UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Extensão da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Tiago Henrique Picon

São Carlos

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Extensão da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Tiago Henrique Picon (Bolsista FAPESP)

Orientador: Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho

Co-orientador: Prof. Dr. Sávio Brochini Rodrigues

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos

2008

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Picon, Tiago Henrique.
P598ed	Uma extensão da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg / Tiago Henrique Picon. -- São Carlos : UFSCar, 2008.
	121 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.
	1. Gagliardo-Nirenberg. 2. Análise Harmônica. 3. Espaços de Lorentz. 4. Integrais Singulares. I. Título.
	CDD: 515.26 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
DM - UFSCar

Prof. Dr. Joaquim Tavares de Melo Neto
UFPE

Aos meus pais, com todo amor e carinho.

"A falta de ciência gera ateus.
A verdadeira ciência leva os
homens a se curvarem diante
de Deus". Voltaire (1694-1778)

Agradecimentos

A Deus por iluminar meu caminho e me acompanhar a cada dia.

À minha mãe Cristina pelo carinho e dedicação.

Ao meu pai Francisco pelo apoio e incentivo.

À minha avó Alice e meu avô Santo por me educarem.

À minha avó Ercília e meu avô Agostinho que tanto fazem falta.

À minha sobrinha Barbara e minha irmã Francini pelo amadurecimento.

À minha namorada Paula pelos carinhos e puxões de orelha.

Ao meu orientador José Ruidival dos Santos Filho pela dedicação, pelos conselhos e pelo caráter.

Ao meu co-orientador Sávio Brochini Rodrigues que me acompanha desde a graduação.

À FAPESP pelo financiamento da bolsa.

Aos professores que fizeram parte da minha formação.

Aos meus amigos do futebol, Bobra, Nuno, Santana, Shuma, Tofu e Danilo.

Resumo

Nesta dissertação detalharemos o artigo *"A Note on div curl Inequalities"* de L. Lanzani e E. M. Stein [10], cujo resultado principal traz uma extensão da clássica desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para q-formas suaves de suporte compacto.

Palavras-chaves: Gagliardo-Nirenberg, Análise Harmônica, Espaços de Lorentz, Integrais Singulares.

Abstract

In this dissertation we present a detailed account of the paper *"A Note on div curl Inequalities"* by L. Lanzani and E. M. Stein [10], which extend the classical inequality of Gagliardo-Nirenberg for smooth q- forms of compact support.
Keywords: Gagliardo- Nirenberg, Harmonic Analysis, Lorentz Spaces, Singular Integrals.

Sumário

0.1 Introdução

O objetivo dessa dissertação será detalhar o artigo *"A Note on div curl Inequalities"* de L. Lanzani e E. M. Stein [10]. Uma especial atenção será dada as técnicas de Análise Harmônica aqui utilizadas.

No Capítulo 1 fixaremos a notação do texto e faremos uma breve apresentação sobre resultados de Medida e Integração, Distribuições e Formas Diferenciais.

No Capítulo 2 apresentaremos os espaços de Lorentz. Na Seção 2.1 estudaremos as funções de distribuição e rearrajamento e suas propriedades. Os espaços de Lorentz, por sua vez, serão apresentados na Seção 2.2. Em especial, nesta seção, daremos uma extensão do Teorema de Interpolação de Marcinkewicz e do Teorema de Hausdorff-Young. Por fim, na Seção 2.3 definiremos o espaço $\widetilde{L}^p$ que será utilizado em estimativas integrais do Capítulo 4.

No Capítulo 3 faremos uma abordagem sobre uma classe especial de operadores lineares com núcleo da forma $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$ sendo Ω uma função homogênea de grau nulo em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, satisfazendo certas condições de integrabilidade em S^{n-1}. Na Seção 3.1 definiremos tais operadores, chamados integrais singulares. Um breve comentário sobre as distribuições homogêneas será feito na Seção 3.2. Na Seção 3.3 estudaremos o método das rotações, cuja importância é dada no estudo dos núcleos $K(x)$ sendo Ω uma função ímpar. Na seção seguinte 3.4 abordaremos uma classe importante de operadores integrais singulares chamados transformadas de Riesz. Estes, por sua vez, serão de suma importancia no estudo dos operadores com núcleo $K(x)$ sendo Ω uma função par, como será visto na Seção 3.5. Na Seção 3.6 estudaremos uma classe particular de núcleos da forma $K(x)$ e na Seção 3.7 faremos uma breve abordagem sobre o espaço de Hardy H^1.

No Capítulo 4 demonstraremos o teorema principal do artigo [10], cuja prova será dada na Seção 4.2. Na Seção 4.1 apresentaremos dois resultados centrais na demonstração de tal teorema. Na Seção 4.3 um contra-exemplo quando n=2 para o Teorema 0.2.3 é apresentado.

No Apêndice A apresentaremos uma demonstração das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg enquanto que no Apêndice B faremos um breve comentário sobre a transformada de Hilbert, como será visto na Seção B.2. Na Seção B.1 também comentaremos sobre a aproximação da identidade e a função maximal de Hardy-Littewood.

0.2 Resultado Principal

Um resultado muito interessante demonstrado por J. Bourgain e H. Brezis [1] em 2004, é uma desigualdade para campos vetoriais suaves de suporte compacto quando $n = 3$, a saber:

Teorema 0.2.1 ***(Bourgain-Brezis)*** *Suponhamos que u seja um campo vetorial suave de suporte compacto em $\mathbb{R}^3$. Se rot $u = f$ e div $u = 0$, então*

$$\|u\|_{L^{3/2}} \leq A \|f\|_{L^1} . \tag{1}$$

Neste mesmo espírito, é bem conhecida a seguinte desigualdade:

Teorema 0.2.2 ***(Gagliardo-Nirenberg)*** *Seja $1 \leq p < n$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma constante C=C(p,n)>0 tal que*

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} , \tag{2}$$

no qual $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ (vide Apêndice A.)

A desigualdade (1) é remanescente do resultado de Gagliardo e Nirenberg. Uma vez que se $r = n/(n-1)$, $n = 3$ e *div* $u = 0$ então a desigualdade (1) diz que

$$\|u\|_{L^r} \leq A \|rot\ u\|_{L^1} .$$

Por outro lado se $p = 1$ e $n \geq 2$ então (2) é dada por

$$\|u\|_{L^r} \leq C \|Du\|_{L^1} .$$

Motivados por tais desigualdades, L. Lanzani e E. M. Stein no artigo *"A Note on Div Curl Inequalities"*, referência [10], estenderam esses resultados para q-formas suaves de suporte compacto para os respectivos substitutos do rotacional e do divergente de um campo. Se u é uma q-forma suave de suporte compacto, du e d^*u respectivamente a diferencial exterior e a derivada coexterior, consideremos

$$\begin{cases} du = f \\ d^*u = g. \end{cases} \tag{3}$$

Assim, uma questão natural é sabermos se a desigualdade

$$\|u\|_{L^r} \leq A\left(\|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}\right) \tag{4}$$

é válida para $r = n/(n-1)$. A extensão provada por L. Lanzani e E. M. Stein é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 0.2.3 *Seja u uma q-forma suave de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$ satisfazendo o sistema (3). Então:*

(i) *A desigualdade (4) é válida quando q é diferente de 1 e $n-1$.*

(ii) *Quando $q = 1$ (4) é válida com $\|g\|_{H^1}$ ao invés de $\|g\|_{L^1}$, sendo H^1 o espaço de Hardy para $p = 1$. Analogamente para $q = n-1$ quando substituimos $\|f\|_{L^1}$ por $\|f\|_{H^1}$.*

Observemos que no caso $q = 0$ e $q = n$ temos o Teorema 0.2.2 para $n \geq 3$, enquanto que no caso $q = 1$, quando $g = 0$ temos o Teorema 0.2.1 para $n = 3$. Observemos também que quando $n \geq 3$ e $p = 1$ o lado esquerdo de (4) é menos restritivo que o lado esquerdo de (2).

