $\Phi$  dada por

$$\Phi = d\alpha + d^*\beta.$$

Uma vez que  $\langle f, d\alpha \rangle = \langle d^*f, \alpha \rangle = 0$  temos  $\langle f, \Phi \rangle = \langle f, d^*\beta \rangle$ . Então, pelo Teorema 2.3 existe  $\Psi \in L^\infty$  tal que

$$\begin{cases} d(d^*\beta) = d\Psi, \\ \|\psi\|_\infty \leq C\|d(d^*\beta)\|_N = C\|d\Phi\|_N. \end{cases}$$

Como  $d^*\beta = \Psi + d\Gamma$  para algum  $\Gamma$ , então do fato que  $d^*f = 0$  temos

$$\langle f, d^*\beta \rangle = \langle f, \Psi \rangle + \langle f, d\Gamma \rangle = \langle f, \Psi \rangle.$$

Logo,

$$|\langle f, \Phi \rangle| = |\langle f, \Psi \rangle| \leq \|f\|_1 \|\Psi\|_\infty \leq C\|f\|_1 \|d\Phi\|_N.$$

■

Uma versão mais forte do Teorema 1.1 (e assim mais forte que o Teorema 2.3 e a Proposição 2.3), diz que  $dX = \beta$  possui solução  $X \in (W^{1,N} \cap L^\infty)(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  para  $\beta \in L^N(\Lambda^{k+1} \mathbb{R}^N)$ .

**Teorema 2.4** *Se  $N \geq 2$  e  $1 \leq k \leq N - 1$  então*

$$d[W^{1,N}(\Lambda^k \mathbb{R}^N)] = d[W^{1,N} \cap L^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)].$$

*Mais precisamente, dado algum  $X \in W^{1,N}(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  existe  $Y \in W^{1,N} \cap L^\infty(\Lambda^k \mathbb{R}^N)$  tal que*

$$\begin{cases} dX = dY, \\ \|\nabla Y\|_N + \|Y\|_\infty \leq C\|dX\|_N. \end{cases} \quad (2.20)$$

**Observação 2.2** *Note que a conclusão falha quando  $k = 0$  pois dada uma função  $f \in W^{1,N}$ , em geral não existe  $g \in L^\infty$  tal que  $\nabla(f - g) = 0$ .*

Um comentário interessante é que a construção de uma solução  $Y$  para o problema acima não pode ser linear. Mais precisamente:

**Proposição 2.4** *Não existe nenhum operador linear  $K : W^{1,N}(\Lambda^1 \mathbb{R}^N) \rightarrow L^\infty(\Lambda^1 \mathbb{R}^N)$  tal que*

$$d(KX) = dX \quad \forall X \in W^{1,N}(\Lambda^1 \mathbb{R}^N).$$

Este resultado foi provado inicialmente no toro  $\mathbb{T}^N$  por Bourgain e Brezis no artigo [BB4] (aliás grande parte dos resultados aqui citados foram provados para  $\mathbb{T}^N$  e posteriormente estendidos ao caso de  $\mathbb{R}^N$ ). Neste artigo eles constroem explicitamente um contra exemplo para  $N = 2$  que pode ser generalizado em mais dimensões. Como referência a esta passagem veja [BB2]. A mesma argumentação para a demonstração da equivalência Teorema 1.1  $\iff$  Teorema 2.3 segue para demonstrarmos que Teorema 1.2  $\iff$  Teorema 2.4.

## Capítulo 3

# Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg local para um sistema elitico de campos vetoriais

Inicialmente iremos introduzir algumas definições e notações utilizadas nesse capítulo. Uma referência completa dessa apresentação inicial pode ser encontrada no Capítulo I em [BCH]. Seja  $\Omega$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathfrak{X}(\Omega)$  o conjunto de todos campos vetoriais complexos sobre  $\Omega$ . Por conveniência iremos trabalhar no conjunto  $\mathbb{R}^N$  o que não impede de  $\Omega$  ser um espaço mais geral, como por exemplo uma variedade diferenciável de dimensão  $N$ . Se  $(U, \mathbf{x})$  é uma carta local em  $\Omega$  então representamos  $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$  nas coordenadas locais  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  por  $L = \sum_{j=1}^N L(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Denotamos por  $\mathbb{C}T_p\Omega$  o conjunto de todos vetores tangentes complexos em  $p \in \Omega$  e  $\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p\Omega$  o *fibrado tangente complexificado*.

**Definição 3.1** Dizemos que  $\mathcal{V}$  é um subfibrado vetorial complexo de  $\mathbb{C}T\Omega$  de posto  $n$  se

$$\mathcal{V} \doteq \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T\Omega$$

satisfaz a seguintes condições

(a) Para cada  $p \in \Omega$ ,  $\mathcal{V}_p$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}T\Omega$  de dimensão  $n$ .

(b) Dado  $p_0 \in \Omega$  existe um aberto  $U_0$  que contém  $p_0$  e campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U_0)$  tal que o conjunto  $\{L_1|_p, \dots, L_n|_p\}$  gera  $\mathcal{V}_p$  para cada  $p \in U_0$ .

Dado um subfibrado vetorial complexo  $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$  e um conjunto aberto  $U$  de  $\Omega$ , uma seção de  $\mathcal{V}$  sobre  $U$  é um elemento  $L$  de  $\mathfrak{X}(U)$  tal que  $L_p \in \mathcal{V}_p$  para todo  $p \in U$ .

**Definição 3.2** Uma estrutura formalmente integrável sobre  $\Omega$  é um subfibrado vetorial complexo  $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$  que satisfaz a seguinte condição de involutividade (ou Frobenius):

- Se  $U \subset \Omega$  é um aberto e  $L, M \in \mathfrak{X}(U)$  são seções de  $\mathcal{V}$  sobre  $U$  então  $[L, M]$  é também uma seção de  $\mathcal{V}$  sobre  $U$ .

Lembramos que  $[ , ]$  é o colchete (ou comutador) de Lie definido por  $[L, M](f) \doteq L(M(f)) - M(L(f))$  para todo  $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$  e  $f \in C^\infty(\Omega)$ . O posto de uma estrutura formalmente integrável  $\mathcal{V}$  é definido simplesmente pelo posto do subfibrado  $\mathcal{V}$ . Seja  $\mathcal{V}$  uma estrutura formalmente integrável sobre  $\Omega$  e  $p \in \Omega$  fixado. Logo podemos exibir uma carta local  $(U, \mathbf{x})$  para  $p \in U$  e campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$  tal que  $\{L_1|_q, \dots, L_n|_q\}$  é base de  $\mathcal{V}_q$  para cada  $q \in U$ . Se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  e

$$L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.1)$$

então a matriz  $(a_{jk})$  tem posto  $n$  em cada ponto. Além do mais, existem funções  $c_{jk}^v \in C^\infty(U)$  para  $j, k, v = 1, \dots, n$  tal que

$$[L_j, L_k] = \sum_{v=1}^n c_{jk}^v L_v.$$

Nós denotamos por  $E^1(\Omega)$  o dual de  $C^\infty(\Omega)$ -módulo  $\mathfrak{X}(\Omega)$  e nos referimos aos seus elementos como *formas diferenciais sobre  $\Omega$  de grau 1* ou simplesmente por 1-formas. Em outras palavras, uma 1-forma sobre  $\Omega$  é um funcional  $C^\infty(\Omega)$ -linear  $\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ . Definindo  $\mathbb{C}T_p^*\Omega \doteq$  dual de  $\mathbb{C}T_p\Omega$  então segue que cada  $\omega \in E^1(\Omega)$  pode ser associado a um elemento  $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$  pela fórmula  $\omega_p(v) = \omega(L)(p)$ , no qual  $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$  é tal que  $L_p = v$ . Pela Proposição I.4.2 em [BCH] obtemos a caracterização  $\mathbb{C}T_p^*\Omega = \{\omega_p : \omega \in E^1(\Omega)\}$ .

**Definição 3.3** Dada  $f \in C^\infty(\Omega)$  nós definimos  $df \in E^1(\Omega)$  pela fórmula

$$df(L) = L(f), \quad L \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Uma representação usual de  $df$  em coordenadas local é dada por  $df = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ . Nós também definimos o fibrado co-tangente complexificado de  $\Omega$  por

$\mathbb{C}T^*\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega$  e como antes, nós introduzimos a noção de um *subfibrado vetorial complexo* de  $\mathbb{C}T^*\Omega$  de posto  $m$  como sendo  $\mathcal{W} \doteq \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{W}_p$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- Cada  $\mathcal{W}_p$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}T_p^*\Omega$  de dimensão  $m$ .
- Dado  $p_0 \in \Omega$  existe um aberto  $U_0$  contendo  $p_0$  e 1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_m \in E^1(U_0)$  tal que  $\{\omega_1|_p, \dots, \omega_m|_p\}$  gera  $\mathcal{W}_p$  para cada  $p \in U_0$ .

Aqui nós destacamos a notação padrão de alguns espaços como

$$T_p\Omega \doteq \{v \in \mathbb{C}T_p\Omega : v \text{ é real}\} \quad e \quad T\Omega \doteq \bigcup_{p \in \Omega} T_p\Omega,$$

$$T_p^*\Omega \doteq \{\xi \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \xi \text{ é real}\} \quad e \quad T^*\Omega \doteq \bigcup_{p \in \Omega} T_p^*\Omega.$$

Se  $\mathcal{V} \doteq \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p$  é um subfibrado vetorial complexo de  $\mathbb{C}T\Omega$  então para cada  $p \in \Omega$  definimos  $\mathcal{V}_p^\perp \doteq \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \lambda = 0 \text{ sob } \mathcal{V}_p\}$  e denotamos por  $\mathcal{V}^\perp \doteq \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p^\perp$  (que é um subfibrado de  $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ ).

Seja  $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$  uma estrutura formalmente integrável sobre  $\Omega$ .

**Definição 3.4** O conjunto característico de  $\mathcal{V}$  é um subconjunto de  $T^*\Omega$  definido por  $T^0 \doteq \mathcal{V}^\perp \cap T^*\Omega$ . Também escrevemos  $T_p^0 \doteq \mathcal{V}_p^\perp \cap T_p^*\Omega$  para  $p \in \Omega$ .

Nós estamos interessados numa estrutura particular, chamada *estrutura elítica* que é caracterizada pela propriedade  $T_p^0 = 0$  para todo  $p \in \Omega$ .

**Exemplo 3.1** Seja  $\mathcal{V} \doteq \text{span}\{L_1, L_2\}$  um subespaço vetorial de dimensão 2 em  $\mathbb{C}T\Omega$  para  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , no qual os campos vetoriais nas coordenadas  $(x, t_1, t_2)$  são dados por

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + i(t_2)^2 \frac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

Claramente  $\mathcal{V}$  determina uma estrutura formalmente integrável, em particular  $[L_1, L_2] = 0$ . Além do mais a estrutura é elítica, uma vez que  $T_{(x, t_1, t_2)}^0 = 0$  para todo  $(x, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.5** Um subfibrado vetorial complexo  $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$  de posto  $n$  é dito definir uma estrutura localmente integrável se dado um ponto arbitrário  $p_0 \in \Omega$  existem um aberto  $U_0$  de  $p_0$  e funções  $Z_1, \dots, Z_m \in C_0^\infty(U_0)$ , com  $m = N - n$ , tal que

$$\text{span} \left\{ dZ_1|_p, \dots, dZ_m|_p \right\} = \mathcal{V}_p^\perp, \quad \forall p \in U_0.$$

Claramente cada estrutura localmente integrável satisfaz a condição de Frobenius e consequentemente define uma estrutura formalmente integrável. Quando  $\mathcal{V}$  é uma estrutura localmente integrável nós podemos construir geradores local, sob um apropriado sistema de coordenadas local, do subfibrado  $\mathcal{V}^\perp$ .

**Teorema 3.1** Seja  $\mathcal{V}$  uma estrutura localmente integrável definida sob uma variedade  $\Omega$ . Seja  $p \in \Omega$  e  $d$  a dimensão real de  $T_p^0$ . Então existe um sistema de coordenadas que se anula em  $p$ ,

$$\{x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}\}$$

e funções suaves a valores reais  $\phi_1, \dots, \phi_d$  definidas em uma vizinhança da origem satisfazendo

$$\phi_k(0) = 0, d\phi_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

tal que as diferenciais das funções

$$\begin{aligned} Z_j(x, y) &= z_j \doteq x_j + iy_j & j &= 1, \dots, \nu, \\ W_k(x, y, s, t) &= s_k + i\phi_k(z, s, t) & k &= 1, \dots, d, \end{aligned}$$

geram  $\mathcal{V}^\perp$  em uma vizinhança da origem. Em particular, nós temos que  $\nu + d = m$ ,  $\nu + n' = n$  e também

$$T_p^0 = \text{span}\{ds_1|_0, \dots, ds_d|_0\}.$$

O próximo resultado que iremos apresentar é devido a L. Nirenberg.

**Teorema 3.2** *Seja  $\mathcal{V}$  uma estrutura elítica sobre uma variedade suave  $\Omega$ . Então  $\mathcal{V}$  é localmente integrável*

A demonstração é consequência do clássico Teorema de Newlander-Nirenberg [NN] e do Teorema de Frobenius, e pode ser encontrada em [BCH].

Seja  $\mathcal{V}$  uma estrutura elítica e  $p \in \Omega$  fixado. Com a notação do Teorema 3.1 nós temos  $d = 0$ ,  $\nu = m$  e então existe um sistema de coordenadas

$$\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_{n'}\}$$

que se anula em  $p$  tal que definindo  $z_j \doteq x_j + iy_j$ , as diferenciais  $dz_j$  geram  $\mathcal{V}^\perp$  numa vizinhança de  $p$  e os campos vetoriais  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \frac{\partial}{\partial t_j}$  geram  $\mathcal{V}$  perto de  $p$ .

### 3.1 Sistema elítico de campos vetoriais complexos e o Teorema A

Consideremos  $n$  campos vetoriais complexos  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 1$ , com coeficientes suaves definidos em uma vizinhança  $\Omega$  da origem  $0$  do  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , que pode ser visto como seções do fibrado  $\mathbb{C}T\Omega$ , bem como operadores diferenciais de primeira ordem. Nós iremos assumir que

- (a)  $L_1, \dots, L_n$  são linearmente independentes em  $\Omega$ .

Na maioria da vezes também nós iremos supor que

- (b) o sistema  $\{L_1, \dots, L_n\}$  é *elítico*.



Isso significa que para toda 1-forma real  $\omega$  (isto é, qualquer seção de  $T^*\Omega$ ) tal que  $\langle \omega, L_j \rangle = 0$  implica  $\omega = 0$ . Note que o número  $n$  de campos vetoriais deve satisfazer a estimativa

$$\frac{N}{2} \leq n \leq N.$$

Além do mais, se  $\{L_1, \dots, L_n\}$  é sistema involutivo então  $\mathcal{V} \doteq \text{span}\{L_1, \dots, L_n\}$  determina uma estrutura elítica de posto  $n$  em  $\Omega$ .

**Exemplo 3.2** *Seja  $\Omega = \mathbb{R}^N$  munido do sistema de coordenadas cartesiano*

*$(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r, t_1, \dots, t_s)$  e os campos vetoriais*

$$\begin{cases} D_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) & j = 1, \dots, r \\ T_k = \frac{\partial}{\partial t_k} & k = 1, \dots, s \end{cases} \quad (3.2)$$

*Claramente  $\{D_1, \dots, D_r, T_1, \dots, T_s\}$  determina um sistema elítico. Note que quando  $s=0$  obtemos o sistema de Cauchy-Riemann em  $\mathbb{C}^r \cong \mathbb{R}^{2r}$ .*

Nós estamos interessados na seguinte questão: caracterizar os sistemas de campos vetoriais complexos tal que vale a estimativa a priori

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C \sum_{j=1}^n \|L_j u\|_{L^1}, \quad u \in C_0^\infty(U),$$

para alguma vizinhança  $U$  da origem e algum  $C > 0$ . Devido a natureza local da estimativa uma versão similar é obtida substituindo  $N/(N-1)$  por algum  $p \in [1, N/(N-1)]$ . Quando  $n = N$  e  $L_j = \partial_{x_j}$  a estimativa é conhecida como a clássica desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, que vale sem a restrição do tamanho do suporte para funções testes. O próximo resultado, que não requer muitos passos, diz respeito sobre a segunda parte do Teorema A.

**Proposição 3.1** *Se (1.5) vale então o sistema  $\{L_1, \dots, L_n\}$  é elítico.*

**Demonstração da Proposição 3.1.** Seja  $u \in C_0^\infty(U)$ ,  $u_\epsilon(x) \doteq u(\epsilon^{-1}x)$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $u_\epsilon \in C_0^\infty(U)$  e campos vetoriais  $L_j$  como em (3.1).

Aplicando  $u_\epsilon$  em (1.2) obtemos

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \sum_{j=1}^n \|L_j^\epsilon u\|_{L^1}$$

para  $L_j^\epsilon = \sum_{k=1}^N a_{jk}(\epsilon x) \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Tomando  $\epsilon \rightarrow 0$  concluímos

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \sum_{j=1}^n \|L_j^0 u\|_{L^1}.$$

Se o sistema  $\{L_1^0, \dots, L_n^0\}$ , com coeficientes constantes, não é elítico nós podemos assumir que, após uma mudança linear de variáveis,  $a_{j1}(0) = 0$  para  $j = 1, \dots, n$ . Logo a estimativa anterior torna-se

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{k=2}^N a_{jk}(0) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L^1} \quad (3.3)$$

para toda  $u \in C_0^\infty(U)$ . Aplicando  $\phi_\epsilon(x) = \phi_1(x_1 \epsilon^{-1}) \phi_2(x')$  para  $x' = (x_2, \dots, x_N)$  em (3.3) e nomeando  $\phi(x) = \phi_1(x_1) \phi_2(x')$ , nós obtemos

$$\|\phi\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \epsilon^{1/N} \sum_{j=1}^n \|L_j^0 \phi\|_{L^1},$$

o que implica em uma contradição quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , uma vez que concluímos que  $\phi$  é identicamente nula. Note que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  podem ser escolhidas de maneira arbitrária. Então,  $\{L_1^0, \dots, L_n^0\}$  determina um sistema elítico ou equivalentemente o sistema  $\{L_1, \dots, L_n\}$  é elítico em  $x = 0$ . O mesmo argumento pode ser aplicado para um ponto genérico de  $\Omega$ . ■

Agora desejamos demonstrar a segunda parte do Teorema A.