Com o objetivo de detalhar a demonstração do teorema acima, em especial estudaremos as técnicas utilizadas na demonstração do mesmo. Os operadores integrais singulares dados na Seção 4.1 no Capítulo 3 serão de grande relevância na demonstração do item (i) acima. Por outro lado se chega naturalmente aos operadores integrais singulares uma vez que nos deparamos com uma desigualdade dada em função de uma norma do espaço de Lorentz. Em particular, não entraremos em detalhes sobre os espaços de Hardy H^p e apenas faremos alguns breves comentários na Seção 3.7 no Capítulo 3 para o caso H^1. A Seção 4.2 será destinada a demonstração do resultado principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos fixar a notação do texto, bem como apresentar resultados de Medida e Integração, Distribuições, Análise Harmônica e Formas Diferenciais do Espaço Euclidiano.

1.1 Notações

Denotamos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ como a variável espacial em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 1$ e $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ a base canônica desse espaço. Consideramos Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e K um subconjunto compacto de Ω denotado por $K \subset\subset \Omega$. A fronteira e o fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ serão representados respectivamente por ∂X e $\overline{X}$. Por $B_r(c)$ denotamos a bola aberta de centro c e raio $r > 0$. $C^k(\Omega)$ será o espaço das funções k vezes diferenciáveis em Ω, $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciaveis em Ω e $C_0^\infty(\Omega)$ o subespaço das funções $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ será chamado como espaço das funções testes. O suporte de uma função será denotado por $S(f)$. O produto interno e a norma serão

$$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$$

e

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}},$$

com a métrica induzida $d(x,y)=|x-y|$. Dessa forma consideramos a esfera unitária por $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$. Denotamos $\partial_{x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e $\nabla=(\partial_{x_1},...,\partial_{x_n})$. Para $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ escrevemos

$$\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Usaremos também a notação $D^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}...D_{x_n}^{\alpha_n}$ com $D_{x_j}=-i\partial_{x_j}$. Denotamos $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $\alpha!=\alpha_1!...\alpha_n!$ e dizemos que $\beta\leq\alpha$ se $\beta_j\leq\alpha_j$ para todo j=1,...,n. O coeficiente binomial será dado por

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},\forall\ \beta\leq\alpha.$$

Se $r\in\mathbb{N}$ e E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), denotamos $E^r=E\times...\times E$, r vezes o produto cartesiano de E. Além disso, escrevemos E^* o espaço dual de E. Dizemos que $v_1,...,v_j\in E$ é um subconjunto L.I. em E se para quaisquer $\alpha_1,...,\alpha_j\in\mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) tal que $\alpha_1v_1+...+\alpha_jv_j=0$ temos que $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_j=0$. Da mesma forma, dizemos que $v_1,...,v_j\in E$ é um subconjunto L.D. em E quando não for L.I. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ será denotada por dx e a de Borel sobre S^{n-1} por $d\sigma$. Se E é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ então $|E|$ denotará a medida de Lebesgue de E e χ_E a função característica de E, isto é, $\chi_E(x)=1$ se $x\in E$ e $\chi_E(x)=0$ se $x\notin E$, ou seja, $|E|=\displaystyle\int\chi_E(x)dx$. Se M é uma σ-álgebra de um conjunto X denotamos L^+ o conjunto das funções mensuráveis não-negativas. Denotamos por $L^p(X,\mu)$ para $1\leq p<\infty$ o espaço de Banach das funções μ-mensuráveis de X em $\mathbb{C}$, com norma $\|\ \|_{L^p(X)}$ dada por

$$\|f\|_{L^p(X)}=\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{1/p}<\infty.$$

No caso de $p=\infty$, por $L^\infty(X,\mu)$ denotamos o espaço de Banach das funções essencialmente limitadas de X em $\mathbb{C}$, isto é, se $f\in L^\infty(X,\mu)$ então existe $C>0$ tal que $\mu\left(\{x\in X:|f(x)|>C\}\right)=0$. A norma de f será dada por $\|f\|_\infty$ que é definida pelo ínfimo das constantes com a propriedade anterior. Se $X=\mathbb{R}^n$ e $d\mu=dx$ denotamos simplesmente por L^p com $\|\ \|_p$.

1.2 Medida e Distribuições

Nesta seção iremos apresentar definições e resultados de Medida e Distribuições, bastante utilizados nesta dissertação. Uma maior abordagem sobre esses assuntos bem como as demonstrações dos resultado aqui enunciados podem ser encontrados em [6] e [8]. As propriedades básicas de medida são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2.1 *Seja (X, M, μ) um espaço de medida. Então:*
(i) *Se $E, F \in M$ e $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
(ii) *Se $\{E_j\}_1^\infty \subset M$ e $E_1 \subset E_2 \subset ...$, então $\mu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*
(iii) *Se $\{E_j\}_1^\infty \subset M$, $E_1 \supset E_2 \supset ...$ e $\mu(E_n) < \infty$ para algum n então $\mu\left(\bigcap_1^\infty E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

O próximo resultado nos mostra que uma função mensurável arbitrária pode ser aproximada por funções simples.

Teorema 1.2.2 *Seja (X, M) um espaço mensurável. Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq ... \leq |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente para todo conjunto no qual f seja limitada.*

O teorema que iremos enunciar é conhecido como o Teorema da Convergência Monótona.

Teorema 1.2.3 *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em L^+ tal que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo j e $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ então $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.*

Nesta mesma direção segue o Teorema da Convergência Dominada.

Teorema 1.2.4 *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^1 tal que $f_n \to f$ q.t.p. e $\exists\, g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo n. Então $f \in L^1$ e $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.*

O próximo resultado diz respeito sobre o cálculo de integrais em $X \times Y$, conhecido como o Teorema de Fubini-Tonelli. Denotaremos por $f_x(y) = f(x,y)$ para cada $x \in X$ e por $f_y(x) = f(x,y)$ para cada $y \in Y$.

Teorema 1.2.5 *Seja (X, M, μ) e (Y, N, ν) espaços de medida σ-finitos.*
(i)(Tonelli) *Se $f \in L^+(X \times Y)$ então as funções $g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu$ e $h(y) = \int_X f(x,y)d\mu$ estão em $L^+(X)$ e $L^+(Y)$ respectivamente e*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) &= \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y).\end{aligned} \tag{1.1}$$

(ii)(Fubini) *Se $f \in L^1(\mu\times\nu)$ então $f_x \in L^1(\nu)$ q.t.p. $x \in X$, $f_y \in L^1(\mu)$ q.t.p. $y \in Y$ e as funções definidas q.t.p. por $g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu$ e $h(y) = \int_X f(x,y)d\mu$ estão em $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$ respectivamente e vale a identidade (1.1).*

Um resultado de muita importância na estimativa para integrais é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2.6 ***(Minkowski para Integrais)*** *Sejam (X, M, μ) e (Y, N, ν) espaços mensuráveis σ-finitos e seja f uma função $M \otimes N$ mensurável sobre $X \times Y$. Então se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ então*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int_Y \left[\int_X f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y).$$

Como corolário do Teorema de Mudança de Variáveis em Coordenadas Polares para Integrais (Teorema 2.49 em [6] p.74), temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.1 *Seja f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, não negativa e integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g em $(0, \infty)$. Então:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

Em virtude do cálculo de $\sigma(S^{n-1})$ definimos a seguinte função:

Definição 1.2.1 *Definimos a função Gama para $x > 0$ por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Um cálculo simples envolvendo mudança de variáveis nos mostra que

$$\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) = 2\pi^{\frac{b+1}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^b dr. \tag{1.2}$$

Nesta direção, outro cálculo é dado pela

Proposição 1.2.2 *Se a>0 então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Demonstração. Decorre imediatamente por mudança de variáveis em coordenadas polares e o Teorema de Fubini-Tonelli.

■

Assim justificamos a motivação inicial da definição de Γ por

Corolário 1.2.1 $\sigma(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$

Demonstração. Basta utilizarmos a Proposição 1.2.2.