**Teorema 3.3** *Sejam  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 2$ , campos vetoriais satisfazendo (a) e (b). Então existe uma vizinhança  $U$  da origem e  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C \sum_{j=1}^n \|L_j u\|_{L^1}, \quad u \in C_0^\infty(U). \quad (3.4)$$

Note que a hipótese  $n \geq 2$  no Teorema 3.3 não pode ser melhorada. De fato, (3.4) falha para o campo vetorial elítico  $L = \partial x_1 + i\partial x_2$  em  $\mathbb{R}^2$ , como pode ser visto tomando  $u_\varepsilon(x) = \psi_\delta(x)(\phi_\varepsilon * E)(x)$ , no qual  $\psi_\delta(x) \doteq \psi(x\delta^{-1})$ ,  $\delta > 0$ ,  $\psi \in C_0^\infty(B_0(1))$  uma função de corte na origem escolhida tal que  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(U)$ ,  $E(x) = \frac{1}{\pi(x_1 + ix_2)}$  a solução fundamental de  $L$  e  $\phi_\varepsilon \doteq \varepsilon^{-2}\phi(x\varepsilon^{-1})$  sendo  $\phi$  uma aproximação da identidade. A desigualdade (3.4) é violada posto que  $\frac{\|u_\varepsilon\|_{L^2}}{\|Lu_\varepsilon\|_{L^1}} \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon \searrow 0$ . Veja a Seção 5.3 para os cálculos em detalhes.

Uma vez que os campos vetoriais

$$L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \dots, n,$$

são linearmente independentes, após uma contração de  $\Omega$  e uma renomeação dos índices, nós podemos assumir que a matriz  $(a_{jk})$  para  $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq N$  é invertível em uma vizinhança de  $\bar{\Omega}$ . Seja  $(b_{jk})$  a matriz inversa e campos vetoriais definidos por

$$L_j^\# = \sum_{k=1}^N b_{jk}(x) L_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como os coeficientes  $b_{jk}$  são limitados em  $\Omega$  é suficiente provar (3.4) para os campos  $L_j^\#$ .

Em particular

$$L_j^\# = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m c_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

no qual os coeficientes  $c_{jk}$  são suaves e  $m = N - n$ . Além do mais, modificando as funções  $c_{jk}(x)$  fora de uma vizinhança de  $\bar{\Omega}$  e estendendo-as para todo  $\mathbb{R}^N$ , nós podemos assumir que  $L_1^\#, \dots, L_n^\#$  são globalmente definidos em  $\mathbb{R}^N$  e que as funções  $c_{jk}(x)$  tem derivadas limitadas de todas as ordens. Em outras palavras, nós podemos assumir desde o início que o sistema de campos vetoriais  $\{L_1, \dots, L_n\}$  possuem a forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m c_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{a}')$$

com coeficientes suaves globalmente definidos em  $\mathbb{R}^N$ , cujas derivadas de todas as ordens são limitadas .

Outra observação relevante sobre o enunciado do Teorema 3.3 é que a hipótese (b) pode ser substituída pela eliticidade uniforme de

$$\Delta_L \doteq L_1^t \bar{L}_1 + \cdots + L_n^t \bar{L}_n,$$

isto é, para alguma constante  $c > 0$  e todo  $x, \xi \in \mathbb{R}^N$  vale

$$\sum_{j=1}^n \left| \xi_j + \sum_{k=1}^m c_{jk} \xi_{n+k} \right|^2 \geq c |\xi|^2. \quad (\text{b}')$$

Aqui  $\bar{L}_j$  denota o campo vetorial obtido de  $L_j$  por conjugação de seus coeficientes e  $L_j^t$  o transposto formal de  $L_j$ . Claramente se vale (a') e (b) então concluímos (b'). Essa propriedade será fundamental na demonstração do Teorema 3.3.

De agora em diante nós iremos trabalhar com a configuração global dos campos. O próximo lema, que não requer eliticidade, é um dos ingredientes da demonstração do Teorema 3.3.

**Lema 3.1** *Sejam  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 2$ , campos vetoriais como em (a'). Para cada  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  escreva  $f_j = L_j u$ . Então, existe  $C > 0$  tal que para toda  $u, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e  $1 \leq j \leq n$  vale*

$$\left| \int f_j(x) \phi(x) dx \right| \leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right) (\|\phi\|_{L^1} + \|\nabla \phi\|_{L^1}). \quad (3.5)$$

*Se, além do mais, os campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n$  possuem coeficientes constantes então*

$$\left| \int f_j(x) \phi(x) dx \right| \leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} \right) \|\nabla \phi\|_{L^N}. \quad (3.5')$$

Note que tomando o supremo do lado direito de (3.5) com  $\phi$  na bola unitária em  $W^{1,N}$  nós obtemos a estimativa equivalente

$$\|f_j\|_{\overset{\circ}{W}^{-1,N/(N-1)}} \leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right). \quad (3.6)$$

Aqui

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}^{-1,N/(N-1)}} \doteq \sup_{\|\nabla \phi\|_{L^N} \leq 1} |\langle u, \phi \rangle| \simeq \|Iu\|_{L^{N/(N-1)}}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

no qual  $I$  denota o operador de Riesz

$$Iu(x) = \int \frac{u(y)}{|x-y|^{N-1}} dy.$$

A prova do Lema 3.1 adapta os argumentos de Van Schaftingen no Lema 2.1.

**Demonstração do Lemma 3.1.** Para  $j = 2$ , o lado esquerdo de (3.5) pode ser escrito como

$$\int_{\mathbb{R}} J(x_1) dx_1, \text{ com } J(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_2^{x_1}(x') \phi^{x_1}(x') dx',$$

$x' = (x_2, \dots, x_N)$ ,  $f_2^{x_1}(x') = f_2(x_1, x')$  e  $\phi^{x_1}(x') = \phi(x_1, x')$ . Utilizando a decomposição do Lema 2.1 para  $\phi^{x_1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$  nós escrevemos  $J(x_1) = J_1(x_1) + J_2(x_1)$  para

$$J_k(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_2^{x_1}(x') \phi_k^{x_1}(x') dx', \quad k = 1, 2.$$

Então

$$|J_1(x_1)| \leq \|f_2^{x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \|\phi_1^{x_1}\|_{L^\infty} \quad (3.7)$$

e

$$J_2(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial f_2}{\partial s}(s, x') \phi_2^{x_1}(x') dx' ds. \quad (3.8)$$

Equivalentemente podemos escrever  $L_1 f_2 = L_2 f_1 + [L_1, L_2]u$  como

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = - \sum_{k=n+1}^N c_{1k} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + [L_1, L_2]u + L_2 f_1. \quad (3.9)$$

Observemos que (a') nos mostra que não há termos no lado direito de (3.9) que envolvem derivadas de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $u$  com respeito a  $x_1$ . Sendo assim, substituindo (3.9) em (3.8) e integrando por partes via a integral em  $\mathbb{R}^{N-1}$ , ou seja, distribuindo as derivadas de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $u$  para  $\phi_2^{x_1}$ , nós obtemos

$$|J_2(x_1)| \leq C(\|f\|_{L^1} + \|u\|_{L^1})(\|\nabla \Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty} + \|\Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty}) \quad (3.10)$$

com a notação  $\|f\|_{L^1} = \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1}$ . Para estimar  $\|\nabla \Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty} + \|\Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty}$  nós iremos aplicar (2.3) e (2.4) com  $p = N$ ,  $\mu = N - 1$ ,  $\gamma = 1/N$ , com uma escolha apropriada de  $\lambda = \lambda(x_1)$ .

Se  $J(x_1) \neq 0$  note que  $\|f_2^{x_1}\|_{L^1} > 0$ . Nesse caso, nós definimos

$$\lambda(x_1) = \frac{b}{a(x_1)}, \quad a(x_1) = \|f_2^{x_1}\|_{L^1}, \quad b = \|f\|_{L^1} + \|u\|_{L^1}.$$

Segue de (2.2), (2.3), (2.4), (3.7) e (3.10) que

$$\begin{aligned} |J(x_1)| &\leq C(a(x_1)\|\phi_1^{x_1}\|_{L^\infty} + b\|\nabla\Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty} + b\|\Phi_2^{x_1}\|_{L^\infty}) \\ &\leq C(a\lambda^{1/N}\|\phi^{x_1}\|_{L^N} + b\lambda^{(1-N)/N}(\|\phi^{x_1}\|_{L^N} + \|\nabla\phi^{x_1}\|_{L^N})) \\ &\leq C(\|f\|_{L^1} + \|u\|_{L^1})^{1/N}\|f_2^{x_1}\|_{L^1}^{(N-1)/N}(\|\phi^{x_1}\|_{L^N} + \|\nabla\phi^{x_1}\|_{L^N}). \end{aligned}$$

Se  $J(x_1) = 0$  a desigualdade é trivialmente verdadeira. Integrando em relação a  $x_1$  a última estimativa e invocando a desigualdade de Hölder com expoentes  $N$  e  $N/(N-1)$  nós obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} |J(x_1)| \leq C b^{1/N} \|f_2\|_{L^1}^{1-1/N} \|\phi\|_{W^{1,N}} \leq C(2\|f\|_{L^1} + \|u\|_{L^1}) \|\phi\|_{W^{1,N}}.$$

Isso prova (3.5) para  $j = 2$ . Um argumento similar pode ser dado para  $j = 1, \dots, n$ .

Quando os campos vetoriais  $L_j$ 's possuem coeficientes constantes nós temos  $[L_j, L_k] = 0$  e  $L_j^t = -L_j$ . Logo o mesmo roteiro pode ser seguido, o que resulta (3.5').

■

A próxima seção será destinada a prova do Teorema 3.3.

## 3.2 Demonstração do Teorema 3.3

Para estimarmos o lado esquerdo de (3.4) é suficiente controlarmos

$$\langle u, \phi \rangle = \int u(x)\phi(x) dx,$$

no qual  $\phi \in C_0^\infty(U)$  e  $\|\phi\|_{L^N} \leq 1$ . Aqui  $U$  é a bola  $B_0(\rho)$  centrada na origem e com raio pequeno  $\rho < 1/2$ , que será escolhido mais tarde. Nós assumimos os campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n$  satisfazendo (a') e (b'), em outras palavras, o operador de segunda ordem

$$\Delta_L(x, D) = L_1^t \bar{L}_1 + \dots + L_n^t \bar{L}_n,$$

pode ser interpretado como um operador pseudo diferencial elítico cujo simbolo está na classe de Hörmander  $S_{1,0}^2(\mathbb{R}^N)$ . Aqui usamos a notação padrão para  $p(x, D) \in OPS_{\rho,\delta}^m$  um operador pseudo diferencial cujo símbolo  $p(x, \xi)$  pertence à classe  $S_{\rho,\delta}^m$ . Já que nós iremos trabalhar somente com símbolos do tipo  $\rho = 1$  e  $\delta = 0$ , então escrevemos  $S_{1,0}^m$  simplesmente por  $S^m$ . Como referência sobre operadores pseudo diferenciais, nós citamos [H2, Chapter 3] e [Ta]. Dizemos que um operador  $p(x, D) \in OPS_{\rho,\delta}^m$  é elítico se para algum  $r < \infty$ ,

$$|p(x, \xi)| \geq C(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \quad \text{para } |\xi| \geq r.$$

Um resultado clássico da teoria de operadores pseudo diferenciais garante que se  $p(x, D) \in OPS^m$  é elítico então existe um operador inverso  $q(x, D)$  pertencente a classe  $OPS^{-m}$  módulo  $OPS^{-\infty}$ , isto é,

$$\begin{cases} p(x, D)q(x, D) = I \quad \text{mod } OPS^{-\infty} \\ q(x, D)p(x, D) = I \quad \text{mod } OPS^{-\infty}. \end{cases}$$

Pela desigualdade (b'),  $\Delta_L$  define um operador pseudo diferencial elítico cujo símbolo pertence a classe  $S^2$  e portanto existem operadores  $q(x, D) \in OPS^{-2}$  e  $r(x, D) \in OPS^{-\infty}$  tal que

$$\phi = \Delta_L(x, D)q(x, D)\phi + r(x, D)\phi$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(U)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \langle u, \phi \rangle &= \langle u, \Delta_L(x, D)q(x, D)\phi \rangle + \langle u, r(x, D)\phi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N \langle L_j u, \bar{L}_j(x, D)q(x, D)\phi \rangle + \langle u, r(x, D)\phi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N \langle L_j u, \bar{L}_j(x, D)\chi(x)q(x, D)\phi \rangle + \langle u, r(x, D)\phi \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

no qual  $\chi(x) \in C_0^\infty(U^*)$  é identicamente 1 numa vizinhança de  $\bar{U}$  e  $U^* = B_0(1)$ . Definindo  $\psi_j = \bar{L}_j(x, D)\chi(x)q(x, D)\phi$ ,  $f_j = L_j u$  e aplicando (3.5) nós obtemos

$$\begin{aligned} |\langle f_j, \psi_j \rangle| &\leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right) (\|\nabla \psi_j\|_{L^N} + \|\psi_j\|_{L^N}) \\ &\leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right) \|\nabla \psi_j\|_{L^N} \\ &\leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right) \|\phi\|_{L^N}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A segunda desigualdade decorre do fato que  $\psi_j \in C_0^\infty(U^*)$  e a terceira segue da propriedade que  $\nabla \bar{L}_j(x, D)\chi(x)q(x, D)$  é um operador pseudo diferencial de ordem zero e portanto limitado em  $L^N(\mathbb{R}^N)$ . Além do mais, já que  $r(x, \xi) \in S^{-\infty}$  nós podemos escrever  $r(x, D)\phi = \int k(x, y)\phi(y) dy$  com um núcleo contínuo  $k(x, y)$  que decresce rapidamente quando  $y \rightarrow \infty$  uniformemente para  $x \in U$ . Então, para  $x \in U$ ,

$$|r(x, D)\phi| \leq \sup_{x \in U} \left( \int |k(x, y)|^{N/(N-1)} dy \right)^{(N-1)/N} \|\phi\|_{L^N} \leq C \|\phi\|_{L^N}$$

e disso segue

$$|\langle u, r(x, D)\phi \rangle| \leq C \|u\|_{L^1} \|\phi\|_{L^N}. \quad (3.13)$$

Logo, (3.11), (3.12) e (3.13) implicam

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right) \|\phi\|_{L^N}, \quad \phi \in C_0^\infty(U),$$

e assim

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1} + C \|u\|_{L^1}, \quad u \in C_0^\infty(U).$$

Já que  $\|u\|_{L^1} \leq C \rho^{1/N} \|u\|_{L^{N/(N-1)}}$ , o termo  $C \|u\|_{L^1}$  pode ser absorvido para  $\rho$  suficientemente pequeno o que demonstra (3.4). ■

Como consequência do Teorema 3.3 nós obtemos o seguinte resultado de resolubilidade local.



**Corolário 3.1** *Sejam  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 2$ , campos vetoriais satisfazendo (a) e (b). Então existe uma vizinhança  $U$  da origem tal que para cada  $f \in L^N(U)$ , a equação super determinada*

$$L_1 u_1 + \dots + L_n u_n = f$$

*possui solução em  $U$  com  $(u_1, \dots, u_n) \in L^\infty(U)^N$ .*

**Observação 3.1** *Note que o resultado em geral é falso quando  $n = 1$ . O contra exemplo pode ser gerado nos mesmos moldes do que apresentado na 5.3.*

**Demonstração do Corolário 3.1.** Como  $L_j = -L_j^t + c_j(x)$ ,  $c_j \in C^\infty(U)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , nós facilmente concluímos de (3.4), após reduzir  $U$  se necessário, a estimativa

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C \sum_{j=1}^n \|L_j^t u\|_{L^1}, \quad u \in C_0^\infty(U). \quad (3.14)$$

Agora, consideremos o conjunto  $X \subseteq L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  dado por

$$X = \{(L_1^t \Phi, \dots, L_n^t \Phi) \mid \Phi \in C_0^\infty(U)\}$$

e  $\Psi_j = L_j^t \Phi$ . Seja  $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ , o funcional linear definido por  $\lambda(\Psi_1, \dots, \Psi_n) = (f, \Phi)$  que está bem definido e é contínuo, uma vez que

$$|\lambda(\Psi_1, \dots, \Psi_n)| \leq |(f, \Phi)| \leq \|f\|_{L^N} \|\Phi\|_{L^{N/(N-1)}} \lesssim \|f\|_{L^N} \left( \sum_{j=1}^n \|\Psi_j\|_{L^1} \right).$$

Segue do Teorema de Hahn-Banach que o funcional  $\lambda$  pode ser estendido de forma linear e contínua a todo  $L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . Como consequência do Teorema de Representação de Riesz existe  $u = (u_1, \dots, u_n)$  para  $u_j \in L^\infty(U)$  tal que  $\lambda(\Psi) = (u, \Psi)$  para toda  $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ .

Assim,

$$(f, \Phi) = \lambda(L_1^t \Phi, \dots, L_n^t \Phi) = \sum_{j=1}^n (u_j, L_j^t \Phi) = (L_1 u_1 + \dots + L_n u_n, \Phi)$$

para toda  $\Phi \in C_0^\infty(U)$  donde

$$L_1 u_1 + \dots + L_n u_n = f.$$

■

# Capítulo 4

## Estimativa $L^1$ para o complexo $d_{\mathcal{L}}$

Dada uma estrutura formalmente integrável  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T\Omega$  é possível associar um complexo diferencial  $d_{\mathcal{L}}$ . Em particular nós estamos interessados quando a estrutura  $\mathcal{L}$  é elítica, mais precisamente, quando o subfibrado  $\mathcal{L}$  é gerado por um sistema elítico e involutivo de campos vetoriais.

### 4.1 O complexo diferencial $d_{\mathcal{L}}$

Seja  $L_1, \dots, L_n$  campos vetoriais definidos sobre uma vizinhança  $\Omega$  da origem  $0 \in \mathbb{R}^N$  para  $N \geq 2$ , como em (3.1), satisfazendo a propriedade (a).