■

Uma constante envolvendo a função Gama dada por

$$c_{n,\alpha} = \frac{\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \tag{1.3}$$

será de grande utilidade no texto.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, vamos definir o conceito de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2.2 *Uma sequência $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge a zero se:*

(i) *existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$, $j \in \mathbb{N}$.*

(ii) *para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.*

Dessa forma, dizemos que uma sequência $\{\phi_j\}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$ se $(\phi_j - \phi) \to 0$ quando $j \to \infty$ em $C_0^\infty(\Omega)$. É possível dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a convergência nessa topologia coincida com a dada pela definição acima (vide [18]). Analogamente em $C^\infty(\Omega)$ definimos o seguinte sentido de convergência (e portanto uma topologia).

Definição 1.2.3 *Uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções em $C^\infty(\Omega)$ converge a zero se para todo compacto $K \subset \Omega$ e todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.*

Observação 1.2.1 *Se uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_0^\infty(\Omega)$ então $\{\phi_j\}$ também converge a zero em $C^\infty(\Omega)$. A recíproca é falsa (vide [8] p.38).*

Com essa topologia, $C^\infty(\Omega)$ é um espaço de Fréchet (métrico, completo e localmente convexo) enquanto que $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço completo e localmente convexo, porém não metrizável (vide [18]). Se $\mathcal{D}(\Omega)$ é o conjunto das funções $C_0^\infty(\Omega)$ com essa topologia então denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, chamado espaço das distribuições em Ω. Denotaremos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear e contínuo. Como notação desse funcional escrevemos $u(\phi) =< u, \phi >$ para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. A seguir, listaremos alguns resultados decorrentes da teoria de Distribuições cujas demonstrações podem ser encontradas em [8]. A proposição seguinte nos mostra que dado um compacto sempre podemos tomar uma função em C_0^∞ de modo especial.

Proposição 1.2.3 *Seja $K \subset\subset \Omega$. Então existe $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ numa vizinhança de K.*

Se f e g são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e uma delas possui suporte compacto, então a convolução de f e g é dada por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Isto nos leva a seguinte definição.

Definição 1.2.4 *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$, definimos a função $u * \phi$ por*

$$u * \phi(a) =< u, \check{\phi}_a >$$

no qual $\check{\phi}_a(x) = \phi(a - x)$.

Uma lista de propriedades sobre a função $u * \phi$ é dada pelo teorema abaixo.

Teorema 1.2.7 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Então:*

(i)$u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii)$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$

(iii)$S(u * \phi) \subseteq S(u) + S(\phi)$.

Aqui definimos $S(u)$, o suporte da distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é uma distribuição nula.

1.3 Transformada de Fourier e Espaço de Schwartz

Nesta seção faremos um breve comentário sobre a transformada de Fourier e espaço de Schwartz. As demonstrações dos resultados enunciados bem como uma maior abordagem dos assuntos podem ser encontrada em [4], [7], [17] e [18].

Definição 1.3.1 *Dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por*

$$\hat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \tag{1.4}$$

A seguir, exibiremos algumas propriedades sobre a transformada de Fourier:

$$(\alpha f + \beta g)\widehat{} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{f} \quad \text{(linearidade)}, \tag{1.5}$$

$$\left\| \hat{f} \right\|_\infty \leq \|f\|_{L^1} \quad \text{e } \hat{f} \text{ é contínua}, \tag{1.6}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0 \ \ \text{(Riemann-Lebesgue)}, \tag{1.7}$$

$$(f * g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi), \tag{1.8}$$

$$\text{se } g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x) \text{ então } \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi), \tag{1.9}$$

$$\text{se } \rho \in O_n \text{ (transformação ortogonal) então } (f(\rho\cdot))\widehat{\ }(\xi) = \hat{f}(\rho\xi), \tag{1.10}$$

$$(\partial_{x_k} f)\widehat{\ }(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \tag{1.11}$$

e

$$(-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(\xi) = (\partial_{\xi_k} \widehat{f})(\xi). \tag{1.12}$$

Se $f \in L^1$ não é necessariamente válido que $\hat{f} \in L^1$. Sendo assim, uma questão natural é saber se existe um subconjunto de L^1 tal que este seja invariante pela transformada de Fourier.

Definição 1.3.2 ***(Espaço de Schwartz)*** *Denotamos por $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o subconjunto das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo multiíndice $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}$*

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{(1+|x|^2)^\alpha |\partial^\beta f(x)|\right\} < \infty. \tag{1.13}$$

O espaço $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ estritamente, já que por exemplo $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ pertence a $\mathcal{S}$, mas não é de suporte compacto.

Exemplo 1.3.1 *Se $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ então $\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. De fato se $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ para $x \in \mathbb{R}$ segue que ϕ é solução de $\phi'(x) + x\phi(x) = 0$, com condição inicial $\phi(0) = 1$. Tomando a transformada de Fourier na e.d.o. e utilizando a condição inicial segue que $\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Agora, se $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ então*

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\phi}_j(\xi_j) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}},$$

no qual $\phi_j(\xi_j) = (2\pi)^{1/2} e^{-\frac{{\xi_j}^2}{2}}$.

A coleção $\{p_{\alpha,\beta}\}$ é uma família contável de seminormas e portanto define uma topologia em $\mathcal{S}$. Assim, dizemos que uma sequência $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a zero em $\mathcal{S}$ se, e somente se, para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} p_{\alpha,\beta}(\phi_k) = 0.$$

Com essa topologia, $\mathcal{S}$ é um espaço de Fréchet e denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$. Em particular, $\mathcal{S} \subset L^1$ e portanto (1.4) define a transformada de Fourier em$\mathcal{S}$. Uma outra caracterização das seminormas em $\mathcal{S}$ é dada por

$$p_{a,b}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ |x^a \partial^b f(x)| \right\},$$

para $a, b \in \mathbb{N}^n$ multiíndices. De fato, não é difícil mostrarmos que esta família de seminormas é comparável com a família definida em (1.13). A proposição a seguir, nos mostra que podemos caracterizar o espaço de Schwartz de outras maneiras.

Proposição 1.3.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e quaisquer $a, b \in \mathbb{N}^n$ multiíndices. Seguem as equivalências:*
(i) *$x^a(\partial^b f)(x) \to 0$ quando $x \to \infty$.*
(ii) *$x^a(\partial^b f)(x)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$.*
(iii) *$\exists\ C = C(a, b) > 0$ constante tal que $|x^a(\partial^b f)(x)| \leq C(a, b)$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.*

O próximo teorema justifica uma das propriedades especiais do espaço de Schwartz.

Teorema 1.3.1 *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx \tag{1.14}$$

e

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi. \tag{1.15}$$

A identidade (1.15) é denominada a inversa da transformada de Fourier.

Demonstração. A igualdade em (1.14) segue diretamente do Teorema de Fubini-Tonelli e o lado direito de (1.15) está bem definido já que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Seja $\epsilon > 0$ e $\psi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Se $\psi_\epsilon(x) = \psi(\epsilon x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $\hat{\psi}_\epsilon(\xi) = \epsilon^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\psi(\epsilon^{-1}\xi)$. Portanto segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi}\psi_\epsilon(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \tag{1.16}$$

está bem definida. Além disso novamente pelo Teorema de Fubini-Tonelli e seguido de uma mudança de variáveis concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\psi_\epsilon(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+\epsilon z)\psi(z)dz. \tag{1.17}$$

Assim, obtemos a identidade (1.15) em virturde do Teorema da Convergência Dominada em (1.17) tomando $\epsilon \to 0$.

■

Uma consequência direta de (1.15) é dado pelo seguinte resultado.

Corolário 1.3.1 *Se* $f \in \mathcal{S}$ *então* $\hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi)$.

O corolário acima também nos mostra que a transformada de Fourier tem período quatro.