**Definição 4.1** Dizemos que um sistema  $\{L_1, \dots, L_n\}$  é involutivo se os campos vetoriais  $L_j$  para  $j = 1, \dots, n$ , satisfazem a condição de Frobenius

$$(c) [L_j, L_k] = \sum_{\ell=1}^n d_{jk\ell} L_{\ell}, \quad 1 \leq j, k, \leq n \text{ para funções complexas } d_{jk\ell} \in C^{\infty}(\Omega).$$

**Exemplo 4.1** O sistema  $\{D_1, \dots, D_r, T_1, \dots, T_s\}$  em (3.2) é involutivo.

Note que se  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T\Omega$  é o subfibrado gerado por  $L_1, \dots, L_n$  então (c) é satisfeita para qualquer outro conjunto de geradores de  $\mathcal{L}$ . Como observado anteriormente,

nós podemos assumir que os campos vetoriais  $L_j$  são da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m c_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{a}')$$

no qual os coeficientes  $c_{jk}$  são suaves e globalmente definidos em  $\mathbb{R}^N$ , cujas derivadas de qualquer ordem são limitadas. A forma especial de  $L_1, \dots, L_n$  em (a') nos mostra que (c) é reduzido para

$$[L_j, L_k] = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n. \quad (\text{c}')$$

Como consequência da demonstração da estimativa (3.5), no Lema 3.1, nós obtemos

$$\left| \int L_j u(x) \phi(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{W^{1,N}} \sum_{j=1}^n \|L_j u\|_{L^1}, \quad u, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (4.1)$$

Devido a propriedade (c') dos comutadores, o termo  $\|u\|_{L^1}$  não aparece na estimativa (4.1). Logo, nós podemos concluir a desigualdade

$$\|L_j u\|_{\dot{W}^{-1, N/(N-1)}} \leq C \sum_{j=1}^n \|L_j u\|_{L^1}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (4.2)$$

Agora nós faremos uma pequena introdução sobre o complexo  $d_{\mathcal{L}}$  associado a estrutura  $\mathcal{L}$ . Consideremos  $L_1, \dots, L_n$  originalmente como no início da seção e assumimos que o sistema  $\{L_1, \dots, L_n\}$  seja elítico e involutivo. Seja  $\mathcal{L}$  o subfibrado involutivo de  $CT\Omega$  gerado pelos campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n$ . Denotamos por  $E^k(\Omega)$  o espaço das  $k$ -formas suaves com coeficientes complexos,  $0 \leq k \leq N$ , isto é, as seções suaves do fibrado vetorial  $\wedge^k(CT^*\Omega)$  e  $\mathcal{L}^\perp(\Omega)$  o subfibrado de  $CT^*\Omega$  definido por toda  $\omega \in E^1(\Omega)$  tal que  $\langle \omega, L \rangle = 0$  para toda seção de  $\mathcal{L}$ . Seja  $\mathcal{I}$  o ideal gerado por  $\mathcal{L}^\perp(\Omega)$  em  $\bigotimes_{k=0}^N \wedge^k(CT^*\Omega)$ . Aqui, se  $\omega_1, \dots, \omega_m$ ,  $n + m = N$ , é o conjunto de geradores locais de  $\mathcal{L}^\perp(\Omega)$ , então  $\mathcal{I}^k(\Omega) \doteq \mathcal{I} \cap \wedge^k(CT^*\Omega)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , é gerado pelas  $k$  formas do tipo

$$\omega_j \wedge \omega', \quad j = 1 \dots, m, \quad \omega' \in E^{k-1}(\Omega).$$

Escrevemos  $\mathfrak{N}^k(\Omega) = \wedge^k(CT^*\Omega) / \mathcal{I}^k(\Omega)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , e denotamos por  $\tilde{E}^k(\Omega)$  o espaço das seções suaves do fibrado vetorial  $\mathfrak{N}^k(\Omega)$ . O complexo de Rham ( $[dR]$ )  $d : E^k(\Omega) \rightarrow$

$E^{k+1}(\Omega)$ , dado pela derivada exterior sobre formas com coeficientes complexos, dá origem ao seguinte novo complexo  $d_{\mathcal{L}}$  associado a estrutura  $\mathcal{L}$ ,

$$d_{\mathcal{L},k} : \tilde{E}^k(\Omega) \longrightarrow \tilde{E}^{k+1}(\Omega), \quad 0 \leq k \leq n,$$

definido da seguinte forma: se  $u \in E^k(\Omega)$  então  $d_{\mathcal{L},k}(u + \mathcal{I}^k) \doteq d_k u + \mathcal{I}^{k+1}$ . A operação está bem definida uma vez que a involutividade de  $\mathcal{L}$  implica que  $d_k \mathcal{I}^k \subset \mathcal{I}^{k+1}$ . Em particular, nós obtemos a básica propriedade de complexo

$$d_{\mathcal{L},k+1} d_{\mathcal{L},k} = 0.$$

Por uma elegante combinação feita por Treves do Teorema de Newlander-Nirenberg [NN] e do Teorema de Frobenius sobre distribuições integráveis reais [BCH] (veja o Teorema 3.1 e a discussão subsequente) é possível exibir um sistema de coordenadas local

$$x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r, t_1, \dots, t_s, \quad r + s = n,$$

definida sobre uma vizinhança  $\Omega'$  da origem tal que  $\mathcal{L}$  é gerada em  $\Omega'$  pelos  $n$  campos vetoriais

$$\begin{aligned} D_j &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad j = 1, \dots, r, \\ T_k &= \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nesse caso,  $\mathcal{L}^\perp$  é gerada em  $\Omega'$  por  $d\bar{z}_j \doteq dx_j + i dy_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , e  $dt_k$ ,  $1 \leq k \leq s$ . Então  $\tilde{E}^k(\Omega')$  pode ser identificado como o subespaço de  $E^k(\Omega')$  gerado pelos monômios

$$\begin{aligned} dt_{k_1} \wedge \dots \wedge dt_{k_\ell} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_\mu}, \quad k_p \in \{1, \dots, s\}, \quad j_q \in \{1, \dots, r\}, \\ \ell + \mu = k \end{aligned}$$

e para  $u \in \tilde{E}^1(\Omega') = C^\infty(\Omega')$  nós temos

$$d_{\mathcal{L},0} u = \sum_{k=1}^s T_k u dt_k + \sum_{j=1}^r D_j u d\bar{z}_j.$$

Note que quando  $r = 0$ , o complexo  $d_{\mathcal{L}}$  é justamente o complexo de de Rham enquanto que quando  $s = 0$  obtemos o complexo de Dolbeault ([H1]); isso justifica a notação

$d_{\mathcal{L}} = d + \bar{\partial}$  no caso geral. Em outras palavras, num apropriado sistema de coordenadas local, o complexo elítico  $d_{\mathcal{L}}$  possui coeficientes constantes e

$$\Delta_L = \sum_{k=1}^s T_k^2 + \sum_{j=1}^r \bar{D}_j D_j$$

é uma pequena variação do operador de Laplace em  $\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^{s+2r}$ .

## 4.2 Demonstração do Teorema B

Sem perda de generalidade podemos supor inicialmente que os campos  $L_1, \dots, L_n$ , dados originalmente pelo Teorema B, são da forma  $T_1, \dots, T_s, D_1, \dots, D_r$ , para  $r + s = n$  e  $T_k, D_j$  como em (4.3).

Aplicando (3.5') para o sistema  $\{T_1, \dots, T_s, D_1, \dots, D_r\}$ ,  $N = s + 2r \geq 2$  e escrevendo  $f_k = T_k u$ ,  $g_j = D_j u$  nós obtemos

$$\left| \int f_k(x) \phi(x) dx \right| \leq C \left( \sum_{k=1}^s \|f_k\|_{L^1} + \sum_{j=1}^r \|g_j\|_{L^1} \right) \|\nabla \phi\|_{L^N}, \quad (4.4)$$

$$\left| \int g_j(x) \phi(x) dx \right| \leq C \left( \sum_{k=1}^s \|f_k\|_{L^1} + \sum_{j=1}^r \|g_j\|_{L^1} \right) \|\nabla \phi\|_{L^N} \quad (4.5)$$

para toda  $u, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq k \leq s$ ,  $1 \leq j \leq r$ .

Das estimativas (4.4) e (4.5), nós podemos escrever

$$\|d_{\mathcal{L},0} u\|_{\mathring{W}^{-1,N/(N-1)}} \leq C \|d_{\mathcal{L},0} u\|_{L^1}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (4.6)$$

Mais geralmente, para  $k$  formas nós temos

$$\|d_{\mathcal{L},k} u\|_{\mathring{W}^{-1,N/(N-1)}} \leq C \|d_{\mathcal{L},k} u\|_{L^1}, \quad u \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N), \quad 0 \leq k \leq n-2, \quad (4.7)$$

no qual  $\tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N)$  denota os elementos de  $\tilde{E}^k(\mathbb{R}^N)$  com a propriedade do suporte compacto.

Similarmente, se  $d_{\mathcal{L}}^*$  denota o complexo dual de  $d_{\mathcal{L}}$ ,

$$d_{\mathcal{L},k}^* : \tilde{E}^{k+1}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \tilde{E}^k(\mathbb{R}^N), \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

determinado por

$$\int d_{\mathcal{L},k} u \cdot \bar{v} \, dx = \int u \cdot \overline{d_{\mathcal{L},k}^* v} \, dx, \quad u \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N), \quad v \in \tilde{E}_0^{k+1}(\mathbb{R}^N),$$

no qual  $\cdot$  indica o emparelhamento padrão sobre formas de mesmo grau, nós obtemos

$$\|d_{\mathcal{L},k}^* u\|_{\mathring{W}^{-1,N/(N-1)}} \leq C \|d_{\mathcal{L},k}^* u\|_{L^1}, \quad u \in \tilde{E}_0^{k+1}(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq k \leq n-1. \quad (4.8)$$

As estimativas (4.7) e (4.8) seguem da aplicação do próximo lema que estende a estimativa (3.5').

**Lema 4.1** *Sejam  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 2$ , campos vetoriais com coeficientes constantes, linearmente independentes definidos em  $\mathbb{R}^N$ . Consideremos funções testes  $f_1, \dots, f_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e suponha que para cada  $1 \leq k \leq \nu$  exista  $1 \leq j \leq n$  tal que*

$$L_j f_k = \sum_{j' \neq j} \sum_{\ell=1}^{\nu} c_{kj'\ell} L_{j'} f_\ell, \quad (4.9)$$

com  $c_{kj'\ell} \in \mathbb{C}$ . Então

$$\sum_{k=1}^{\nu} \|f_k\|_{\mathring{W}^{-1,N/(N-1)}} \leq C \sum_{l=1}^{\nu} \|f_l\|_{L^1}. \quad (4.10)$$

**Demonstração do Lema 4.1.** Uma vez que os campos são linearmente independentes, sem perda de generalidade, nós podemos supor que os campos  $L_j$  são escritos da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}$$

para  $j = 1, \dots, n$  e  $a_{jk} \in \mathbb{C}$ . Para provar a desigualdade desejada é suficiente demonstrarmos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) \phi(x) \, dx \right| \leq c \left( \sum_{k=1}^{\nu} \|f_k\|_{L^1} \right) \|\nabla \phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}$$

para todo  $k \in \{1, \dots, \nu\}$  e  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Fixado  $k$  seja  $j_k \in \{1, \dots, n\}$  tal que (4.9) é satisfeita para algum  $c_{kj'\ell}$  não nulo (caso contrário, a desigualdade é trivialmente satisfeita).

Aplicando a estimativa (3.5') nós obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) \phi(x) \, dx \right| \lesssim \left( \sum_{k=1}^{\nu} \|f_k\|_{L^1} \right) \|\nabla \phi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)},$$

que implica a desigualdade desejada.

■

Observemos que se  $u \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N)$  e  $d_{\mathcal{L},k}u = f$  então

$$d_{\mathcal{L},k+1}f = 0. \quad (4.11)$$

Para estimarmos  $\|d_{\mathcal{L},k}u\|_{\mathring{W}^{-1,N/(N-1)}}$  é suficiente controlarmos  $|\langle f_J, \phi \rangle|$  para cada função coordenada  $f_J$  de  $f$  tal que  $|J| = k + 1$  e  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Note que (4.11) nos dá uma relação do tipo (4.9), desde que  $0 \leq k \leq n - 2$ . Logo, pelo Lema 4.1 obtemos

$$|\langle f_J, \phi \rangle| \leq c\|f\|_{L^1}\|\nabla\phi\|_{L^N} = \|d_{\mathcal{L},k}u\|_{L^1}\|\nabla\phi\|_{L^N}$$

para cada  $|J| = k + 1$ , o que implica (4.7). Claramente o argumento falha quando  $u \in \tilde{E}_0^{n-1}(\mathbb{R}^N)$ , uma vez que (4.11) não implica em uma relação do tipo (4.9) com coeficientes  $c_{kj'\ell}$  não nulos. Analogamente, o mesmo argumento pode ser utilizado para demonstrarmos (4.8), desde que  $2 \leq k \leq n - 1$ .

Consideremos o operador

$$\Delta_k \doteq d_{\mathcal{L},k}^*d_{\mathcal{L},k} + d_{\mathcal{L},k-1}d_{\mathcal{L},k-1}^*, \quad 0 \leq k \leq n,$$

que, num certo sentido, é uma pequena variação do operador de Laplace-Beltrami sobre  $k$ -formas definida em  $\mathbb{R}^N$ . Quando  $k = 0$  e  $k = n$  os operadores  $d_{\mathcal{L},n}$ ,  $d_{\mathcal{L},-1}^*$  devem ser entendidos como nulos. Seja  $G_k$  a solução fundamental canônica do operador  $\Delta_k$  dada por

$$G_k(z, t) = \begin{cases} \omega_{r,s}^{-1} \{|z|^2 + |t/2|^2\}^{-r-\frac{s}{2}+1} & r \geq 1 \\ -t/(2|t|) & r = 0, s = 1 \\ -(\log |t|)/2\pi & r = 0, s = 2 \\ \omega_{r,s}^{-1}|t/2|^{-s+2} & r = 0, s \geq 3, \end{cases}$$

no qual  $\omega_{r,s} = 2^{s-2}(2m + s - 2)|S^{2r+s-1}|$  ([BCH]). Aqui  $|S^k|$  é a medida da esfera unitária em  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Agora, se  $\phi \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N)$  então podemos escrever a identidade  $\phi = \Delta_k(G_k\phi)$  em que  $G_k\phi \doteq G_k * \phi$ . Vamos assumir que  $2 \leq k \leq n - 2$ . Utilizando o mesmo argumento do Teorema 3.3 com (3.11) simplificado para

$$\int u \cdot \bar{\phi} = \int u \cdot \overline{\Delta_k G_k \phi} = \int d_{\mathcal{L},k}u \cdot \overline{d_{\mathcal{L},k}G_k\phi} + \int d_{\mathcal{L},k-1}^*u \cdot \overline{d_{\mathcal{L},k-1}G_k\phi}$$

segue pelas estimativas (4.7), (4.8), (4.10) e pela teoria de Calderón-Zygmund a estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int u \cdot \bar{\phi} \right| &\leq \|d_{\mathcal{L},k}u\|_{L^1} \|\nabla d_{\mathcal{L},k}G_k\phi\|_{L^N} + \|d_{\mathcal{L},k-1}^*u\|_{L^1} \|\nabla d_{\mathcal{L},k-1}^*G_k\phi\|_{L^N} \\ &\leq C(\|d_{\mathcal{L},k}u\|_{L^1} + \|d_{\mathcal{L},k-1}^*u\|_{L^1}) \|\phi\|_{L^N}. \end{aligned}$$

Isso implica por dualidade que

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C(\|d_{\mathcal{L},k}u\|_{L^1} + \|d_{\mathcal{L},k-1}^*u\|_{L^1}), \quad u \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N). \quad (4.12)$$

Novamente, sabemos que o argumento falha para  $k = 1, n - 1$  uma vez que (4.8) falha para  $k = 1$  e (4.7) falha para  $k = n - 1$ . Todavia, (4.12) vale para  $k = 0$  e para  $k = n$  por uma aplicação de (3.5'). Isso prova

**Teorema 4.1** *Seja  $u \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N)$  e assumamos que  $0 \leq k \leq n$  tal que  $k \neq 1, n - 1$ . Então*

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C(\|(d + \bar{\partial})u\|_{L^1} + \|(d + \bar{\partial})^*u\|_{L^1}), \quad u \in \tilde{E}_0^k(\mathbb{R}^N). \quad (4.13)$$

### 4.3 O Teorema C

Como comentado anteriormente, o argumento para a demonstração do Teorema 4.1 falha quando  $k = 1$  e  $k = n - 1$ . Entretanto, não podemos esperar que a estimativa (4.13) seja válida nesses casos. No Capítulo 5 nós apresentaremos um contra exemplo para a desigualdade (1.4) quando  $k = 1$  e  $k = N - 1$ , ou seja, quando  $d_{\mathcal{L}}$  é complexo de de Rahm. Logo, afim de contornar esse problema, nós podemos substituir a norma  $L^1$  ao lado esquerdo de (4.13) por uma norma mais fraca ou impormos condições adicionais sobre  $u$ . Suponhamos inicialmente  $k = 1$ ,  $u \in \tilde{E}_0^1(\mathbb{R}^N)$  e

$$(d + \bar{\partial})^*u = 0.$$

Então para toda  $\phi \in \tilde{E}_0^1(\mathbb{R}^N)$  temos a identidade

$$\int u \cdot \bar{\phi} = \int u \cdot \overline{\Delta_1 G_1 \phi} = \int (d + \bar{\partial})u \cdot \overline{(d + \bar{\partial})G_1 \phi}.$$



Logo, pelo Lema 4.1 nós obtemos

$$\left| \int u \cdot \bar{\phi} \right| \leq \|(d + \bar{\partial})u\|_{L^1} \|\nabla(d + \bar{\partial})G_1\phi\|_{L^N} \leq C\|(d + \bar{\partial})u\|_{L^1} \|\phi\|_{L^N},$$

o que implica

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C\|(d + \bar{\partial})u\|_{L^1}, \quad u \in \tilde{E}_0^1(\mathbb{R}^N), \quad (4.14)$$

desde que  $(d + \bar{\partial})^*u = 0$ . Similarmente

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C\|(d + \bar{\partial})^*u\|_{L^1}, \quad u \in \tilde{E}_0^{n-1}(\mathbb{R}^N), \quad (4.15)$$

desde que  $(d + \bar{\partial})u = 0$ .