Teorema 1.3.2 *Se* $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\bar{\psi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\bar{\hat{\psi}}(x)dx \tag{1.18}$$

O teorema acima é conhecido como a identidade de Parseval

1.4 Distribuições Temperadas

Uma vez que o espaço de Schwartz possui propriedades interessantes atuando na transformada de Fourier, é natural considerarmos o conceito de transformada de Fourier para o dual desse espaço. As demostrações dos resultados enunciados bem como uma maior abordagem sobre esse assunto podem ser encontrados em [8] e [18].

Definição 1.4.1 *Um funcional linear e contínuo em* $\mathcal{S}$ *é dito uma distribuição temperada.*

O conjunto das distribuições temperadas será indicado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ou simplesmente por $\mathcal{S}'$. Uma caracterização desse espaço é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.4.1 *Seja $u : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linear. São equivalentes:*

(i) *u é contínua*

(ii) *$\exists\, C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle u, \psi\rangle| \leq C \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} p_{m,\alpha}(\psi)$ para $\forall\, \psi \in \mathcal{S}$.*

Por restrição a C_0^∞, todo elemento em $\mathcal{S}'$ define uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, $\mathcal{S}'$ é identificado como um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Em virtude do Teorema 1.3.1 podemos definir a transformada de Fourier de uma distribuição temperada.

Definição 1.4.2 *Dada $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier de u, indicada por $\hat{u}$ é definida por*

$$\langle \hat{u}, \psi\rangle = \left\langle u, \hat{\psi}\right\rangle \quad \forall\, \psi \in \mathcal{S}. \tag{1.19}$$

Segue do Teorema 1.3.1 que o operador $\widehat{\ }: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ é contínuo com inversa contínua. Se $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ então f pode ser identificada como uma distribuição temperada, T_f, posto que para $\forall\, \phi \in \mathcal{S}$, definimos

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx. \tag{1.20}$$

Da desigualdade de Hölder temos que T_f está bem definida. Em particular, para $f \in L^2$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.2 ***(Plancherel)*** *A transformada de Fourier é uma isometria em L^2, isto é, $\hat{f} \in L^2$ e $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$. Além disso,*

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \tag{1.21}$$

e

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi, \tag{1.22}$$

no qual os limites são dados em L^2.

Agora, se $f \in L^p$, $1 < p < 2$ então $f = f_1 + f_2$ no qual $f_1 = f\chi_{\{|x|\leq 1\}} \in L^1$ e $f_2 = f\chi_{\{|x|>1\}} \in L^2$. Dessa forma, temos que $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ com $\hat{f}_1 \in L^\infty$ e $\hat{f}_2 \in L^2$. Pelo Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (vide [4] p.16) obtemos os seguintes resultados

Proposição 1.4.1 ***(Hausdorff-Young)*** *Se $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, então $\hat{f} \in L^q$ e*

$$\left\|\hat{f}\right\|_q \leq \|f\|_p\,,$$

no qual p e q são expoentes conjugados.

Proposição 1.4.2 ***(Young)*** *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ no qual $1/r + 1 = 1/p + 1/q$ para $1 \leq p, q \leq \infty$ e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

Algumas propriedades da transformada de Fourier seguem análogas para uma distribuição temperada.

Teorema 1.4.3 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e α um multiíndice em $\mathbb{N}^n$. Seguem as afirmações:*

(i) *a transforma de Fourier de f como função ou como distribuição coincidem.*

(ii) $\widehat{D^\alpha v} = (\cdot)^\alpha \hat{v}$ *e* $\widehat{x^\alpha v} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{v}$.

(ii) $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\hat{u}(\xi) =< u, e^{-i(.)\cdot\,\xi} >$.

Assim como na Definição (1.2.4) temos que $v*\phi$ está bem definida e satisfaz as propriedades do Teorema 1.2.7. Isto nos mostra que $v * \phi$ é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. De fato, pelo próximo teorema temos que $v * \phi$ é uma distribuição temperada.

Teorema 1.4.4 *Se $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $(v * \phi)\hat{}\,(\xi) = \hat{v}(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Como referência para a demonstração desse teorema, citamos [18] p.319.

1.5 Formas Diferenciais

Nesta seção introduziremos algumas notações e resultados sobre formas diferenciais. Uma abordagem completa sobre esse assunto, bem como as demonstrações dos teoremas que serão enunciados podem ser encontrados em [11].

Definição 1.5.1 *Sejam E e F espaços vetoriais e $r \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $\phi : E^r \to F$ é denominada r-linear quando seus valores $\phi(v_1, ..., v_r)$ dependem linearmente de cada uma das variáveis $v_i \in E$ para $1 \leq i \leq r$. Dizemos que ϕ é alternada quando $\phi(v_1, ..., v_r) = 0$ sempre que existir $k \neq j$ tal que $v_k = v_j$*

Denotamos por $L_r(E; F)$ e $A_r(E; F)$ respectivamente o conjunto das aplicações r-linear e r-linear alternadas de E em F. Quando $F = \mathbb{R}$ denotamos $A_r(E; \mathbb{R})$ por $A_r(E)$ e chamamos uma aplicação r-linear alternada simplesmente por *r-forma*. Em especial, convencionamos as 0-formas como as funções escalares, isto é, $A_0(E) = \mathbb{R}$. As 1-forma recebem a nomenclatura de funcionais lineares.

Definição 1.5.2 *Sejam $f_1, ..., f_r \in E^*$. Definimos uma r-forma $f_1 \wedge ... \wedge f_r : E^r \to \mathbb{R}$, chamada produto exterior, dada por*

$$(f_1 \wedge ... \wedge f_r)(v_1, ..., v_r) = det(f_i(v_j)),$$

no qual à direita temos o determinante da matriz $r \times r$ cuja i-ésima linha é $(f_i(v_1), ..., f_i(v_r))$ e cuja j-ésima coluna é $(f_1(v_j), ..., f_r(v_j))$.

O produto exterior $f_1 \wedge ... \wedge f_r$ está bem definido (r-forma), posto quef_i é linear para cada $1 \leq i \leq r$ e pelo seguinte resultado:

Proposição 1.5.1 *$det \in A_r(\mathbb{R}^r)$ para $det(v_1, ..., v_r) =$ determinante da matriz $r \times r$ cujas colunas são os vetores v_i.*

Consideramos a aplicação $\Lambda : E^* \times ... \times E^* \to A_r(E)$ definida por $\Lambda(f_1, ..., f_r) = f_1 \wedge ... \wedge f_r$. Segue da Proposição 1.5.1 que Λ é uma aplicação r-linear alternada de E^* em $A_r(E)$. As formas r-lineares alternadas que pertencem à imagem de Λ são chamadas decomponíveis. A seguir enunciaremos alguns resultados sobre formas:

Lema 1.5.1 *Seguem as afirmações:*

(i) *Seja $\phi \in A_r(E; F)$. Se $v_1, v_2, ..., v_r \in E$ são L.D. então $\phi(v_1, ..., v_r) = 0$.*

(ii) *O produto exterior $f_1 \wedge ... \wedge f_r \neq 0 \Leftrightarrow f_1, ..., f_r$ são L.I. em E^*.*

(iii) *Se $r > dim\ E$ então $A_r(E) = \{0\}$.*

Seja $\{w_1, ..., w_m\}$ uma base do espaço E^*. Denotamos $I = \{i_1, ..., i_r\}$ para representar um subconjunto de índices com r elementos contidos em $\{1, ..., m\}$, cujos membros são numerados na ordem crescente. Dessa forma escrevemos

$$w_I = w_{i_1} \wedge ... \wedge w_{i_r}.$$

O resultado abaixo descreve uma base para $A_r(E)$.

Teorema 1.5.1 *Seja $\{w_1, ..., w_m\}$ uma base do espaço E^*. As r-formas $w_I = w_{i_1} \wedge ... \wedge w_{i_r}$ para $I = \{i_1 < ... < i_r\}$ percorrendo os subconjuntos de $\{1, ..., m\}$ com r elementos, constituem uma base de $A_r(E)$. Em particular, dim $A_r(E) = \dfrac{m!}{r!(m-r)!}$.*

Feita essa abordagem geral sobre r-formas, tomamos $E = \mathbb{R}^m$ e denotamos por $\{dx_1, ..., dx_m\}$ a base de $(\mathbb{R}^m)^*$, dual da base canônica $\{e_1, ..., e_m\}$ em $\mathbb{R}^m$, isto é, $dx_i(e_j) = 1$ se $i = j$ e $dx_i(e_j) = 0$ se $i \neq j$. Se $I = \{i_1 < ... < i_r\}$ representa um subconjunto de índices com r elementos contidos em $\{1, ..., m\}$ então fixamos $dx_I = dx_{i_i} \wedge ... \wedge dx_{i_r}$. Uma *forma diferencial de grau q* num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação $\omega : U \to A_q(\mathbb{R}^m)$. A cada ponto $x \in U$, ω corresponde a uma forma diferencial q-linear alternada $\omega(x) = \sum_{|I|=q} a_I(x) dx_I$. A forma ω determina (e é determinada) funções $a_I : U \to \mathbb{R}$, denominadas funções coordenadas de ω. Além disso dizemos que uma forma diferencial de grau q é de suporte compacto (ou de classe C^k para $k \in \mathbb{N}$) em U se a_I é uma função de suporte compacto (ou de classe C^k) em U para todo $|I| = q$.

Definição 1.5.3 *Seja $\omega(x) = \sum_{|I|=q} a_I(x) dx_I$ uma forma diferencial de grau q e classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A diferencial exterior de ω é a forma*

$$d\omega = \sum_{|I|=q} da_I dx_I = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|I|=q} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Evidentemente $d\omega$ é uma forma de grau $q + 1$ e classe C^{k-1} em U. As propriedades da diferencial exterior são enunciadas a seguir:

Teorema 1.5.2 *Sejam u e v formas diferenciais de classe C^1 em $U \subset \mathbb{R}^m$. Então:*

(i) *Se $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma de grau zero (função real) então du é a diferencial usual de uma função.*

(ii) *d(u+v)=du+dv.*

(iii) *Se u é de classe C^2 então ddu=0.*

Uma classe importante é dada pelas formas fechadas e exatas.

Definição 1.5.4 *Seja ω uma forma diferencial de grau r e classe C^1. Dizemos que ω é fechada quando $d\omega = 0$ e exata quando existe uma forma f de grau $r-1$ e classe C^2, tal que $df = \omega$.*

Segue do item (iii) do Teorema 1.5.2 que toda forma exata é fechada. Porém a recíproca não é válida.

Capítulo 2

Espaços de Lorentz

2.1 Rearranjamento

O rearranjamento de uma função é uma ferramenta muito importante para calcular e estimar normas integrais. Nesta seção iremos apresentar algumas propriedades do rearranjamento.

Denotaremos ao longo do texto, (X, M, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função μ-mensurável.

Definição 2.1.1 *Seja (X, M, μ) e $f : X \to \mathbb{C}$. Chamamos a função $a_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$, dada por*

$$a_f(s) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s\}\right), \tag{2.1}$$

a função distribuição de f associada a μ.

A seguir enunciaremos algumas propriedades de a_f.

Lema 2.1.1 *Se $a_f(s) = 0$ para todo $s > 0$ então $f = 0$ μ-q.t.p.*

Demonstração. Afirmação: dado $s > 0$ e $E_s = \{x \in X : |f(x)| > s\}$ então $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. De fato, se $x \in E_0$ então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > j^{-1} > 0$. Assim $x \in E_{1/j}$ e portanto $E_0 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Por outro lado observamos que

$E_{1/n} \subset E_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n} \subset E_0$, o que conclui a afirmação. Logo, como $E_{1/n} \subset E_{1/n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue pelo Teorema 1.2.1 que

$$\mu(E_0) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{1/n}) = 0,$$

posto que $\mu(E_s) = 0$ para todo $s > 0$. Dessa forma concluimos que $f = 0$ μ-q.t.p.

■

Lema 2.1.2 *A função de distribuição de f é não-crescente e contínua à direita.*

Demonstração. Assim como no lema anterior, denotamos $E_s = \{x \in X : |f(x)| > s\}$. Logo se $s_1 \leq s_2$ então $E_{s_2} \subseteq E_{s_1}$ e assim pelo Teorema 1.2.1 temos que $a_f(s_2) \leq a_f(s_1)$. Portanto, a_f é não-crescente. Consideramos agora uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo a zero à direita. Vamos mostrar que a_f é contínua à direita em $s_0 > 0$. Se denotarmos $E_{s_0}^n = \{x \in X : |f(x)| > s_0 + \epsilon_n\}$ então temos que $E_{s_0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{s_0}^n$. Sem perda de generalidade podemos passar $\{\epsilon_n\}$ a uma subsequência decrescente. Facilmente vemos que $E_{s_0}^n \subseteq E_{s_0}^{n+1} \subseteq E_{s_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{s_0}^n \subseteq E_{s_0}$. Agora, se $x \in E_{s_0}$ então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > s_0 + \epsilon_{n_0}$ e assim $x \in E_{s_0}^{n_0}$. Como consequência, $E_{s_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{s_0}^n$ e assim $E_{s_0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X/|f(x)| > s_0 + \epsilon_n\}$. Pelo Teorema 1.2.1

$$a_f(s_0) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{s_0}^n) = \lim_{s\downarrow s_0} a_f(s).$$

■

Lema 2.1.3 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{C}$ funções μ-mensuráveis. Seguem as afirmações:*

(i) *se $|f| \leq |g|$ μ-q.t.p. então $a_f(s) \leq a_g(s)$ para todo $s > 0$.*

(ii) *$a_{f+g}(s) \leq a_f(s/2) + a_g(s/2)$ para todo $s > 0$.*

Demonstração.

(i) Se $E_f(s) = \{x \in X : |f(x)| > s\}$ segue que $E_f(s) \subseteq E_g(s)$ μ-q.t.p. para cada $s > 0$, já que $|f| \leq |g|$ μ-q.t.p. Sendo assim, da definição de função de distribuição segue que $a_f(s) \leq a_g(s)$.

(ii) Seja $s > 0$ e $x \in E_{f+g}(s)$ como no item anterior. Pela desigualdade triangular segue que $s < |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Logo,

$$E_{f+g}(s) \subseteq E_f(s/2) \cup E_g(s/2).$$

Assim, pelo Teorema 1.2.1 concluimos que $a_{f+g}(s) \leq a_f(s/2) + a_g(s/2)$ para todo $s > 0$.

■

Um conceito importante é o rearranjamento de uma função.

Definição 2.1.2 *Seja (X, M, μ) e $f : X \to \mathbb{C}$. Denotamos a função f^* : $(0, \infty) \to [0, \infty]$, dada por*

$$f^*(t) = \inf \{s : a_f(s) \leq t\}, \tag{2.2}$$

como a função de rearranjamento de f.

A seguir, vamos explorar algumas propriedades sobre f^*.

Lema 2.1.4 *Seguem as afirmações:*

(i) *$a_f(f^*(t)) \leq t$ para $\forall$ $t > 0$.*

(ii) *f^* é não-crescente e contínua à direita.*

(iii) *f e f^* possuem a mesma função de distribuição.*

Demonstração.