Como dito, uma outra possibilidade é questionarmos se é possível substituir a norma  $L^1$  em (4.13) por uma norma mais fraca. No caso do complexo de de Rahm, Lanzani e Stein demonstraram que quando  $k = 1$ , uma estimativa análoga a (1.4) é válida quando  $\|d^*u\|_{L^1}$  é substituído por  $\|d^*u\|_{H^1}$ , no qual  $H^1$  é o espaço real de Hardy em  $\mathbb{R}^N$ . Similarmente quando  $k = N - 1$ ,  $\|du\|_{L^1}$  é substituído por  $\|du\|_{H^1}$ .

**Definição 4.2** Dizemos que uma distribuição  $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$  se existe  $\Phi \in \mathcal{S}$  (espaço de Schwartz) satisfazendo  $\int \Phi \neq 0$  tal que  $M_\Phi f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  e denotamos  $\|f\|_{H^1} \doteq \|M_\Phi f\|_{L^1}$ .

Lembramos que  $M_\Phi f$  é a função maximal definida por

$$M_\Phi(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|, \quad \Phi \in \mathcal{S}.$$

Um vasto estudo sobre o espaço  $H^1$  pode ser encontrado no livro [St].

Já que estamos trabalhando no contexto de estimativas locais, um natural substituto para  $H^1(\mathbb{R}^N)$  é o espaço localizável de Goldberg  $h^1(\mathbb{R}^N)$  ou  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$  ([G]).

**Definição 4.3** Dizemos que uma distribuição  $f \in h^1(\mathbb{R}^N)$  se existe  $\Phi \in \mathcal{S}$  satisfazendo  $\int \Phi \neq 0$  tal que  $m_\Phi f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  no qual

$$m_\Phi(x) = \sup_{0<t\leq 1} |(f * \Phi_t)(x)|, \quad \Phi \in \mathcal{S}$$

e denotamos  $\|f\|_{h^1} \doteq \|m_\Phi f\|_{L^1}$ .

Claramente valem as imersões  $H^1(\mathbb{R}^N) \subset h^1(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$  (além do mais as inclusões são estritas). Outra propriedade fundamental é que se  $f \in h^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e  $\alpha : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é um difeomorfismo de uma vizinhança do suporte de  $\eta$  então

$$\eta(f \circ \alpha) \in h^1(\mathbb{R}^N).$$

Note que, no nosso contexto local, esperamos que os espaços funcionais envolvidos preservem a propriedade acima (o que não acontece por exemplo com o espaço  $H^1$ ). Diante dessa breve introdução, nós enunciamos o seguinte resultado.

**Teorema 4.2** *Se o diâmetro de  $\Omega$  é suficientemente pequeno, valem a seguinte estimativas locais*

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C(\|d_{\mathcal{L},0}^*u\|_{h^1} + \|d_{\mathcal{L},1}u\|_{L^1}), \quad u \in \tilde{E}_0^1(\Omega), \quad (4.16)$$

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C(\|d_{\mathcal{L},n-2}^*u\|_{L^1} + \|d_{\mathcal{L},n}u\|_{h^1}), \quad u \in \tilde{E}_0^{n-1}(\Omega). \quad (4.17)$$

**Demonstração do Teorema 4.2.** Aqui nós procedemos como na demonstração do Teorema 3.3. Seja  $\ell = 1$  e a identidade

$$\phi = \Delta_1 q(x, D)\phi + r(x, D)\phi, \quad \phi \in \tilde{E}_0^1(\Omega),$$

para  $q(x, \xi) \in S^{-2}$  e  $r(x, \xi) \in S^{-\infty}$ . Então

$$\begin{aligned} \langle u, \phi \rangle &= \langle u, \Delta_1(x, D)q(x, D)\phi \rangle + \langle u, r(x, D)\phi \rangle \\ &= \langle d_{\mathcal{L},0}^*u, d_{\mathcal{L},0}^*q(x, D)\phi \rangle + \langle d_{\mathcal{L},1}u, d_{\mathcal{L},1}q(x, D)\phi \rangle + \langle u, r(x, D)\phi \rangle. \end{aligned}$$

O segundo e o terceiro termo ao lado direito da última desigualdade podem ser majorados por  $(\|d_{\mathcal{L},1}u\|_{L^1} + \|u\|_{L^1})\|\phi\|_{L^N}$  como na prova das estimativas (3.12) e (3.13). Novamente, lembremos que o mesmo argumento não pode ser aplicado para o primeiro termo. Ao invés disso, como  $q(x, D) = q(D)$ , nós escrevemos

$$\begin{aligned} (d_{\mathcal{L},0}^*u, d_{\mathcal{L},0}^*q(x, D)\phi) &= (q(x, D)d_{\mathcal{L},0}^*u, d_{\mathcal{L},0}^*\phi) \\ &= (j^{+1}(x, D)q(x, D)d_{\mathcal{L},0}^*u, j^{-1}(x, D)d_{\mathcal{L},0}^*\phi) \end{aligned}$$

com  $j^\alpha(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}$  para  $\alpha = +1, -1$  e assim

$$\begin{aligned} & |(d_{\mathcal{L},0}^* u, d_{\mathcal{L},0}^* q(x, D)\phi)| \\ & \leq C \|j^{+1}(x, D)q(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \|j^{-1}(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* \phi\|_{L^N}. \end{aligned}$$

Já que  $j^{-1}(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* \in OPS^0$ , nós obtemos

$$\|j^{-1}(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* \phi\|_{L^N} \leq C \|\phi\|_{L^N},$$

uma vez que os operadores dessa classe são limitados em  $L^p$  para  $1 < p < \infty$ . Para o outro termo, aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg temos

$$\|j^{+1}(x, D)q(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C \|\nabla j^{+1}(x, D)q(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{L^1}.$$

Note que como  $\nabla j^{+1}(x, D)q(x, D) \in OPS^0$ , em geral não podemos concluir que este operador é limitado em  $L^1$ . Entretanto, a limitação é válida em  $h^1$  ([K]) e assim

$$\|\nabla j(x, D)q(x, D)d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{L^1} \leq C \|d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{h^1}.$$

Logo,

$$|(d_{\mathcal{L},0}^* u, d_{\mathcal{L},0}^* q(x, D)\phi)| \leq \|d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{h^1} \|\phi\|_{L^N}.$$

Das estimativas anteriores nós concluimos que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C (\|d_{\mathcal{L},0}^* u\|_{h^1} + \|d_{\mathcal{L},1} u\|_{L^1} + \|u\|_{L^1}) \|\phi\|_{L^N}$$

o que demonstra (4.16) por dualidade, diminuindo  $\Omega$  caso necessário. A demonstração de (4.17) é similar. ■

## Capítulo 5

# Contra exemplos para desigualdades do tipo div-rot em $L^1$

Em vista do Teorema 1.1 nós podemos fazer a seguinte pergunta: vale a desigualdade (1.4) quando  $k=1$ ? Em outras palavras, existe  $C > 0$  constante universal tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq C (\|du\|_{L^1} + \|d^*u\|_{L^1}), \quad u \in C_0^\infty(\Lambda^1 \mathbb{R}^N)? \quad (\text{P1})$$

De fato, como observado na Seção 4.2 se impusermos a condição  $d^*u = 0$  a estimativa é verdadeira. Entretanto, a desigualdade em geral não é válida. Na Seção 5.1 nós iremos apresentar um contra exemplo para a estimativa (P1). Nesta mesma direção nós podemos fazer outro questionamento: vale a desigualdade (2.11) para  $p = 1$ ? Isto é, se  $Y$  satisfaz o sistema (2.9) vale

$$\|\nabla Y\|_1 \leq C \|f\|_1 \quad ? \quad (\text{P2})$$

Se  $Y$  é da forma (2.10) então pela teoria de Calderon-Zygmund a desigualdade em geral não é válida, uma vez que o operador integral singular definido pelo núcleo  $\partial_{x_k x_j}^2 G$  não é limitado em  $L^1$ . Entretanto a desigualdade poderia ser válida no subespaço  $\text{div } f = 0$  (assim como na Proposição 1.1), mas como será apresentado na Seção 5.2 a estimativa (P2) também é falsa. Uma generalização desse contra exemplo também será apresentada no contexto de formas para o sistema  $dY = f$ . A mesma análise pode ser feita quando

$p = \infty$  (veja a Seção A.2). Ao final do capítulo, na Seção 5.3, nós iremos demonstrar com detalhes o contra exemplo para o Teorema 3.3 quando  $n=1$ .

## 5.1 Contra exemplo para a estimativa (1.4) quando $k = 1$

A fim de violar a estimativa (1.4) quando  $k = 1$  é suficiente demonstrarmos que para cada  $C > 0$  existe  $w \in C_0^\infty(\Lambda^1 \mathbb{R}^N)$  exata tal que

$$\frac{\|w\|_{L^{\frac{N}{N-1}}}}{\|d^*w\|_{L^1}} > C.$$

**Proposição 5.1** *Existe uma família  $w_\epsilon \in C_0^\infty(\Lambda^1 \mathbb{R}^N)$ ,  $N \geq 3$ , satisfazendo  $dw_\epsilon = 0$  tal que*

$$\frac{\|w_\epsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}}}{\|d^*w_\epsilon\|_{L^1}} \rightarrow \infty \text{ quando } \epsilon \searrow 0. \quad (5.1)$$

**Demonstração da Proposição 5.1.** Para cada  $\epsilon > 0$  consideremos  $w_\epsilon$  a 1 forma suave de suporte compacto em  $\mathbb{R}^N$  definida por

$$w_\epsilon = du_\epsilon = \sum_{j=1}^N (\partial_{x_j} u_\epsilon) dx_j \text{ e } u_\epsilon = \left( \frac{1}{|x|^{N-2}} * \phi_\epsilon \right) \eta(x).$$

Aqui  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-2} \phi(\epsilon^{-1}x)$  para  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  uma função positiva tal que  $\text{supp}(\phi) \subset B_0(2)$  e  $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) dx = 1$ ,  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\eta \equiv 1$  na  $B_0(1)$  e  $\text{supp}(\eta) \subset B_0(3)$ . Suponhamos que (P1) seja válido para  $w_\epsilon$ , isto é, existe  $C > 0$  uma constante universal tal que

$$\|w_\epsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq c \|d^*w_\epsilon\|_{L^1}, \quad (5.2)$$

já que  $dw_\epsilon = ddu_\epsilon = 0$ .

**Afirmção 1.**  $d^*w_\epsilon \in L^1$  independente de  $\epsilon$ .

De fato,  $d^*w_\epsilon = d^*du_\epsilon = -\sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2 u_\epsilon = -\Delta u_\epsilon$  no qual

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}^2 u_\epsilon &= \partial_{x_j}^2 \eta \left\{ \phi_\epsilon * \frac{1}{|x|^{N-2}} \right\} + 2\partial_{x_j} \eta \left\{ \phi_\epsilon * \partial_{x_j} \left( \frac{1}{|x|^{N-2}} \right) \right\} \\ &\quad + \eta \left\{ \phi_\epsilon * \partial_{x_j}^2 \left( \frac{1}{|x|^{N-2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

o que implica

$$-\Delta u_\epsilon = \eta \phi_\epsilon + \Delta \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{1}{|x|^{N-2}} \right) + 2(2-N) \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{x_j}{|x|^N} \right). \quad (5.3)$$

A fim de demonstrarmos a afirmação acima é suficiente demonstrarmos que cada parcela ao lado direito de (5.3) pertence a  $L^1$  independente de  $\epsilon$ . Claramente para o primeiro termo temos

$$\|\eta \phi_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\eta\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^1}.$$

Já a segunda parcela pode ser estimada da forma

$$\left\| \left( \frac{1}{|x|^{N-2}} * \phi_\epsilon \right) \Delta \eta \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\Delta \eta\|_{L^\infty} \int_{\text{supp}(\Delta \eta)} \left| \left( \frac{1}{|x|^{N-2}} * \phi_\epsilon \right) (x) \right| dx.$$

Como  $\text{supp}(\Delta \eta) \subseteq A_0(1, 3)$ , sendo  $A_0(1, 3)$  a coroa de centro na origem, raio menor 1 e raio maior 3, então para  $\epsilon$  suficientemente pequeno temos

$$\sup_{\substack{x \in A_0(1,3) \\ y \in B_0(2\epsilon)}} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \leq \sup_{z \in A_0(1/2,4)} \frac{1}{|z|^{N-2}} \doteq \delta < \infty \quad (5.4)$$

donde

$$\int_{A_0(1,3)} \left| \left( \frac{1}{|x|^{N-2}} * \phi_\epsilon \right) (x) \right| dx \leq \delta \|\phi\|_{L^1} |A_0(1, 3)|. \quad (5.5)$$

O mesmo argumento é válido para estimarmos o terceiro termo  $\partial_{x_j} \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{x_j}{|x|^N} \right)$ .

■

Para estimarmos  $w_\epsilon$  em norma  $L^{\frac{N}{N-1}}$  basta estimarmos cada parcela  $\partial_{x_j} u_\epsilon$  que é escrita da forma

$$\partial_{x_j} u_\epsilon = \partial_{x_j} \eta \left\{ \phi_\epsilon * \frac{1}{|x|^{N-2}} \right\} + \eta \left\{ \phi_\epsilon * \frac{x_j}{|x|^N} \right\}.$$

**Afirmação 2.**

(i)  $\partial_{x_j} \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{1}{|x|^{N-2}} \right) \in L^{\frac{N}{N-1}}$  independente de  $\epsilon$ .

(ii)  $\left\| \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{x_j}{|x|^N} \right) \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty$ .

(i) Claramente

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{x_j} \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{1}{|x|^{N-2}} \right) \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} &\leq \|\partial_{x_j} \eta\|_{L^\infty} \left\| \phi_\epsilon * \frac{1}{|x|^{N-2}} \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(A_0(1,3))} \\ &\leq \delta \|\partial_{x_j} \eta\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^1} |A_0(1,3)|^{\frac{N-1}{N}}, \end{aligned}$$

no qual a segunda desigualdade decorre como em (5.5).

(ii) De fato,

$$\left\| \eta \left( \phi_\epsilon * \frac{x_j}{|x|^N} \right) \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \geq \left\| \phi_\epsilon * \frac{x_j}{|x|^N} \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_0(1))} = \left( \int_{B_0(1)} |I_\epsilon|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}}$$

para

$$I_\epsilon(x) = \int_{B_0(2\epsilon)} \frac{\phi_\epsilon(y)(x_j - y_j)}{|x - y|^N} dy.$$

Agora,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x) = \frac{x_j}{|x|^N}$  uniformemente para  $0 < \gamma < |x| < 1$  e dessa forma

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma < |x| < 1} |I_\epsilon(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx = \int_{\gamma < |x| < 1} \left| \frac{x_j}{|x|^N} \right|^{\frac{N}{N-1}} dx$$

para  $\epsilon < \gamma$ . Logo,

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_0(1)} |I_\epsilon(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx &\geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma < |x| < 1} |I_\epsilon(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \\ &\geq \int_{\gamma < |x| < 1} \left| \frac{x_j}{|x|^N} \right|^{\frac{N}{N-1}} dx \rightarrow \infty \quad (\text{Lema de Fatou}), \end{aligned}$$

quando  $\gamma \rightarrow 0$ .

■

Das Afirmações 1 e 2 nós obtemos (5.1), o que contradiz (5.2).

■

Analogamente, a mesma discussão sobre (P1) pode ser feita quando  $k = N - 1$ .

Outra observação relevante é que a mesma técnica pode ser usada para construir um contra exemplo para a estimativa (4.13) quando  $k = 1$  (analogamente quando

$k = n - 1$ ). Com efeito, basta gerarmos uma sequência  $\omega_\epsilon \in \tilde{E}_0^1(\Omega)$  exata,  $d_{\mathcal{L},1}\omega_\epsilon = 0$ , tal que

$$\frac{\|w_\epsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}}}{\|d_{\mathcal{L},0}^*w_\epsilon\|_{L^1}} \rightarrow \infty \quad \text{quando } \epsilon \searrow 0,$$

Seguindo o roteiro da demonstração da Proposição 5.1, isto pode ser feito definindo  $\omega_\epsilon = d_{\mathcal{L},0}u_\epsilon$  para  $u_\epsilon = \eta_\delta(G_1 * \phi_\epsilon)$  no qual  $G_1$  é dada como na Seção 4.2,  $\eta_\delta(x) \doteq \eta(x\delta^{-1})$  e  $\eta$  uma função de corte na origem.

## 5.2 Contra exemplo para a estimativa (2.11) quando $p=1$

O contra exemplo segue de uma pequena adaptação ao que foi apresentado para o problema (P1). Inicialmente, nós enunciamos o resultado para  $N = 3$ .

**Proposição 5.2** *Existe uma família  $Z_\epsilon, f_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  satisfazendo (2.9) para  $f_\epsilon \in L_{\sharp}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tal que*

$$\frac{\|\nabla Z_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_1} \rightarrow \infty \quad \text{quando } \epsilon \searrow 0.$$

**Demonstração da Proposição 5.2.** Para cada  $\epsilon > 0$  definimos

$$\varphi_\epsilon(x_1, x_2, x_3) = \psi_\epsilon(x_1, x_2)h(x_3)$$

com as seguintes escolhas:

- (i)  $\psi_\epsilon(x) = (2\pi)^{-1}(\log|x| * \phi_\epsilon)\eta(x)$  para  $x = (x_1, x_2)$  e  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ .
- (ii)  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-2}\phi(\epsilon^{-1}x)$  para  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\text{supp}(\phi) \subset B_0(2)$ ,  $\phi \geq 0$  e  $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)dx = 1$ .
- (iii)  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  para  $\eta \equiv 1$  em  $B_0(1)$  e  $\text{supp}(\eta) \subset B_0(3)$ .
- (iv)  $h \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ , isto é,  $h, h' \in L^1(\mathbb{R})$ .

De fato,  $\psi_\epsilon$  está bem definida uma vez que  $\log|x| \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ . Logo,  $\log|x| * \phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  e portanto  $\psi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .



**Observação 5.1** Note que  $\log|x| \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ , já que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m |\log r| r dr = \infty$ .

Consideremos uma família de campos suaves  $Z_\epsilon = (Z_\epsilon^1, Z_\epsilon^2, Z_\epsilon^3)$  definidos em  $\mathbb{R}^3$  por

$$\begin{aligned} Z_\epsilon^1 &= \partial x_2 \varphi_\epsilon, \\ Z_\epsilon^2 &= -\partial x_1 \varphi_\epsilon, \\ Z_\epsilon^3 &= 0. \end{aligned}$$

Facilmente vemos que para  $f_\epsilon \doteq (f_\epsilon^1, f_\epsilon^2, f_\epsilon^3)$  apropriadamente escolhidos por

$$\begin{aligned} f_\epsilon^1 &= \partial x_3 \partial x_1 \varphi_\epsilon, \\ f_\epsilon^2 &= \partial x_3 \partial x_2 \varphi_\epsilon, \\ f_\epsilon^3 &= \tilde{\Delta} \varphi_\epsilon \quad (-\tilde{\Delta} = \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2), \end{aligned}$$

nós obtemos  $\operatorname{div} f_\epsilon = 0$ , no qual  $Z_\epsilon$  e  $f_\epsilon$  satisfazem (2.9).

**Afirmção 1.**  $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^3)$  independente de  $\epsilon$ .

Afim de concluirmos tal afirmação é necessário e suficiente demonstrarmos:

- (a)  $\partial_{x_j} \psi_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^2)$  independente de  $\epsilon$  para  $j=1,2$ .
- (b)  $\tilde{\Delta} \psi_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^2)$  independente de  $\epsilon$ .

(a) Por definição temos

$$\partial_{x_j} \psi_\epsilon = (2\pi)^{-1} \left[ \left( \frac{x_j}{|x|^2} * \phi_\epsilon \right) \eta + (\log|x| * \phi_\epsilon) \partial_{x_j} \eta \right]. \quad (5.6)$$

Claramente,

$$\left\| \left( \frac{x_j}{|x|^2} * \phi_\epsilon \right) \eta \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|\eta\|_{L^\infty} \int_{\operatorname{supp}(\eta)} \left| \left( \frac{x_j}{|x|^2} * \phi_\epsilon \right) (y) \right| dy$$

Além do mais, decompondo  $\frac{x_j}{|x|^2} = g_1 + g_2$  para

$$g_1 = \frac{x_j}{|x|^2} \Big|_{\chi_{\{|x|<1\}}} \in L^1 \quad \text{e} \quad g_2 = \frac{x_j}{|x|^2} \Big|_{\chi_{\{|x|\geq 1\}}} \in L^\infty,$$

segue pela desigualdade de Young que

$$\int_{\text{supp}(\eta)} \left| \left( \frac{x_j}{|x|^2} * \phi_\epsilon \right) (y) \right| dy \leq \{ \|g_1\|_{L^1} + \|g_2\|_{L^\infty} \} \|\phi\|_{L^1}.$$

Já para o segundo termo ao lado direito de (5.6), note que como  $\text{supp}(\eta) \subset B_0(3)$  então  $\text{supp}(\partial_{x_j}\eta) \subset A_0(1,3)$  e dessa forma

$$\|(\log|x| * \phi_\epsilon)\partial_{x_j}\eta\|_{L^1} \leq \|\partial_{x_j}\eta\|_{L^\infty} \int_{A_0(1,3)} |(\log|x| * \phi_\epsilon)(y)| dy.$$

Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno obtemos

$$\delta_\epsilon \doteq \sup_{\substack{x \in A_0(1,3) \\ y \in B_0(2\epsilon)}} |\log|x-y|| \leq \delta \doteq \sup_{z \in A_0(1/2,4)} |\log|z|| < \infty$$

e assim,

$$\int_{A_0(1,3)} |(\log|x| * \phi_\epsilon)(y)| dy \leq \delta \|\phi\|_{L^1} |A_0(1,3)|,$$

o que finaliza a demonstração do item (a).

(b) Analogamente segue a demonstração como no item (a), uma vez que

$$\tilde{\Delta}\psi_\epsilon = \phi_\epsilon\eta + (2\pi)^{-1} \left[ \sum_{j=1}^2 2 \left( \frac{x_j}{|x|^2} * \phi_\epsilon \right) \partial_{x_j}\eta + (\log|x| * \phi_\epsilon)\tilde{\Delta}\eta \right]$$

no qual

$$\|\phi_\epsilon\eta\|_{L^1} \leq \|\eta\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^1}$$

e  $\tilde{\Delta}\psi_\epsilon - \phi_\epsilon\eta$  é estimada como feito para (5.6). ■

Agora, nós consideramos uma parcela especial de  $\nabla Z_\epsilon$  dada por  $g_\epsilon \doteq \partial_{x_1} Z_\epsilon^1$  que é escrita da forma  $h(x_3)\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi_\epsilon(x)$  para

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi_\epsilon(x) = (2\pi)^{-1} \left( \frac{x_1x_2}{|x|^4} * \phi_\epsilon \right) \eta + k(x), \quad (5.7)$$

com  $k \in L^1(\mathbb{R}^2)$  independente de  $\epsilon$ .

**Afirmação 2.**  $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \left( \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \phi_\epsilon \right) \eta \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \infty.$

Como  $\eta \equiv 1$  na  $B_0(1)$  então

$$\left\| \left( \frac{x_1 x_2}{|x|^4} * \phi_\epsilon \right) \eta \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \geq \int_{B_0(1)} |I_\epsilon(x)| dx$$

para  $I_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{|x - y|^4} \phi_\epsilon(y) dy$ . Note que, se  $\delta > 0$  então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x) = \frac{x_1 x_2}{|x|^4} \text{ uniformemente no conjunto } \delta < |x| < 1,$$

desde que  $\epsilon < \delta$ . Logo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta < |x| < 1} |I_\epsilon(x)| dx = \int_{\delta < |x| < 1} \frac{|x_1 x_2|}{|x|^4} dx$$

e assim

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < 1} |I_\epsilon(x)| dx \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta < |x| < 1} |I_\epsilon(x)| dx \geq \int_{\delta < |x| < 1} \frac{|x_1 x_2|}{|x|^4} dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty.$$

■

Das Afirmações 1 e 2 nós obtemos

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\nabla Z_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_1} \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|g_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_1} = \infty,$$

o que demonstra a Proposição 5.2.

■

Quando  $N = 2$  nós podemos interpretar o resultado da Proposição 5.2 da seguinte forma: existe uma familia,  $\vec{Y}_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  e  $f_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo

$$\operatorname{div} \vec{Y}_\epsilon = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{Y}_\epsilon = f_\epsilon,$$

em  $\mathbb{R}^2$ , isto é,

$$\partial_{x_1} Y_\epsilon^1 + \partial_{x_2} Y_\epsilon^2 = 0, \tag{5.8}$$

$$\partial_{x_1} Y_\epsilon^2 - \partial_{x_2} Y_\epsilon^1 = f_\epsilon, \tag{5.9}$$

tal que

$$\frac{\|\nabla \vec{Y}_\varepsilon\|_1}{\|f_\varepsilon\|_1} \longrightarrow \infty, \text{ quando } \varepsilon \searrow 0 ?$$

Seguindo a mesma receita da definição de  $\vec{Y}_\varepsilon \doteq \vec{Z}_\varepsilon$  na demonstração anterior, então definimos  $Y_\varepsilon^1 = \partial_{x_2}\varphi_\varepsilon$ ,  $Y_\varepsilon^2 = -\partial_{x_1}\varphi_\varepsilon$  e claramente

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{Y}_\varepsilon &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{Y}_\varepsilon &= -\Delta\varphi_\varepsilon \doteq f_\varepsilon. \end{aligned}$$

Escolhendo  $\varphi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$  como no item (i), segue pela Afirmação 1 da Proposição 5.2, item (b), que  $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^2)$  independente de  $\varepsilon$  (analogamente vale a mesma propriedade para  $\vec{Y}_\varepsilon$ ). Então podemos fazer a seguinte pergunta:  $\|\partial_{x_j}\partial_{x_i}\psi_\varepsilon\|_1 \longrightarrow \infty$  quando  $\varepsilon \searrow 0$  para algum  $i, j \in \{1, 2\}$ ? Quando  $i = 1$  e  $j = 2$  a resposta é afirmativa como consequência da Identidade (5.7) e da Afirmação 2.

Na linguagem de formas, a Proposição 5.2 pode ser escrita da seguinte maneira.

**Proposição 5.3** *Existem famílias  $Z_\varepsilon \in C_0^\infty(\Lambda^k\mathbb{R}^N)$  e  $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}\mathbb{R}^N)$ ,  $N \geq 3$ ,  $1 \leq k \leq N - 1$ , satisfazendo*

$$\begin{cases} dZ_\varepsilon = f_\varepsilon \\ d^*Z_\varepsilon = 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

tal que

$$\frac{\|\nabla Z_\varepsilon\|_1}{\|f_\varepsilon\|_1} \rightarrow \infty \text{ quando } \varepsilon \searrow 0.$$

**Observação 5.2** *Claramente quando  $N = 3$  e  $k = 1$  nós obtemos a Proposição 5.2.*

**Demonstração da Proposição 5.3.** Inicialmente vamos estender a demonstração da Proposição 5.2 no caso de uma 1-forma para  $\mathbb{R}^N$ . Seja  $Z_\varepsilon = \sum_{i=1}^N Z_\varepsilon^i dx_i$  definida por

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon^1 &= \partial_{x_2}\varphi_\varepsilon, \\ Z_\varepsilon^2 &= -\partial_{x_1}\varphi_\varepsilon, \\ Z_\varepsilon^j &= 0 \quad j = 3, 4, \dots, N, \end{aligned}$$

no qual  $\varphi_\epsilon(x_1, \dots, x_N) = \psi_\epsilon(x_1, x_2) \prod_{j=3}^N h_j(x_j)$ , sendo  $\psi_\epsilon$  como na Proposição 5.2 e  $h_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  para  $j = 3, 4, \dots, N$ . Definindo  $f_\epsilon = \sum_{|J|=2} f_\epsilon^J dx_J$  para

$$\begin{aligned} f_\epsilon^{1k} &= -\partial^2 x_2 x_k \varphi_\epsilon & , k = 3, 4, \dots, N \\ f_\epsilon^{2k} &= \partial^2 x_1 x_k \varphi_\epsilon & , k = 3, 4, \dots, N \\ f_\epsilon^{1,2} &= \tilde{\Delta} \varphi_\epsilon & , \quad -\tilde{\Delta} = \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 \\ f_\epsilon^{ik} &= 0 & , \text{ nos outros casos} \end{aligned}$$

temos  $Z_\epsilon$  e  $f_\epsilon$  satisfazendo o sistema (5.10) e  $df_\epsilon = 0$ . Repetindo a mesma demonstração da proposição anterior, nós concluímos que  $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$  independente de  $\epsilon$  e

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\nabla Z_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_1} \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|g_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_1} = \infty \quad (5.11)$$

para  $g_\epsilon \doteq \partial_{x_1} Z_\epsilon^1$ , o que finaliza a prova em  $\mathbb{R}^N$  para  $k = 1$ .

No caso geral, consideremos uma  $k$ -forma especial,  $1 \leq k \leq n - 1$ , definida por  $Z_\epsilon = \sum_{j=1}^{k+1} Z_\epsilon^{I_j} dx_{I_j}$ , para  $I = \{1, \dots, k + 1\}$  e  $I_j = I - \{j\}$  no qual

$$\begin{aligned} Z_\epsilon^{I_1} &= \partial_{x_1} \psi_\epsilon \prod_{k=3}^N h_k, \\ Z_\epsilon^{I_2} &= -\partial_{x_2} \psi_\epsilon \prod_{k=3}^N h_k, \\ Z_\epsilon^{I_j} &= (-1)^{j-1} \psi_\epsilon (\partial_{x_j} h_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N h_i & , j = 3, 4, \dots, N, \end{aligned}$$

sendo  $\psi_\epsilon$  e  $h_k = h_k(x_k)$  como antes. Definindo  $f = \sum_{|J|=k+1} f_\epsilon^J dx_J$  para

$$\begin{aligned}
f_\epsilon^I &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{x_j} Z_\epsilon^{I_j} = \tilde{\Delta} \psi_\epsilon \prod_{k=3}^N h_k + \psi_\epsilon \sum_{j=3}^{k+1} \left( \prod_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^N h_k \right) \partial_{x_j}^2 h_j, \\
f_\epsilon^{I_1 \cup \{i\}} &= (-1)^k \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_1} = (-1)^k \partial_{x_1} \psi_\epsilon \partial_{x_i} h^i \prod_{\substack{k=3 \\ i \neq j}}^N h_k, \quad i \notin I \\
f_\epsilon^{I_2 \cup \{i\}} &= (-1)^k \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_2} = (-1)^{k+1} \partial_{x_2} \psi_\epsilon \partial_{x_i} h^i \prod_{\substack{k=3 \\ i \neq j}}^N h_k, \quad i \notin I \\
f_\epsilon^{I_j \cup \{i\}} &= (-1)^k \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} = (-1)^{k+j-1} \psi_\epsilon \partial_{x_i} h_i \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \partial_{x_j} h_j \quad j = 3, \dots, N \text{ e } i \notin I \\
f^J &= 0, \quad \text{nos outros casos}
\end{aligned}$$

nós obtemos as seguintes propriedades:

1.  $d^* Z_\epsilon = 0$

Computando a derivada exterior de  $Z_\epsilon$  temos

$$d^* Z_\epsilon = - \sum_{j=1}^{q+1} \sum_{i \in I_j} \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} dx_i \vee dx_{I_j}$$

para  $dx_i \vee dx_I = dx_{I - \{i\}}$  e  $i \in I$ . Fixado  $j_0 \in I$  e  $k \in I_{j_0}$  temos

$$k < j_0 \Rightarrow \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} dx_i \vee dx_{I_j} = (-1)^{k-1} \partial_{x_k} Z_\epsilon^{I_j} dx_{I_j - \{i\}}$$

$$k > j_0 \Rightarrow \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} dx_i \vee dx_{I_j} = (-1)^{k-2} \partial_{x_k} Z_\epsilon^{I_j} dx_{I_j - \{i\}}$$

no qual  $I_j - \{i\} = \{1, 2, \dots, \check{i}, \dots, \check{j}, \dots, n\}$ . Agora, fixado  $j=k$  temos que

$$k < j_0 \Rightarrow \partial_{x_{j_0}} Z_\epsilon^{I_k} dx_{j_0} \vee dx_{I_k} = (-1)^{j_0-2} \partial_{x_{j_0}} Z_\epsilon^{I_k} dx_{I_k - \{j_0\}}$$

$$k > j_0 \Rightarrow \partial_{x_{j_0}} Z_\epsilon^{I_k} dx_{j_0} \vee dx_{I_k} = (-1)^{j_0-1} \partial_{x_k} Z_\epsilon^{I_k} dx_{I_k - \{j_0\}}$$

Assim,  $d^* Z_\epsilon = 0$  se

$$(-1)^{k-1} \partial_{x_k} Z_\epsilon^{I_{j_0}} + (-1)^{j_0-2} \partial_{x_{j_0}} Z_\epsilon^{I_k} = 0 \quad , k < j_0$$

$$(-1)^{k-2} \partial_{x_k} Z_\epsilon^{I_{j_0}} + (-1)^{j_0-1} \partial_{x_{j_0}} Z_\epsilon^{I_k} = 0 \quad , k > j_0$$

para  $j_0 \in I$ , o que é satisfeito.

2.  $dZ_\epsilon = f_\epsilon$

De fato,

$$\begin{aligned}
dZ_\epsilon &= \sum_{j=1}^{q+1} \sum_{i \notin I_j} \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} dx_i \wedge dx_{I_j} \\
&= \sum_{j=1}^{q+1} \partial_{x_j} Z_\epsilon^{I_j} dx_j \wedge dx_{I_j} + \sum_{i \notin I} \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} dx_i \wedge dx_{I_j} \\
&= \left( \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j-1} \partial_{x_j} Z_\epsilon^{I_j} \right) dx_I + (-1)^q \sum_{i \notin I} \left( \sum_{j=1}^{q+1} \partial_{x_i} Z_\epsilon^{I_j} dx_{I_j \cup \{i\}} \right) \\
&= f_\epsilon.
\end{aligned}$$

3.  $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$  independente de  $\epsilon$

A demonstração é análoga aos casos anteriores

Logo, calculando  $g_\epsilon \doteq \partial_{x_1} Z_\epsilon^{I_2}$  em norma  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , nós temos

$$\left\| \partial_{x_1 x_2}^2 \psi_\epsilon \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \prod_{j=3}^n \|h^j\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Note que  $\partial_{x_1 x_2}^2 \psi_\epsilon$  é estimada em norma  $L^1(\mathbb{R}^2)$  pela Afirmação 2 via (5.7). Dessa forma, a conclusão segue análoga a (5.11).

■

### 5.3 Contra exemplo do Teorema 3.3 quando $n=1$

Nesta seção nós iremos apresentar um contra exemplo para a desigualdade (3.4) quando  $n = 1$  e  $L = \partial x_1 + i \partial x_2$  é o campo elítico de Cauchy-Riemman em  $\mathbb{R}^2$ .

Em particular, queremos encontrar uma sequência  $u_\epsilon \in C_0^\infty(U)$ , para  $U$  uma vizinhança da origem, tal que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2} / \|Lu_\epsilon\|_{L^1} \rightarrow \infty \quad \text{quando } \epsilon \searrow 0.$$

Seja  $\psi \in C_0^\infty(B_0(1))$  uma função de corte satisfazendo  $\psi \equiv 1$  na  $B_0(1/3)$  e suportada na  $B_0(1/2)$  tal que para algum  $\delta > 0$  a função  $\psi_\delta(x) \doteq \psi(x\delta^{-1})$  esteja suportada em  $U$ . Consideremos

$$u_\varepsilon = \psi_\delta(\phi_\varepsilon * E)$$

no qual  $E(x) = \frac{1}{\pi(x_1 + ix_2)}$  é a solução fundamental de  $L$  e  $\phi_\varepsilon \doteq \varepsilon^{-2}\phi(x\varepsilon^{-1})$  é uma aproximação da identidade para  $\phi$  suportada na  $B_0(2)$ .