(i) Como $f^*(t) = \inf \{s : a_f(s) \leq t\}$ segue que $f^*(t) \leq s$ desde que $a_f(s) \leq t$. Dessa forma, pela continuidade à direita de a_f temos que para todo $t > 0$,

$$a_f(f^*(t)) = \lim_{s \downarrow f^*(t)} a_f(s) \leq t.$$

(ii) Se $t_1 \leq t_2$ segue que $\{s : a_f(s) \leq t_1\} \subset \{s : a_f(s) \leq t_2\}$. Pela propridedade do ínfimo temos $f^*(t_2) \leq f^*(t_1)$, demonstrando que f^* é não-crescente. Vamos mostrar que f^* é contínua à direita em $0 < t_0 < \infty$. Se $f^*(t_0) = 0$ então para $t_0 \leq t$ temos que $f^*(t) \leq f^*(t_0) = 0$ e segue que f^* é contínua à direita em t_0. Logo podemos supor que existe $\alpha > 0$ tal que $f^*(t_0) > \alpha > 0$. Afirmação: $a_f(f^*(t_0) - \alpha) > t_0$. Por hipótese temos que $0 < \alpha < f^*(t_0) \leq s$ para todo $a_f(s) \leq t_0$. Assim, $a_f(s-\alpha) \leq a_f(f^*(t_0)-\alpha)$ e para α suficientemente pequeno concluímos que $a_f(f^*(t_0)-\alpha) \geq a_f(s-\alpha) \geq a_f(s) \geq t_0$. Mas, $a_f(f^*(t_0)-\alpha) \neq t_0$ pela definição de $f^*(t_0)$. Logo, $a_f(f^*(t_0) - \alpha) > t_0$. Analogamente como na demonstração do Lema (2.1.2) considere $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente convergindo a zero. Da afirmação anterior temos que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_f(f^*(t_0)-\alpha) > t_0+\epsilon_n$ para $n \geq n_0$. Logo $f^*(t_0)-\alpha < f^*(t_0+\epsilon_n)$ para $n \geq n_0$, pois caso contrário, se para algum $n \geq n_0$ tivermos $f^*(t_0) - \alpha \geq f^*(t_0 + \epsilon_n)$ então pelo item (i) concluímos que $a_f(f^*(t_0) - \alpha) \leq t_0 + \epsilon_n$, donde teríamos uma contradição. Como f^* é não-crescente e $f^*(t_0) - \alpha < f^*(t_0 + \epsilon_n) \Rightarrow |f^*(t_0 + \epsilon_n) - f^*(t_0)| < \alpha$ para $n \geq n_0$ e α suficientemente pequeno. Dessa forma concluímos que f^* é contínua à direita em t_0.

(iii) Afirmação: $f^*(t) > s \Leftrightarrow t < a_f(s)$. Utilizando a contra recíproca da primeira implicação, segue diretamente da definição de f^* que se $a_f(s) \leq t$ então $f^*(t) \leq s$. Por outro lado suponhamos por absurdo que $f^*(t) \leq s$. Logo $f^*(t) = s$ ou $f^*(t) < s$. No primeiro caso, pelo item (i) temos $a_f(s) = a_f(f^*(t)) \leq t$ o que contradiz $t < a_f(s)$. Agora, se $f^*(t) < s$ pela propriedade do ínfimo temos que existe $w > 0$ tal que $a_f(w) \leq t$ e $f^*(t) \leq w < s$. Mas $w < s$ implica que $a_f(s) \leq a_f(w) \leq t$. Assim $a_f(s) \leq t$ o que é uma contradição. Dessa forma, se definirmos $E_s^* = \{t > 0 : a_f(s) > t\} \Rightarrow E_s^* = (0, a_f(s))$. Como $a_{f^*}(s) = \mu(\{t > 0 : f^*(t) > s\})$ então pela afirmação segue que $a_{f^*}(s) = \mu(E_s^*) = a_f(s)$.

■

O próximo lema será de muita utilidade para estudarmos certas propriedades do espaço de Lorentz.

Lema 2.1.5 *Suponhamos $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções μ-mensuráveis tal que $|f_m(x)| \leq |f_{m+1}(x)|$ para todo $x \in X$ e $m = 1, 2, ...$ Se existe f função μ-mensurável satisfazendo $|f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x)|$ para $x \in X$, então*
(i) *para cada $\lambda > 0$, $\{a_{f_m}(\lambda)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente e $a_{f_m}(\lambda) \to a_f(\lambda)$ quando $m \to \infty$.*
(ii) *para cada $t > 0$, $\{f_m^*(t)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente e $f_m^*(t) \to f^*(t)$ quando $m \to \infty$.*

Demonstração.
(i) Sejam $\lambda > 0$ e $E_\lambda^m = \{x \in X : |f_m(x)| > \lambda\}$. Por hipótese temos que $E_\lambda^m \subset E_\lambda^{m+1} \subset E_\lambda$ para todo $m \in \mathbb{N}$ sendo $E_\lambda = \{x \in M : |f(x)| > \lambda\}$. Assim temos que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_\lambda^m \subset E_\lambda$. Agora, se $x \in E_\lambda$ então $|f(x)| > \lambda$. Como $|f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x)|$ então $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \geq |f_{n_0}(x)| > \lambda$, donde $x \in E_\lambda^{n_0}$. Dessa forma concluímos que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_\lambda^m = E_\lambda$. Já que $E_\lambda^m \subset E_\lambda^{m+1}$, pelo Teorema 1.2.1 temos $a_{f_m}(\lambda) = \mu(E_\lambda^m) \leq \mu(E_\lambda^{m+1}) = a_{f_{m+1}}(\lambda)$ e além disso

$$\mu(E_\lambda) = \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_\lambda^m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(E_\lambda^m).$$

Como $a_f(\lambda) = \mu(E_\lambda)$ então $a_{f_m}(\lambda) \to a_f(\lambda)$ quando $m \to \infty$.
(ii) Como sabemos que $a_{f_m}(\lambda) \leq a_{f_{m+1}}(\lambda) \leq a_f(\lambda)$ e $a_{f_m} = a_{f_m^*}$, segue que $f_{m+1}^*(t) \leq f_m^*(t) \leq f^*(t)$ sendo $f_m^*(t) = \inf\left\{s : a_{f_m^*}(s) \leq t\right\}$. Vamos mostrar agora que $f_m^*(t) \to f^*(t)$ quando $m \to \infty$. Se $\lim_{m\to\infty} f_m^*(t) = b$, já sabemos que $b \leq f^*(t)$. Por outro lado, $f_m^*(t) \leq b \Rightarrow a_{f_m^*}(b) \leq a_{f_m^*}(f_m^*(t)) \leq t$, pelo item (i) da Proposição 2.1.4. Mas,

$$a_f(b) = \lim_{m\to\infty} a_{f_m}(b) \leq t,$$

donde pela definição de $f^*(t)$ temos que $f^*(t) \leq b$. Logo, $f^*(t) = b$.

■

Utilizaremos o lema anterior para demonstrarmos propriedades sobre a_f e f^* sempre que podemos reduzir o caso quando f for simples. Nestas condições, vamos descrever ambas funções. Consideremos f uma função simples dada por

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j} \tag{2.3}$$

com $E_j \in M$ e $\mu(E_j) > 0$ tal que $E_j \bigcap E_k = \emptyset$ se $k \neq j$ e $c_j > 0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $c_1 > c_2 > ... > c_n > c_{n+1} = 0$. Seja $d_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$ para $1 \leq j \leq n$ e $d_0 = 0$. Sendo assim, podemos escrever a_f e f^* respectivamente por:

$$a_f(s) = \begin{cases} d_j & \text{se } \; c_{j+1} \leq s < c_j \; \text{ para } 1 \leq j \leq n \\ 0 & se \;\; c_1 \leq s, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$f^*(t) = \begin{cases} c_j & \text{se } \; d_{j-1} \leq t < d_j \; \text{ para1} \leq j \leq n \\ 0 & \text{se } \; d_n \leq t. \end{cases} \tag{2.5}$$

Como aplicação dessas identidades, vamos mostrar que a desigualdade

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t)$$

não é necessariamente válida pontualmente. Consideremos as funções simples $f = a_1\chi_{E_1} + a_2\chi_{E_2}$ e $g = b_1\chi_{E_1} + b_2\chi_{E_2}$ para $a_2 \geq b_1 \geq a_1 > b_2$ e $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$. Para $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ segue que se $d_2 - d_1 < t < d_2$ então $(f+g)^*(t) = a_1 + b_1$, enquanto que $f^*(t) + g^*(t) = a_1 + b_2$, o que contradiz a desigualdade.