**Afirmção 1.**  $Lu_\varepsilon \in L^1$  independente de  $\varepsilon$  e  $\delta$ .

Computando  $Lu_\varepsilon$  temos

$$(Lu_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\delta}(L\psi)\left(\frac{x}{\delta}\right)(\phi_\varepsilon * E)(x) + \psi\left(\frac{x}{\delta}\right)\phi_\varepsilon(x).$$

Claramente  $\|\psi_\delta\phi_\varepsilon\|_{L^1} \leq \|\psi\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^1}$  e

$$\delta^{-1}\|(L\psi)_\delta(\phi_\varepsilon * E)\|_{L^1} \leq \delta^{-1}\|(L\psi)\|_{L^\infty}\|\phi_\varepsilon * E\|_{L^1(A)} \quad (5.12)$$

no qual  $A \doteq \text{supp}\{(L\psi)_\delta\} = A\left(0, \frac{3}{\delta}, \frac{2}{\delta}\right)$  é a coroa de centro 0, raio menor  $\frac{\delta}{3}$  e raio maior  $\frac{\delta}{2}$ . Agora,

$$|(E * \phi_\varepsilon)(x)| \lesssim \delta^{-1}\|\phi\|_{L^1}, \quad \forall x \in A \text{ e } \varepsilon \ll \delta,$$

posto que  $\sup_{\substack{x \in A \\ y \in B_0(2\varepsilon)}} \{|E(x-y)|\} \lesssim \delta^{-1}$ . Dessa forma

$$\|\phi_\varepsilon * E\|_{L^1(A)} \lesssim |A|\delta^{-1}\|\phi\|_{L^1} \lesssim \delta. \quad (5.13)$$

Substituindo a estimativa (5.13) em (5.12) nós obtemos

$$\delta^{-1}\|(L\psi)_\delta(\phi_\varepsilon * E)\|_{L^1} \lesssim \|(L\psi)\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^1}$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. ■

Para estimarmos  $u_\varepsilon$  em norma  $L^2$ , note que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2} \geq \|\phi_\varepsilon * E\|_{L^2(B_0(\delta/3))} = \left(\int_{B_0(\delta/3)} |I_\varepsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$



no qual

$$I_\epsilon(x) = \int_{B_0(2)} \phi_\epsilon(y) E(x-y) dy.$$

Nós concluimos a demonstração do contra exemplo uma vez que (repetindo os mesmos argumentos dos contra exemplos anteriores)

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_0(\delta/3)} |I_\epsilon(x)|^2 dx &\stackrel{\geq}{\underbrace{\quad}}_{0 < c_\delta < \delta} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c_\delta < |x| < \delta/3} |I_\epsilon(x)|^2 dx \\ &\stackrel{\geq}{\underbrace{\quad}}_{\text{Lema de Fatou}} \int_{c_\delta < |x| < \delta/3} \frac{1}{|x|^2} dx \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

quando  $c_\delta \rightarrow 0$ .

# Capítulo 6

## O Problema de Bourgain-Brezis

Dada  $\vec{f} \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ ,  $N \geq 3$ , consideremos  $\vec{u} = G * \vec{f}$  uma solução do sistema

$$-\Delta \vec{u} = \vec{f}. \quad (6.1)$$

Lembramos que aqui  $G(x) = c_N |x|^{2-N}$  é a solução fundamental invariante por rotações do operador de Laplace  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^N$ , que atuando sobre campos de vetores é definido componente a componente, isto é,  $\Delta \vec{u} = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_N)$ . Uma consequência direta da Proposição 1.1 é dada pelo seguinte resultado de Bourgain e Brezis em [BB2].

**Teorema 6.1** *Seja  $\vec{f} \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  e  $N \geq 3$ . Então o sistema (6.1) admite solução  $u \in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  com  $\nabla u \in L^{\frac{N}{N-1}}$ . Além disso vale*

$$\|\nabla u\|_{N/(N-1)} \leq C_N \|f\|_1. \quad (6.2)$$

Consequentemente (6.2), via o Teorema de Imersão de Sobolev, implica

$$\|u\|_{N/(N-2)} \leq C_N \|f\|_1.$$

O mesmo resultado é válido quando  $N = 2$  e  $G(x) = (2\pi)^{-1} \log |x|$ , donde

$$\|\nabla u\|_2 \leq c \|f\|_1. \quad (6.3)$$

Em vista das desigualdades (6.2) e (6.3), Bourgain e Brezis em [BB2] questionaram a validade da estimativa de segunda ordem

$$\|\nabla^2 \vec{u}\|_1 \leq C \|\vec{f}\|_1 \quad (\text{P3})$$

para  $\vec{u} = G * \vec{f}$  solução de (6.1) e  $\vec{f} \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ . Em geral, quando  $\vec{f} \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  a estimativa é falsa. Entretanto ela poderia ser válida sob a condição  $\text{div } \vec{f} = 0$ . Eles afirmam que a desigualdade é falsa, apresentando um contra exemplo no contexto de curvas retificáveis. Via os resultados de Smirnov em [S], a estimativa (P3) é equivalente à desigualdade

$$\|(-\Delta)^{-1}(\mathcal{H}_{\Gamma} \vec{t})\|_{W^{2,1}} < C, \quad (6.4)$$

no qual  $\Gamma$  é uma curva retificável fechada em  $\mathbb{R}^N$  de comprimento  $|\Gamma| = 1$ ,  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  é a medida 1-dimensional de Hausdorff sobre  $\Gamma$  e  $\vec{t}$  é o vetor unitário tangente a  $\Gamma$ . A desigualdade (6.4) está escrita na notação original do artigo [BB2] no qual  $(-\Delta)^{-1}(g) \doteq G * g$  e  $\|g\|_{W^{2,1}} \doteq \|\nabla^2 g\|_{L^1}$ . Quando  $N \geq 3$  a desigualdade (6.4) pode ser facilmente violada, como demonstrado por Bourgain e Brezis. Entretanto, o argumento falha quando  $N = 2$ . Uma demonstração direta também pode ser dada no contexto original. De fato, o sistema  $-\Delta \vec{u} = \vec{f}$  sob a hipótese  $\vec{f} \in L^1_{\sharp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , isto é,

$$\sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} f_j = 0,$$

pode ser relacionado com o sistema

$$\begin{cases} dZ &= f, \\ d^*Z &= 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

no qual  $Z$  é uma 1-forma definida por  $d^*u = Z$  e  $u, f$  são identificados como 2-formas pela associação

$$\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \longrightarrow \phi_3 dx_1 \wedge dx_2 - \phi_2 dx_1 \wedge dx_3 + \phi_1 dx_2 \wedge dx_3. \quad (6.6)$$

Então, a fim de violarmos a desigualdade (P3) é suficiente violarmos a estimativa

$$\|\nabla Z\|_1 \leq c \|f\|_1.$$

Mas este foi exatamente o conteúdo da Proposição 5.2 da Seção 5.2. Analogamente o mesmo argumento pode ser repetido em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , no qual a associação (6.6) é substituída pela operador  $*$  (estrela) de Hodge. A mesma técnica não pode se aplica quando  $N = 2$  (veja o comentário seguinte a demonstração da Proposição 5.2).

No caso particular bidimensional, Bourgain e Brezis produziram um contra exemplo, extremamente não trivial, utilizando uma sequência de curvas com uma estrutura multi escalar [BB2, pg 310]. No intuito de compreender o contra exemplo, surpreendentemente, nós encontramos uma falha na demonstração. Conseqüentemente, o contra exemplo apresentado não viola a estimativa (6.4).

Inicialmente, nós apresentaremos *uma diagonal* da demonstração de Bourgain e Brezis. A demonstração completa com um maior número de detalhes pode ser apreciada no artigo original.

**A curva.** Seja  $\Lambda_0$  o segmento de reta interligando os pontos  $(0,0)$  e  $(1,0)$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\Lambda$  a união de segmentos  $[(1,0), (1,-1)] \cup [(1,-1), (0,-1)] \cup [(0,-1), (0,0)]$  formando com  $\Lambda_0$  um quadrado de comprimento 1. Fixado  $R$  um inteiro suficientemente grande, consideremos  $\Lambda_1$  uma perturbação de  $\Lambda_0$  formado por  $n_1$  serras com inclinação  $1/\sqrt{R}$ , como na figura 6.1. Agora, para cada segmento em  $\Lambda_1$ , denotado simplesmente por  $I$ , consideremos

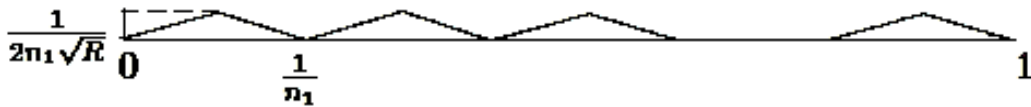


Figura 6.1: perturbação de  $\Lambda_0$  por  $n_1$  serras

uma perturbação formada por  $n_2$  serras com a mesma inclinação  $1/\sqrt{R}$  (veja a figura 6.2) resultando numa poligonal  $\Lambda_2$  de  $2^2 n_1 n_2$  segmentos. Assim para cada  $s$  natural nós obtemos uma poligonal  $\Lambda_s$  constituída por  $b_s = 2^s n_1 \dots n_s$  segmentos, no qual cada segmento em  $\Lambda_{s-1}$  é substituído por  $n_s$  serras de inclinação  $1/\sqrt{R}$ . Denotamos cada segmento em  $\Lambda_s$  por  $I_{s,\alpha}$ . Neste processo consideremos a curva multi escalar definida por  $\Gamma_R = \Lambda_R \cup \Lambda$  que será denotada simplesmente por  $\Gamma$ , ou seja, omitiremos o parâmetro  $R$ .

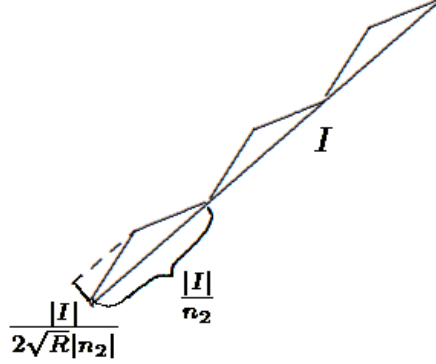


Figura 6.2: perturbação de  $I$  por  $n_2$  serras

Claramente

$$\begin{aligned}
|\Lambda_1| &= 2n_1 \sqrt{\left(\frac{1}{2n_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n_1\sqrt{R}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{R}}, \\
|\Lambda_2| &= 2n_1 \left( 2n_2 \sqrt{\left(\frac{|I|}{2n_1}\right)^2 + \left(\frac{|I|}{2n_1\sqrt{R}}\right)^2} \right) = \\
&= 2n_1 |I| \sqrt{1 + \frac{1}{R}} = |\Lambda_1| \sqrt{1 + \frac{1}{R}} = \left(1 + \frac{1}{R}\right), \\
|\Lambda_R| &= \left(1 + \frac{1}{R}\right)^{\frac{R}{2}} < e
\end{aligned}$$

e portanto  $|\Gamma| < \infty$  independente de  $R$ . Uma hipótese adicional é que tomaremos  $n_1 \ll n_2 \ll \dots \ll n_R$ , uma sequência de naturais bem lacunar. Nestas condições, Bourgain e Brezis afirmam que

$$\|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)} \gtrsim \sqrt{R}, \quad (6.7)$$

o que é suficiente para violar a desigualdade (6.4).

**A demonstração de (6.7).** A estratégia é considerar regiões de integração perto da curva  $\Lambda_R$ . Dessa forma, é definida uma família de regiões disjuntas  $\Omega_s$  por

$$\Omega_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{10^{-3}}{2n_{s+1}b_s} < \text{dist}(x, \Lambda_s) < \frac{10^{-3}}{n_{s+1}b_s} \right\}$$

para  $s = 1, \dots, R$  e  $\Omega_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{10^{-3}}{2n_1} < \text{dist}(x, \Lambda_0) < \frac{10^{-3}}{n_1} \right\}$ . Num certo sentido, as regiões  $\Omega_0, \dots, \Omega_{R-1}$  abrigam as curvas  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{R-1}$  e claramente

$$\|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)} \geq \sum_{s=1}^R \|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\Omega_s)}.$$

Agora, fixado  $s$ , considere  $\Omega_{s,\alpha}$  sub-regiões retangulares em  $\Omega_s$  paralelas a  $I_{s,\alpha}$  cujas

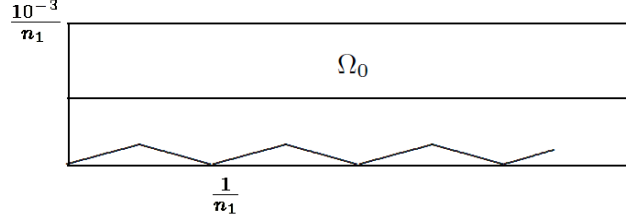


Figura 6.3: O conjunto  $\Omega_0$

dimensões são  $|I_{s,\alpha}|$  para o comprimento e  $1/n_{s+1}b_s$  para a altura. Em seguida considere sub-retângulos menores  $\Omega'_{s,\alpha}$  em  $\Omega_{s,\alpha}$  com comprimento  $\frac{1}{2}|I_{s,\alpha}|$  e mesma altura, cujo centro esteja alinhado ao ponto médio  $c_{s,\alpha}$  do segmento em  $I_{s,\alpha}$ , como mostrado na figura 6.4. Claramente,

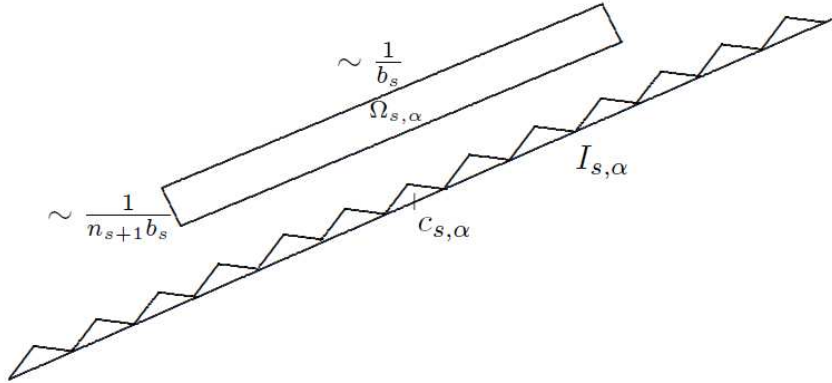


Figura 6.4: O conjunto  $\Omega'_{s,\alpha}$

$$\|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\Omega_s)} \geq \sum_{\alpha=1}^{b_s} \|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\Omega'_{s,\alpha})}. \quad (6.8)$$

O próximo passo é estimar  $(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})$  no conjunto  $\Omega'_{s,\alpha}$  para cada  $\alpha$  fixado. Seja  $B_{s,\alpha}$  a bola de centro  $c_{s,\alpha}$  e raio  $\frac{1}{2}|I_{s,\alpha}|$ . Logo, se  $x \in \Omega'_{s,\alpha}$  então

$$|\partial^2(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R \setminus B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})(x)| \lesssim \left\| \partial^2 \left( \log \frac{1}{|x|} \right) \right\|_{L^\infty\{|x| > \frac{1}{4}|I_{s,\alpha}|\}} \lesssim b_s^2$$

o que implica

$$\|\partial^2(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R \setminus B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})\|_{L^1(\Omega'_{s,\alpha})} \lesssim \frac{1}{n_{s+1}}.$$

Logo,

$$\sum_{s=1}^R \sum_{\alpha=1}^{b_s} \left\| \partial^2 (-\Delta)^{-1} (H_{\Lambda_R \setminus B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t}) \right\|_{L^1(\Omega'_{s,\alpha})} \leq 1$$

desde que

$$\frac{b_s}{n_{s+1}} < \frac{1}{R}. \quad (6.9)$$

Já o termo  $(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})$  pode ser aproximado por  $(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_{s+1} \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})$  uma vez que

$$\left\| \partial^2 (-\Delta)^{-1} [(H_{\Lambda_R \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t}) - (H_{\Lambda_{s+1} \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})] \right\|_{L^1(\Omega'_{s,\alpha})} \leq \frac{n_{s+1}}{b_s n_{s+2}}$$

e impondo que

$$\frac{n_{s+1}}{n_{s+2}} < \frac{1}{R}. \quad (6.10)$$

conclui-se

$$\sum_{s=1}^R \sum_{\alpha=1}^{b_s} \left\| \partial^2 (-\Delta)^{-1} [(H_{\Lambda_R \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t}) - (H_{\Lambda_{s+1} \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})] \right\|_{L^1(\Omega'_{s,\alpha})} \leq 1.$$

Enfim, sob as escolhas (6.9) e (6.10), o termo  $\|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_R} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\Omega'_{s,\alpha})}$  em (6.8) pode ser substituído por

$$\|(-\Delta)^{-1}(H_{\Lambda_{s+1} \cap B_{s,\alpha}} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\Omega'_{s,\alpha})},$$

que após uma homotetia de razão  $b_s$  é equivalente a

$$\frac{1}{b_s} \|(-\Delta)^{-1}(H_{\Sigma} \cdot \vec{t})\|_{W^{2,1}(\Gamma_s)}, \quad (6.11)$$

no qual  $\Sigma$  é uma perturbação de  $\Lambda_0$  por  $n_{s+1}$  serras com inclinação  $1/\sqrt{R}$  e

$\Gamma_s = [1/4, 3/4] \times [10^{-3}/2n_{s+1}, 10^{-3}/n_{s+1}]$  ( veja a figura 6.5 para um esboço). Consideremos a componente  $t_y$  de  $\vec{t} = (t_x, t_y)$  em (6.11) dada por

$$t_y \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \text{sign}(\sin 2\pi n_{s+1} x) \quad (6.12)$$

e a contribuição

$$\frac{1}{b_s \sqrt{R}} \left\| \partial_{xy}^2 (-\Delta)^{-1} [\text{sign}(\sin 2\pi n_{s+1} x) H_{\Sigma}] \right\|_{L^1(\Gamma_s)}. \quad (6.13)$$

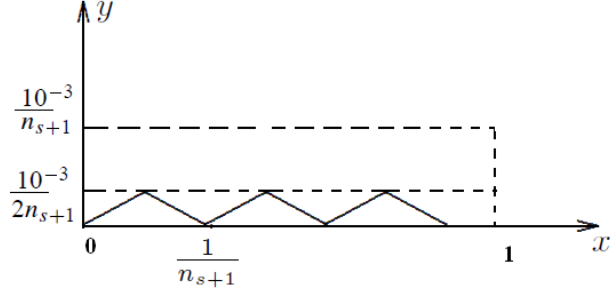


Figura 6.5: A curva  $\Sigma$

O ponto crucial da demonstração está em afirmar que

$$(6.13) \geq \frac{1}{b_s \sqrt{R}}. \quad (6.14)$$

Assumindo (6.14) segue que

$$\sum_{s=1}^R \sum_{\alpha=1}^{b_s} \frac{1}{b_s} \|\partial_{xy}^2 (-\Delta)^{-1} (H_\Sigma \cdot \vec{t})\|_{L^1(\Gamma_s)} \geq \sum_{s=1}^R \frac{c}{\sqrt{R}} = c\sqrt{R}, \quad (6.15)$$

o que implica (6.7). Agora, todo o trabalho está em justificar a desigualdade (6.14). A argumentação é dada da seguinte forma: substituindo  $H_\Sigma$  por  $|\Sigma|H_{[0,1]} \vec{e}_1$  obtem-se

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{xy}^2 (-\Delta)^{-1} [\text{sign}(\sin 2\pi n_{s+1} x) H_\Sigma] \right\|_{L^1(\Gamma_s)} \\ &= |\Sigma| \left\| \partial_{xy}^2 (-\Delta)^{-1} [\text{sign}(\sin 2\pi n_{s+1} x) H_{[0,1]} \vec{e}_1] \right\|_{L^1(\Gamma_s)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$+ O \left\{ \frac{1}{n_{s+1} \sqrt{R}} \left\| \partial_y \left[ \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right\|_{L^1(|y| > 10^{-3}/3n_{s+1})} \right\}, \quad (6.17)$$

no qual (6.17)  $\lesssim \frac{1}{\sqrt{R}}$  e (6.16) é equivalente a

$$\left\| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} (-1)^j \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} \gtrsim 1 \quad (6.18)$$

isto é, o lado esquerdo de (6.18) é limitada inferiormente por uma constante que independe de  $s$  e  $R$ . A desigualdade acima é nomeada como estimativa (22) na demonstração original de Bourgain e Brezis. Em vista da argumentação acima, temos que (6.18) implica (6.14) que consequentemente implica (6.7).