2.2 Os espaços de Lorentz

Os espaços de Lorentz foram introduzidos por G. G. Lorentz em dois artigos, *Some new function spaces*, Ann. of Math. 51 (1950) e *On the theory of spaces* Λ, Pacific J. Math. 1 (1951). Estes espaços tem aplicações interessantes na teoria de interpolação de operadores, como por exemplo, extensões do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz.

Em analogia aos operadores lineares limitados, dizemos que um operador T é do tipo forte (r,p) se existe $C>0$ tal que

$$\|Tf\|_p \leq C\,\|f\|_r\,.$$

para $f \in L^r$. No entanto é conveniente considerarmos uma noção mais fraca.

Definição 2.2.1 *Seja (Y,ν) e (X,μ) espaços de medida e T um operador de $L^r(Y,\nu)$ na classe de funções mensuráveis de X em $\mathbb{C}$. Dizemos que T é do tipo fraco (r,p) para $1 \leq r \leq \infty$ e $1 \leq p < \infty$ se existe $C>0$ tal que para todo $s>0$,*

$$a_{Tf}(s) \leq \left(\frac{C\,\|f\|_r}{s}\right)^p. \tag{2.6}$$

Se $p=\infty$, dizemos que T é do tipo fraco (r,∞) se T é um operador limitado de $L^r(Y,\nu)$ em $L^\infty(X,\mu)$.

Um primeira observação é que se T é do tipo forte (r,p) então T é do tipo fraco (r,p). De fato, se $E_s=\{x\in X : |Tf(x)|>s\}$ então

$$\mu(E_s)=\int_{E_s} d\mu \leq \int_{E_s}\left|\frac{Tf(x)}{s}\right|^p d\mu \leq \frac{\|Tf\|_p^p}{s^p} \leq \left(\frac{C\,\|f\|_r}{s}\right)^p. \tag{2.7}$$

Quando $(Y,\nu)=(X,\mu)$ e T é o operador indentidade, a desigualdade do tipo fraco (p,p) é a chamada desigualdade de Chebyshev (vide [6] p.185). Se T é do tipo fraco (r,p) então pela desigualdade (2.6),

$$\sup_{s>0}\Phi(s)=A<\infty, \tag{2.8}$$

no qual $\Phi(s)=s[a_{T_f}(s)]^{\frac{1}{p}}$. De posse desta inspeção e do Teorema 1.2.2 podemos enunciar os seguintes resultados:

Lema 2.2.1 *Se $f\in L^p$ para $1\leq p<\infty$ e T é o operador indentidade então*

$$\|f\|_p=\left(p\int_0^\infty s^{-1}\Phi(s)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.9}$$

Demonstração. Seja f uma função simples dada por $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ com $E_j \in M$ e $\mu(E_j) > 0$ tal que $E_j \bigcap E_k = \emptyset$ se $k \neq j$. Sem perda de generalidade podemos supor $|c_1| > |c_2| > ... > |c_n| > c_{n+1} = 0$. Se $d_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$ para $1 \leq j \leq n$ e $d_0 = 0$, por (2.4) obtemos

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty s^{-1}\Phi(s)^p ds &= p\sum_{j=1}^{n}\int_{|c_{j+1}|}^{|c_j|}[s^{p-1}a_f(s)]ds + \int_{|c_1|}^{\infty}[s^{p-1}a_f(s)]ds \\
&= p\sum_{j=1}^{n}\int_{|c_{j+1}|}^{|c_j|}[s^{p-1}d_j]ds \\
&= \sum_{j=1}^{n} d_j(|c_j|^p - |c_{j+1}|^p) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |c_j|^p(d_j - d_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |c_j|^p \mu(E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} |f(x)|^p dx \\
&= \int_M |f(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 1.2.2, a parte (i) do Lema (2.1.5) e o Teorema 1.2.3 segue que

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty s^{-1}\Phi(s)^p ds &= \lim_{n\to\infty} p\int_0^\infty s^{p-1}a_{f_n}(s)ds \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_M |f_n(x)|^p dx \\
&= \int_M |f(x)|^p dx,
\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

$\blacksquare$

O teorema acima mostra que $f \in L^p$ se, e somente se, $\Phi \in L^p(0,\infty)$ com a medida $dv = ps^{-1}ds$.

Teorema 2.2.1 *Se f é uma função mensurável, T o operador identidade e $1 \leq p < \infty$ temos que (2.8) é verdadeiro se, e somente se, $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$ e igual a A.*

Demonstração. Seja f uma função simples dada por $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ com $E_j \in M$ e $\mu(E_j) > 0$ tal que $E_j \bigcap E_k = \emptyset$ se $k \neq j$. Seguindo a mesma notação na demonstração do Lema (2.2.1), pelas identidades (2.4) e (2.5) observamos que

$$\sup_{s>0} s[a_f(s)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{1\leq j\leq n} d_j^{\frac{1}{p}} |c_j|.$$

Se f é mensurável, pelo Teorema 1.2.2, podemos encontrar $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que $|f_m(x)| \leq |f_{m+1}(x)|$ para todo $x \in X$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x)|$ pontualmente. Como estamos nas hipóteses do Lema (2.1.5) temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left[\lim_{m\to\infty} f_m^*(t)\right] \\
&= \lim_{m\to\infty} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_m^*(t) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sup_{s>0} s[a_{f_m}(s)]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{s>0} \lim_{m\to\infty} s[a_{f_m}(s)]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{s>0} s[a_f(s)]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

no qual a segunda e a quarta igualdade decorrem da Proposição C.1.1.

■

Motivados pelo lema acima, consideremos o espaço $L^{(p,q)}$ de todas as funções mensuráveis satisfazendo,

$$\|f\|_{p,q}^* = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{2.10}$$

quando $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, e

$$\|f\|_{p,\infty}^* = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty \tag{2.11}$$

quando $1 \leq p \leq \infty$ e $q = \infty$. Estes espaços foram propostos inicialmente por G.G. Lorentz, da seguinte maneira: se ϕ é uma função não-negativa e integrável em $(0,l)$ para $l < \infty$ e ϕ diferente da função nula, considere a classe $\Lambda(\phi,p)$ das funções mensuráveis tais que

$$\|f\| = \left(\int_0^l \phi(t)[f^*(t)]^p dt\right)^{1/p} < \infty. \tag{2.12}$$

Em seu artigo [12], Lorentz trabalhou com $\phi(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ para $0 < \alpha < 1$. Já em [13], ele generalizou estes espaços com ϕ não-crescente e $l = \infty$. De fato estamos interessados no caso $\phi(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ com $\alpha = q/p$ e $l = \infty$. O teorema seguinte mostra que se $q/p > 1$ com $q \neq \infty$ então $\|f\|^*_{p,q}$ não é uma norma.