Uma vez apresentado um breve resumo da construção do contra exemplo dado por Bougain e Brezis, nós faremos as seguintes afirmações:

**Proposição 6.1** *São elas:*

(i) *A desigualdade (6.18) não é válida. Mais precisamente,*

$$\left\| \sum_{j=1}^{2n_s+1} (-1)^j \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_s+1}\right)^2 + y^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Note que (i) não invalida a estrutura da demonstração, desde que de alguma forma seja justificado (6.15). Disto segue a segunda parte da proposição

(ii) *A desigualdade (6.15) não é válida. Mais precisamente, existe uma constante universal  $c > 0$  tal que*

$$\sum_{s=1}^R \sum_{\alpha=1}^{b_s} \frac{1}{b_s} \left\| \partial_{xy}^2 (-\Delta)^{-1} (H_\Sigma \cdot \vec{t}) \right\|_{L^1(\Gamma_s)} < c.$$

Na próxima seção nós apresentaremos a prova da Proposição 6.1. Basicamente nós destacamos a reutilização da condição adicional (6.10), a qual implica que, para cada  $\alpha$  fixado, os conjuntos  $\Omega'_{s,\alpha}$  possuem uma contribuição essencial em cada segmento de  $\Lambda_{s+1}$ . Desde já nós adiantamos que não obtivemos um contra exemplo para o problema de Bourgain e Brezis.

## 6.1 Demonstração da Proposição 6.1

Inicialmente vamos demonstrar a primeira parte da proposição.

**Demonstração de (i).** Pela desigualdade triangular, nós podemos estimar o lado esquerdo de (6.18) simplesmente por

$$\int_{\Gamma_s} \left| \sum_{j=1}^{2n_s+1} (-1)^j \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_s+1}\right)^2 + y^2} \right| dx dy \leq \sum_{j=1}^{2n_s+1} \int_{\Gamma_s} \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_s+1}\right)^2 + y^2} dx dy.$$

Aqui de certa forma estamos desprezando alguns cancelamentos do integrando original.

Para cada  $j$  fixo temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_s} \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{2n_{s+1}} \int_{2n_{s+1}\Gamma_s} \frac{y}{(x-j)^2 + y^2} dx dy \\ & = \frac{1}{4n_{s+1}} \underbrace{\int_{n_{s+1}/2}^{3n_{s+1}/2} \ln [(x-j)^2 + 4(10^{-6})] dx}_{a_j} - \frac{1}{4n_{s+1}} \underbrace{\int_{n_{s+1}/2}^{3n_{s+1}/2} \ln [(x-j)^2 + 10^{-6}] dx}_{b_j} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} (4n_{s+1})a_j &= \left(\frac{3n_{s+1}}{2} - j\right) \ln \left[ \left(\frac{3n_{s+1}}{2} - j\right)^2 + 4(10^{-6}) \right] \\ &+ 4(10^{-3}) \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) - \left(\frac{n_{s+1}}{2} - j\right) \ln \left[ \left(\frac{n_{s+1}}{2} - j\right)^2 + 4(10^{-6}) \right] \\ &\quad - 4(10^{-3}) \arctan \left( \frac{\frac{n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (4n_{s+1})b_j &= \left(\frac{3n_{s+1}}{2} - j\right) \ln \left[ \left(\frac{3n_{s+1}}{2} - j\right)^2 + 10^{-6} \right] \\ &+ 2(10^{-3}) \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{10^{-3}} \right) - \left(\frac{n_{s+1}}{2} - j\right) \ln \left[ \left(\frac{n_{s+1}}{2} - j\right)^2 + 10^{-6} \right] \\ &\quad - 2(10^{-3}) \arctan \left( \frac{\frac{n_{s+1}}{2} - j}{10^{-3}} \right). \end{aligned}$$

Agora, somando em  $j$  nós obtemos a expressão

$$\begin{aligned} 4n_{s+1} \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} a_j - b_j &= \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left(\frac{3n_{s+1}}{2} - j\right) \ln \left[ 1 + \frac{3(10^{-6})}{\left(\frac{3n_{s+1}}{2} - j\right)^2 + 4(10^{-6})} \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left(\frac{n_{s+1}}{2} - j\right) \ln \left[ 1 + \frac{3(10^{-6})}{\left(\frac{n_{s+1}}{2} - j\right)^2 + 4(10^{-6})} \right] \\ &\quad + 2(10^{-3}) \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left[ 2 \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) - \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{10^{-3}} \right) \right] \\ &\quad - 2(10^{-3}) \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left[ 2 \arctan \left( \frac{\frac{n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) - \arctan \left( \frac{\frac{n_{s+1}}{2} - j}{10^{-3}} \right) \right]. \end{aligned}$$

O próximo lema remete a algumas observações úteis para o controle dos termos acima.

**Lema 6.1** *Sejam  $a, b > 0$ .*

$$(i) \quad t \ln \left( 1 + \frac{b}{t^2 + a} \right) \leq c_1 \frac{1}{t} \text{ para } t > 0 \text{ suficientemente grande.}$$

$$(ii) \quad t \ln \left( 1 + \frac{b}{t^2 + a} \right) \leq c_2 \text{ para todo } t > 0.$$

$$(iii) \quad \left| \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{x} \text{ para } x > 0.$$

**Demonstração do Lema 6.1:** A fim de concluirmos o item (i) é suficiente demonstrarmos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = c < \infty$ , uma vez que o limite original é obtido pela mudança de variáveis  $x = 1/t$ . Com efeito o limite segue pelo Teorema de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Analogamente nós obtemos  $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln \left( 1 + \frac{b}{t^2 + a} \right) = 0$ . Conseqüentemente, de posse dessas duas observações, segue o item (ii) uma vez que a função em questão é contínua e portanto limitada em um intervalo  $[\epsilon, M]$  para  $\epsilon$  pequeno e  $M$  suficientemente grande. O item (iii) é obtido, posto que para  $x > 0$  vale a estimativa

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \int_x^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x}.$$

■

Uma vez que impomos a condição adicional (6.10) sobre a sequência lacunar

$\{n_1, \dots, n_s, \dots, n_R\}$ , isto é,  $\frac{n_{s+1}}{n_{s+2}} < \frac{1}{R} \doteq m^2$ , então

$$\frac{1}{n_{s+1}} < n_1 m^{2s}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (6.19)$$

o que demonstra  $n_{s+1}$  suficientemente grande quando  $m$  tende a zero (ou  $R$  grande). Para cada  $s$  fixo, definimos o conjunto de índices

$$J(\lambda) = \left\{ j \in \{1, \dots, 2n_{s+1}\} / \left| \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right| \leq \lambda \right\}.$$

Segue do item (ii) do Lema 6.1 e do fato que  $\#J(\lambda) \approx \lambda$  a estimativa

$$\sum_{j \in J(\lambda)} \left| \left( \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right) \ln \left( 1 + \frac{3(10^{-6})}{\left( \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right)^2 + 4(10^{-6})} \right) \right| \leq \sum_{j \in J(\lambda)} c_2 \leq c\lambda.$$

Por outro lado, pelo item (i) nós temos

$$\sum_{j \notin J(\lambda)} \left| \left( \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right) \ln \left( 1 + \frac{3(10^{-6})}{\left( \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right)^2 + 4(10^{-6})} \right) \right| \leq \sum_{j \notin J(\lambda)} \frac{c_1}{\left| \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right|}$$

e além disso

$$\sum_{j \notin J(\lambda)} \frac{c_1}{\left| \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right|} \leq 2c_1 \frac{n_{s+1}}{\lambda}.$$

Escolhendo  $\lambda = 1/m$  concluímos

$$\frac{1}{4n_{s+1}} \left| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left( \frac{n_{s+1}}{2} - j \right) \ln \left( 1 + \frac{3(10^{-6})}{\left( \frac{n_{s+1}}{2} - j \right)^2 + 4(10^{-6})} \right) \right| \leq \frac{c}{4} \frac{1}{n_{s+1}m} + \frac{c_1}{2} m \leq \tilde{c}m,$$

no qual a ultima desigualdade decorre de (6.19). O mesmo argumento vale para estimar-mos

$$\frac{1}{4n_{s+1}} \left| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left( \frac{n_{s+1}}{2} - j \right) \ln \left( 1 + \frac{3(10^{-6})}{\left( \frac{n_{s+1}}{2} - j \right)^2 + 4(10^{-6})} \right) \right|.$$

Para a mesma escolha de  $\lambda$  temos

$$\frac{1}{4n_{s+1}} \sum_{j \in J(\lambda)} \left| \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{4n_{s+1}} \sum_{j \in J(\lambda)} \pi \leq c_4 \frac{1}{n_{s+1}m},$$

enquanto que pelo item (iii) do Lema 6.1 segue

$$\frac{1}{4n_{s+1}} \sum_{j \notin J(\lambda)} \left| \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{4n_{s+1}} \sum_{j \notin J(\lambda)} \frac{2(10^{-3})}{\left| \frac{3n_{s+1}}{2} - j \right|} \leq c_5 m.$$

Logo,

$$\frac{1}{4n_{s+1}} \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left| \arctan \left( \frac{\frac{3n_{s+1}}{2} - j}{2(10^{-3})} \right) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \tilde{c} m.$$

Em vista das estimativas acima, nós concluímos

$$\frac{1}{4n_{s+1}} \left| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} a_j - b_j \right| \leq \tilde{c} m$$

e assim

$$\left\| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} (-1)^j \frac{y}{\left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right)^2 + y^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} \leq \tilde{c} m.$$

■

Claramente quando  $m$  é suficientemente pequeno, isto é,  $R$  suficientemente grande, contradizemos a estimativa (6.18).

Agora vamos nos dirigir a segunda parte da proposição. Observemos inicialmente que na estratégia de Bourgain e Brezis, apenas foi computado a contribuição de  $t_y$  em

$$\|\partial_{xy}^2(-\Delta)^{-1}(H_\Sigma \cdot \vec{t})\|_{L^1(\Gamma_s)}. \quad (6.20)$$

Note que  $t_y$  dada em (6.12) é uma aproximação da componente original. Logo, uma parametrização exata de  $\Sigma$  e das componentes  $t_x$  e  $t_y$  se faz necessária para estimarmos (6.20).

**Observação 6.1** *Analogamente, nós podemos computar os termos*

$$\partial_{xx}^2(-\Delta)^{-1}(H_\Sigma \cdot \vec{t}) \text{ e } \partial_{yy}^2(-\Delta)^{-1}(H_\Sigma \cdot \vec{t}).$$

*Com efeito, aplicando a mudança de coordenadas*

$$\begin{cases} x &= x' - y', \\ y &= x' + y', \end{cases}$$

*nós obtemos*

$$\begin{cases} \partial_{xx}^2(-\Delta_{(x,y)})^{-1} &= (-2)\partial_{x'y'}^2(-\Delta_{(x',y')})^{-1}, \\ \partial_{yy}^2(-\Delta_{(x,y)})^{-1} &= (+2)\partial_{x'y'}^2(-\Delta_{(x',y')})^{-1}. \end{cases}$$

*Aqui denotamos por  $\Delta_{(x,y)}$  o operador de Laplace referente ao sistema de coordenadas  $(x, y)$ ; analogamente para  $\Delta_{(x',y')}$ .*

Seja  $h_\Sigma(x, y) = (h_\Sigma^1(x, y), h_\Sigma^2(x, y))$  definida por

$$h_\Sigma^i(x, y) = \int_0^1 \Sigma_i(t)' \frac{(x - \Sigma_1(t))(y - \Sigma_2(t))}{[(x - \Sigma_1(t))^2 + (y - \Sigma_2(t))]^2} dt, \quad i = 1, 2, \quad (6.21)$$

no qual  $\Sigma(t) = (\Sigma_1(t), \Sigma_2(t))$  é uma parametrização de  $\Sigma$  no intervalo  $[0, 1]$  (note que  $h_{\Sigma}^i(x, y)$  é invariante por parametrizações de  $\Sigma$ ). Cada segmento de  $\Sigma$  pode ser parametrizado da forma  $f_j(t) = (t, \gamma_j(t))$  no qual

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} m \left( t - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) & , j \text{ par} \\ -m \left( t - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) & , j \text{ ímpar} \end{cases}$$

definidos em  $\left[ \frac{j}{2n_{s+1}}, \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right]$  e  $j = 0, \dots, (2n_{s+1} - 1)$ .

Inicialmente vamos nos concentrar no caso  $i = 2$  em (6.21). Logo,

$$\begin{aligned} h_{\Sigma}^2(x, y) &= m \sum_{j \text{ par}} \int_{\frac{j}{2n_{s+1}}}^{\frac{j+1}{2n_{s+1}}} \frac{[x-t] \left[ y - m \left( t - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) \right]}{\left[ [x-t]^2 + \left[ y - m \left( t - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) \right]^2 \right]^2} dt \\ &\quad - m \sum_{j \text{ ímpar}} \int_{\frac{j}{2n_{s+1}}}^{\frac{j+1}{2n_{s+1}}} \frac{[x-t] \left[ y + m \left( t - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) \right]}{\left[ [x-t]^2 + \left[ y + m \left( t - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) \right]^2 \right]^2} dt \end{aligned}$$

e uma vez que

$$\int \frac{(x-t)(y-mt)}{[(x-t)^2 + (y-mt)^2]^2} dt = \frac{1}{2(m^2+1)} \left( \frac{-2mt + mx + y}{(x-t)^2 + (y-mt)^2} \right) \quad (6.22)$$

segue

$$\begin{aligned} h_{\Sigma}^2(x, y) &= \sum_{j \text{ par}} \frac{m}{2(m^2+1)} \left( \frac{-2mt + m \left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} - t \right)^2 + (y-mt)^2} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\frac{1}{2n_{s+1}}} \\ &\quad - \sum_{j \text{ ímpar}} \frac{m}{2(m^2+1)} \left( \frac{+2mt - m \left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} - t \right)^2 + (y+mt)^2} \right) \Bigg|_{t=-\frac{1}{2n_{s+1}}}^{t=0} \\ &= \sum_{j \text{ par}} \frac{m}{2(m^2+1)} \left[ \frac{m \left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) + \left( y - \frac{m}{2n_{s+1}} \right)}{\left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right)^2 + \left( y - \frac{m}{2n_{s+1}} \right)^2} - \frac{m \left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right)^2 + y^2} \right] \\ &\quad - \sum_{j \text{ ímpar}} \frac{m}{2(m^2+1)} \left[ \frac{-m \left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right)^2 + y^2} - \frac{-m \left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) + \left( y - \frac{m}{2n_{s+1}} \right)}{\left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right)^2 + \left( y - \frac{m}{2n_{s+1}} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m^2}{2(m^2+1)} \left[ \sum_{j \text{ par}} \frac{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \text{ impar}} \frac{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} - \frac{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} \right] + \\
&\quad + \frac{m}{2(m^2+1)} \left[ \sum_{j \text{ par}} \frac{\left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \text{ impar}} \frac{\left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{y}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right].
\end{aligned}$$

Após os cancelamentos sob os termos da forma  $m^2/(m^2+1)$  e reagrupando os termos de fator  $m/(m^2+1)$ , simplificamos substancialmente a identidade acima para

$$\begin{aligned}
h_{\Sigma}^2(x, y) &= \frac{m^2}{2(m^2+1)} \left[ \frac{(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right] + \\
&\quad - \frac{m}{2(m^2+1)} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} \right] + \\
&\quad \frac{m}{(m^2+1)} \left[ \sum_{j=1}^{2n_{s+1}-1} \frac{y - \frac{m}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \sum_{j=2}^{2n_{s+1}-2} \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right].
\end{aligned}$$

Claramente

$$\lim_{m \rightarrow 0} h_{\Sigma}^2(x, y) = 0 \quad q.t.p.$$

o que geometricamente é esperado. O próximo resultado nos diz a respeito com qual velocidade este limite vai a zero em norma  $L^1(\Gamma_s)$ .

**Proposição 6.2**  $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \|h_{\Sigma}^2(x, y)\|_{L^1(\Gamma_s)} < \infty$ .

**Demonstração da Proposição 6.2.** Claramente,

$$\begin{aligned}
|h_{\Sigma}^2(x, y)| &\leq \frac{m^2}{2(m^2+1)} \left| \frac{(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right| \\
&\quad + \frac{m}{(m^2+1)} \left| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right| \\
&\quad + \frac{m}{(m^2+1)} \left| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \frac{y - \frac{m}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} \right|.
\end{aligned}$$

Segue dos argumentos do item (i) anterior que

$$\left\| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} \lesssim m \quad (6.23)$$

e portanto

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \frac{m}{(m^2 + 1)} \left\| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} < \infty.$$

Analogamente a estimativa (6.23) pode ser considerada para o termo

$$\sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \frac{y - \frac{m}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2},$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \frac{y - \frac{m}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} dx dy &= \frac{1}{2n_{s+1}} \int_{2n_{s+1}\Gamma_s} \frac{y - m}{(x - j)^2 + (y - m)^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2n_{s+1}} \int_{\frac{n_{s+1}}{2}}^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \int_{\frac{1}{10^3} - m}^{\frac{2}{10^3} - m} \frac{y}{(x - j)^2 + y^2} dx dy \\ &\leq \frac{1}{2n_{s+1}} \int_{\frac{n_{s+1}}{2}}^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \int_{\frac{1}{2 \cdot 10^3}}^{\frac{2}{10^3}} \frac{y}{(x - j)^2 + y^2} dx dy, \end{aligned}$$

para  $m$  suficientemente pequeno. Logo,

$$\sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \left| \frac{1}{2n_{s+1}} \int_{\frac{n_{s+1}}{2}}^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \int_{\frac{1}{2 \cdot 10^3}}^{\frac{2}{10^3}} \frac{y}{(x - j)^2 + y^2} dx dy \right| \lesssim m$$

e assim

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \frac{m}{(m^2 + 1)} \left\| \sum_{j=1}^{2n_{s+1}} \frac{y - \frac{m}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} < \infty.$$

A demonstração está concluída posto que

$$\left\| \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right\|_{L^1(\Gamma_s)} < \infty$$

independente de  $s$ . ■



Em outras palavras, a Proposição 6.2 nos mostra que para  $m$  suficientemente pequeno  $\|h_{\Sigma}^2(x, y)\|_{L^1(\Gamma_s)} \lesssim m^2$ .

A mesma técnica pode ser aplicada para estimar o termo  $i = 1$  em (6.21). Em especial, neste caso, faremos uso da relação (6.19). Todo o cálculo para  $h_{\Sigma}^1(x, y)$  é apresentado na Seção A.1 do Apêndice. Enfim, segue da Proposição 6.2 e da Proposição A.1 que

$$\sum_{s=1}^R \sum_{\alpha=1}^{b_s} \frac{1}{b_s} \|\partial_{xy}^2 (-\Delta)^{-1} (H_{\Sigma} \cdot \vec{t})\|_{L^1(\Gamma_s)} \lesssim \sum_{s=1}^R \sum_{\alpha=1}^{b_s} \frac{1}{b_s} m^2 \lesssim Rm^2 \lesssim 1,$$

lembrando que  $m = 1/\sqrt{R}$  o que conclui a demonstração do item (ii) da Proposição.

# Apêndice A

## Adicionais

### A.1 O cálculo para $h_{\Sigma}^1$

Pela definição (6.21) explicitamente escrevemos

$$\begin{aligned}
 h_{\Sigma}^1(x, y) &= \sum_{j \text{ par}} \int_{\frac{j}{2n_{s+1}}}^{\frac{j+1}{2n_{s+1}}} \frac{[x-t] \left[ y - m \left( t - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) \right]}{\left[ [x-t]^2 + \left[ y - m \left( t - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) \right]^2 \right]^2} dt \\
 &+ \sum_{j \text{ impar}} \int_{\frac{j}{2n_{s+1}}}^{\frac{j+1}{2n_{s+1}}} \frac{[x-t] \left[ y + m \left( t - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) \right]}{\left[ [x-t]^2 + \left[ y + m \left( t - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) \right]^2 \right]^2} dt.
 \end{aligned}$$

Aplicando a Fórmula (6.22) temos

$$\begin{aligned}
 h_{\Sigma}^1(x, y) &= \sum_{j \text{ par}} \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left( \frac{-2mt + m \left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} - t \right)^2 + (y - mt)^2} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\frac{1}{2n_{s+1}}} \\
 &+ \sum_{j \text{ impar}} \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left( \frac{+2mt - m \left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} - t \right)^2 + (y + mt)^2} \right) \Bigg|_{t=-\frac{1}{2n_{s+1}}}^{t=0} \\
 &= \sum_{j \text{ par}} \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left[ \frac{m \left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right) + \left( y - \frac{m}{2n_{s+1}} \right)}{\left( x - \frac{j+1}{2n_{s+1}} \right)^2 + \left( y - \frac{m}{2n_{s+1}} \right)^2} - \frac{m \left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right) + y}{\left( x - \frac{j}{2n_{s+1}} \right)^2 + y^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j \text{ impar}} \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left[ \frac{-m \left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right) + y}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} - \frac{-m \left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right) + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} \right] \\
& = \frac{m}{2(m^2 + 1)} \left[ \sum_{j \text{ par}} \frac{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j \text{ impar}} \frac{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right] \\
& \quad + \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left[ \sum_{j \text{ par}} \frac{\left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{y}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right. \\
& \quad \left. \sum_{j \text{ impar}} \frac{y}{\left(x - \frac{j+1}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} - \frac{\left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} \right]
\end{aligned}$$

Simplificando o calculo acima com os cancelamentos nos termos de fator  $1/(m^2 + 1)$  e somando os termos de fator  $m/(m^2 + 1)$  segue que

$$\begin{aligned}
h_{\Sigma}^1(x, y) & = \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left[ \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right] + \\
& \quad - \frac{m}{2(m^2 + 1)} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right] + \\
& \quad \frac{m}{(m^2 + 1)} \left[ \sum_{j=1}^{2n_{s+1}-1} \frac{x - \frac{j}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \sum_{j=2}^{2n_{s+1}-2} \frac{x - \frac{j}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right].
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\lim_{m \rightarrow 0} h_{\Sigma}^1(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right] = h_{[0,1] \cdot \vec{e}_1}^1(x, y) \quad q.t.p.,$$

no qual  $[0, 1] \cdot \vec{e}_1$  é a poligonal  $\Lambda_0$  definida anteriormente.

**Lema A.1**  $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \|h_{[0,1] \cdot \vec{e}_1}^1\|_{L^1(\Gamma_s)} < \infty$ .

**Demonstração do Lema A.1.** Pela desigualdade triangular

$$\|h_{[0,1] \cdot \vec{e}_1}^1\|_{L^1(\Gamma_s)} \leq \int_{\Gamma_s} \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy + \int_{\Gamma_s} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx dy.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy &= \frac{1}{2n_{s+1}} \int_{\frac{n_{s+1}}{2}}^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx \\ &= \frac{1}{4n_{s+1}} \int_{\frac{n_{s+1}}{2}}^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \ln[x^2 + 4 \cdot 10^{-6}] - \ln[x^2 + 10^{-6}] dx, \end{aligned}$$

no qual a primitiva é dada por

$$\begin{aligned} &\frac{3}{8} \ln \left[ 1 + \frac{3 \cdot 10^{-6}}{\left(\frac{3n_{s+1}}{2}\right)^2 + 10^{-6}} \right] - \frac{1}{8} \ln \left[ 1 + \frac{3 \cdot 10^{-6}}{\left(\frac{n_{s+1}}{2}\right)^2 + 10^{-6}} \right] \\ &+ \frac{10^{-3}}{n_{s+1}} \left[ \arctan \left( \frac{3n_{s+1}}{4 \cdot 10^{-3}} \right) - \arctan \left( \frac{n_{s+1}}{4 \cdot 10^{-3}} \right) \right] \\ &+ \frac{10^{-3}}{2n_{s+1}} \left[ \arctan \left( \frac{3n_{s+1}}{2 \cdot 10^{-3}} \right) - \arctan \left( \frac{n_{s+1}}{2 \cdot 10^{-3}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 6.1 e a desigualdade (6.19), nós concluímos o lema uma vez que

$$\int_{\Gamma_s} \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy \lesssim \frac{1}{n_{s+1}^2} \lesssim m^{4s}$$

e

$$\int_{\Gamma_s} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx dy \lesssim m^{4s}.$$

■

Agora, vamos estender a mesma propriedade para  $h_{\Sigma}^1$ .

**Proposição A.1**  $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \|h_{\Sigma}^1\|_{L^1(\Gamma_s)} < \infty$

**Demonstração da Proposição A.1.** Sem perda de generalidade podemos escrever

$$\begin{aligned} h_{\Sigma}^1(x, y) &\approx \frac{1}{2(m^2 + 1)} \left[ \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \\ &+ \frac{m}{(m^2 + 1)} \left[ \sum_{j=0}^{2n_{s+1}} \frac{x - \frac{j}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{x - \frac{j}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right], \end{aligned}$$

já que cada parcela adicionada ou removida pertence a  $O(m^2)$ . Pelo Lema anterior, nós não precisamos nos preocupar com a primeira parcela do lado direito. Agora, fixado  $j$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \left| \frac{x - \frac{j}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2n_{s+1}}\right)^2} - \frac{x - \frac{j}{2n_{s+1}}}{\left(x - \frac{j}{2n_{s+1}}\right)^2 + y^2} \right| dx dy &= \\ \frac{m}{2n_{s+1}} \int_{\frac{n_{s+1}}{2} - j}^{\frac{3n_{s+1}}{2} - j} \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{|x| |2y - m|}{[x^2 + (y - m)^2][x^2 + y^2]} dx dy &\leq \\ \frac{m}{2n_{s+1}} \int_{-\frac{3n_{s+1}}{2}}^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{|x|(2y - m)}{[x^2 + (y - m)^2]^2} dx dy &= \\ \frac{m}{n_{s+1}} \int_0^{\frac{3n_{s+1}}{2}} \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{x(2y - m)}{[x^2 + (y - m)^2]^2} dx dy, \end{aligned}$$

já que podemos assumir  $m$  suficientemente pequeno tal que  $10^{-3} > m$  e  $\frac{-3n_{s+1}}{2} \leq \frac{n_{s+1}}{2} - j$ , para  $j = 0, \dots, 2n_{s+1}$ . Inicialmente integrando na variável  $x$ , o termo acima pode ser reescrito como

$$\frac{m}{2n_{s+1}} \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{(2y - m)}{[x^2 + (y - m)^2]} \Big|_{x=\frac{3n_{s+1}}{2}}^{x=0} dy.$$

Somando em  $j$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n_{s+1}} \frac{m}{2n_{s+1}} \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} (2y - m) \left[ \frac{1}{(y - m)^2} - \frac{1}{\left(\frac{3n_{s+1}}{2}\right)^2 + (y - m)^2} \right] dy &= \\ m \left[ \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{2y - m}{(y - m)^2} dy + O([n_{s+1}]^{-2}) \right] \end{aligned}$$

e dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} \left( h_{\Sigma}^1(x, y) - \frac{1}{2(m^2 + 1)} h_{[0,1] \cdot \vec{e}_1}^1(x, y) \right) &\leq \\ \frac{1}{(m^2 + 1)} \left[ \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \frac{2y - m}{(y - m)^2} dy + O([n_{s+1}]^{-2}) \right] &\rightarrow cte \end{aligned}$$

quando  $m$  tende a zero.

■

## A.2 O contra exemplo de Ornstein

Nesta seção, nós iremos demonstrar que dada  $f \in L^\infty_{\sharp}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  não podemos esperar solução  $Y \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  para o sistema (2.9) tal que

$$\|\nabla Y\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty} \quad (\text{A.1})$$

O contra exemplo que iremos apresentar é devido a Bourgain, Brezis e Mironescu ([BB3]) e utiliza de forma elegante um resultado de Ornstein [O]. Basicamente este resultado diz que para o cubo  $Q = [-1, 1]^2$  em  $\mathbb{R}^2$  não existe um constante universal  $K > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{xy}^2 f(x, y)| \, dx dy \leq K \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{xx}^2 f(x, y)| \, dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{yy}^2 f(x, y)| \, dx dy \right) \quad (\text{A.2})$$

para  $f \in C_0^\infty(Q)$ . Em particular, para cada  $l > 0$  existe  $g_l \in C_0^\infty(Q)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{xy}^2 g_l(x, y)| \, dx dy \geq \frac{1}{l} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{xx}^2 g_l(x, y)| \, dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_{yy}^2 g_l(x, y)| \, dx dy \right).$$

Note que num certo sentido, a desigualdade (A.2) lembra a desigualdade (P3) quando  $N = 2$ , uma vez que esta última pode ser reescrita da forma

$$\sum_{j=1}^2 \|\nabla^2 u_j\|_{L^1} \leq K (\|\Delta u_1\|_{L^1} + \|\Delta u_2\|_{L^1})$$

que implica a desigualdade

$$\sum_{j=1}^2 \|\partial_{xy}^2 u_j\|_{L^1} \leq \tilde{K} \sum_{j=1}^2 (\|\partial_{xx}^2 u_j\|_{L^1} + \|\partial_{yy}^2 u_j\|_{L^1}).$$

Voltamos a discussão do problema inicial. A demonstração será por absurdo e por simplicidade consideremos  $N = 2$ . Então, suponhamos que para cada  $f \in L^\infty_{\sharp}$  exista  $Y$  solução de (2.9) satisfazendo (A.1). Seja  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  e  $g = \partial_{xy}^2 \Psi \doteq \Psi_{xy}$ . Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_y Y_1 + g_x Y_2 = - \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot g = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_{yy} (Y_1)_x + \Psi_{xx} (Y_2)_y.$$

Então

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot g \right| \leq c (\|\Psi_{xx}\|_1 + \|\Psi_{yy}\|_1) \|f\|_\infty$$

e conseqüentemente

$$\|\Psi_{xy}\|_1 = \|g\|_1 \leq c(\|\Psi_{xx}\|_1 + \|\Psi_{yy}\|_1),$$

que contradiz o resultado de Ornstein.

# Referências Bibliográficas

- [BCH] S. Berhanu, P.D. Cordaro, and J. Hounie, *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge University Press, U.K., (2008).
- [BB1] J. Bourgain and H. Brezis, *New estimates for the Laplacian, the div-curl, and related Hodge systems*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), 539–543.
- [BB2] J. Bourgain and H. Brezis, *New estimates for elliptic equations and Hodge type systems*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), 227–315.
- [BB3] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu,  *$H^{1/2}$  maps with value into the circle; minimal connections, lifting, and the Ginzburg Landau equation*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **99** (2004), 1–115.
- [BB4] J. Bourgain e H. Brezis, *On the  $\operatorname{div} Y = f$  and application to control of phases*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 393–426.
- [Br] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2010).
- [CVS] S. Chanillo and J. Van Schaftingen, *Subelliptic Bourgain-Brezis estimates on groups*, Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 3, 487–501.
- [dR] G. de Rham, *Variétés différentiables: Formes, Courants, Formes Harmoniques*, Hermann & Cie, Paris, (1955).



- [FOS] F. Behuel, G. Orlandi, D. Smets, *Approximation with vorticity bounds for Ginzburg-Landau function*, Comm. Contemp. Math **5**(2004), 803–832.
- [G] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. **46** (1979), 27–42.
- [HP] J. Hounie e T. Picon, *Local Gagliardo Nirenberg estimates for elliptic systems of vector fields*, Math. Res. Lett. **8** (2011), no. 4, 791-804.
- [H1] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, Amsterdam 1973.
- [H2] L. Hörmander, *The Analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
- [K] R. Kapp, *Operadores Pseudo-diferenciais e espaços de Hardy*, Tese de doutorado, (2005).
- [LS] L. Lanzani and E. Stein, *A note on div curl inequalities*, Math. Res. Lett. **16** (2005), no. 3, 487–501.
- [M1] V. Maz'ya, *Bourgain-Brezis type inequality with explicit constants*, Contemporary Mathematics **445** (2007), 247–252.
- [M2] V. Maz'ya, *Estimates for differential operators of vector analysis involving  $L^1$ -norm* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), 221-240.
- [MM] I. Mitrea, and M. Mitrea, *Remark on the regularity of the div-curl system*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1729-1733.
- [N] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa **13** (1959), 116–162.
- [NN] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391–404.

- [O] D. Ornstein, *A non-inequality for differential operators in the  $L^1$  norm*, Arch. Rat. Mech. Anal. **11** (1962), 40–49.
- [S] S. K. Smirnov, *Decomposition of solenoidal vector charges into elementary solenoids and the structure of normal one-dimensional currents*, St. Petersburg Math. J. **5** (1994), 841-867.
- [St] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, (1993).
- [Ta] M. Taylor, *Pseudo-differential operators*, Princeton Math. Series **30**, Princeton Univ. Press., New Jersey, (1970).
- [Tr] F. Trèves, *Hypo-analytic structures*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1992).
- [VS1] J. Van Schaftingen, *Estimates for  $L^1$ -vector fields*, C.R. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 181-186.
- [VS2] J. Van Schaftingen, *Limiting fractional and Lorentz space estimates of differential forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 235-240.
- [VS3] J. Van Schaftingen, *Estimates for vector fields under higher-order differential conditions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), no. 4, 867-882.
- [VS4] J. Van Schaftingen, *A simple proof of an inequality of Bourgain, Brezis and Mironescu*, C. R. Math Acad. Sci. Paris **338** (2004), 23-26.
- [VS5] J. Van Schaftingen, *Function spaces between BMO and critical Sobolev spaces*, J. Funct. Anal **236** (2006), 490-516.
- [Y] P-L. Yung, *Sobolev inequalities for  $(0, q)$  forms on CR manifolds of finite type*, Math. Res. Lett. **17** (2010), no. 1, 177-196.

[Y1] P-L. Yung, *Div-curl systems (Parte I e II)*, preprint.