Teorema 2.2.2 *Seja ϕ uma função mensurável não-negativa e $l = \infty$ em (2.12). Se $\|\ \|$ possui a propriedade triangular então ϕ é não crescente.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos demonstrar esse teorema supondo que $X = \mathbb{R}$. A mesma demonstração pode ser adaptada para $X = \mathbb{R}^n$. Seja $a > 0$, $h > 0$, $\delta > 0$ com $a + 2h < \infty$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1+\delta & \text{em } (0, a+h) \\ 1 & \text{em } (a+h, a+2h) \\ 0 & \text{em } (a+2h, \infty), \end{cases} \tag{2.13}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{em } (0, h) \\ 1+\delta & \text{em } (h, a+2h) \\ 0 & \text{em } (a+2h, \infty). \end{cases} \tag{2.14}$$

Assim, temos que a função de rearranjamento de $f+g$ é dada por

$$(f+g)^*(t) = \begin{cases} 2+2\delta & \text{em } (0, a) \\ 2+\delta & \text{em } (a, a+2h) \\ 0 & \text{em } (a+2h, \infty). \end{cases}$$

Como $\|f\| = \|g\|$ então a desigualdade $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ é equivalente a

$$(2+2\delta)^p \int_0^a \phi(x)dx + (2+\delta)^p \int_a^{a+2h} \phi(x)dx \leq$$

$$(2+2\delta)^p \int_0^{a+h} \phi(x)dx + 2^p \int_{a+h}^{a+2h} \phi(x)dx.$$

Como consequência temos

$$(2+\delta)^p \int_a^{a+2h} \phi(x)dx \leq (2+2\delta)^p \int_a^{a+h} \phi(x)dx + 2^p \int_{a+h}^{a+2h} \phi(x)dx,$$

e então

$$\frac{(1+\delta)^p - (1+\delta/2)^p}{(1+\delta/2)^p - 1} \int_a^{a+h} \phi(x)dx \geq \int_{a+h}^{a+2h} \phi(x)dx.$$

Se $\Phi(x)$ é a integral de ϕ sobre $(0,x)$ segue da equação acima tomando $\delta \to 0$ que

$$\Phi(a+h) \geq \frac{1}{2}\left[\Phi(a) + \Phi(a+2h)\right].$$

Logo, Φ é côncava e portanto ϕ é não-crescente (vide [14] p.60).

■

A proposição a seguir demonstra que os espaços L^p são de fato os espaços de Lorentz quando $p = q$.

Proposição 2.2.1 *Se $f \in L^p$ então $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}^* = \|f^*\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Inicialmente consideremos $1 \leq p < \infty$. Seja f uma função simples dada por $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ com $E_j \in M$ e $\mu(E_j) > 0$ tal que $E_j \bigcap E_k = \emptyset$ se $k \neq j$. Utilizando a notação do teorema anterior e o cálculo prévio de f^* em (2.5) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty [f^*(t)]^p dt &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} [f^*(t)]^p dt + \int_{d_n}^\infty [f^*(t)]^p dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} |c_j|^p dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^p (d_{j+1} - d_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^p \mu(E_{j+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_{j+1}} |c_j|^p dx \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_{j+1}} |f(x)|^p dx \\
&= \int_M |f(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

Agora se f é mensurável, pelo Teorema 1.2.2 e o Teorema 1.2.3 temos

$$\int_M |f(x)|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_M |f_n(x)|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty [f_n^*(t)]^p dt.$$

Pelo item (ii) do Lema 2.1.5 e novamente pelo Teorema 1.2.3 concluímos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty [f_n^*(t)]^p = \int_0^\infty [f^*(t)]^p dt.$$

Juntando as duas igualdades anteriores segue que $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}^* = \|f^*\|_p$ para $1 \leq p < \infty$. Se $p = \infty$ então pelo item (iii) do Lema (2.1.4) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \inf\{s \geq 0 : a_f(s) = 0\} \\
&= \inf\{s \geq 0 : a_{f^*}(s) = 0\} \\
&= \|f^*\|_\infty .
\end{aligned}$$

■

A seguir enunciaremos uma desigualdade bastante interessante.

Corolário 2.2.1 *Se* $f, g \in L^+$ *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt. \tag{2.15}$$

Demonstração. Se tomarmos $p = 1$ na Proposição 2.2.1 temos que $\|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|(fg)^*\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Portanto, basta apenas concluirmos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (fg)^*(t)dt \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

Utilizando o Teorema de Tonelli-Fubini temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^{f^*(t)} dy\right)\left(\int_0^{g^*(t)} dz\right) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \chi_{\{f^*(t)>y\}}(t,y)\chi_{\{g^*(t)>z\}}(t,z)dt\right] dydz.
\end{aligned}$$

Pela afirmação no item (iii) do Lema (2.1.4) segue que

$$\sup_{t>0}\{t : f^*(t) > y\} = a_f(y).$$

Analogamente, a identidade acima também é válida para g. Dessa forma,

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^\infty \int_0^\infty \min\{a_f(y), a_g(z)\}\, dydz.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (fg)^*(t)dt &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{f(x)} ds \right) \left(\int_0^{g(x)} dr \right) dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f(x)>s\}}(x,s) \chi_{\{g(x)>r\}}(x,r) dx \right] dsdr \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > s \text{ e } g(x) > r\}\right) dsdr.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x : f(x) > s \text{ e } g(x) > r\}\right) &= \mu\left(\{x : f(x) > s\} \cap \{x : g(x) > r\}\right) \\
&\leq \min\left\{a_f(y), a_g(z)\right\},
\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado.

■

Uma observação do corolário acima é que o resultado ainda é válido se f, g são mensuráveis, já que se $g = |f|$ então $f^* = g^*$. Além disso, estamos interessados em demonstrar uma estimativa análoga a $f * g$ dada por

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^*(t) g^*(t) dt, \tag{2.16}$$

no qual $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ esteja bem definida. De fato se $f_x = f(x-y)$, segue do corolário anterior que

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_x^*(t) g^*(t) dt.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir f positiva. Agora, como f é mensurável, pelo Teorema 1.2.2 existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots \leq f$, $\phi_n \to f$ pontualmente. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $f_x = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$ pontualmente para $\psi_n(y) = \phi_n(x-y)$. Como ϕ_n é simples, segue da definição de função de rearranjamento que $\psi_n^* = \phi_n^*$. Pelo Lema 2.1.5 segue que para cada $t > 0$

$$f_x^*(t) = \lim_{n\to\infty} \psi_n^*(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n^*(t) = f^*(t),$$

pontualmente. Dessa forma, a desigualdade (2.16) está demonstrada.

Em geral vimos que $\|f\|_{p,q}^*$ não é uma norma, já que a desigualdade triângular não é satisfeita. Vamos explorar agora o caso $q = \infty$.

Proposição 2.2.2 *Se $1 \leq p < \infty$ então $\| \ \|_{p,\infty}^*$ não é norma.*

Demonstração. *Se $\|f\|_{p,\infty}^* = 0 \Rightarrow f^*(t) = 0$ para todo $t > 0$. De fato isso é suficiente para afirmar que $a_f(s) = 0$ para todo $s > 0$. Suponhamos que para algum $s_1 > 0$ temos que $a_f(s_1) \neq 0$. Se $s \leq s_1$ então $af(s_1) \leq af(s)$. Seja $t > 0$ tal que $af(s_1) \leq t < af(s)$. Caso $af(s_1) = af(s)$ escolha outro $s < s_1$ tal que $af(s_1) < af(s)$. Por sua vez, se para todo $s < s_1$ tivermos $af(s_1) = af(s)$ segue que $f^*(t) \neq 0$ para $af(s_1) > t$, o que é uma contradição. Portanto sem perda de generalidade podemos supor que existe $t > 0$ tal que $af(s_1) \leq t < af(s)$. Mas isto implica que $\inf\{s : a_f(s) \leq t\} > 0$. Assim $f^*(t) > 0$, o que novamente contradiz o fato que $f^*(t) = 0$ para $t > 0$. Logo, $a_f(s) = 0$ para $s > 0$, donde pelo Lema (2.1.1) temos $f = 0$ q.t.p. Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$ então $(\lambda f)^*(t) = \inf\{s : a_{\lambda f}(s) \leq t\}$. Mas $a_{\lambda f}(s) = a_f(s/|\lambda|)$ e assim segue que $(\lambda f)^*(t) = |\lambda| f^*(t)$. Para concluirmos a proposição consideremos f, g respectivamente como em (2.13) e (2.14). Um cálculo simples nos mostra que $f^* = g^*$. Além disso para δ suficientemente pequeno temos que $\|f+g\|_{p,\infty}^* = (2+\delta)(a+2h)^{1/p}$ enquanto que $\|f\|_{p,\infty}^* = \|g\|_{p,\infty}^* = (a+2h)^{1/p}$ o que contraria a desigualdade triângular.*

$\blacksquare$

Outra observação está em considerarmos a constante $(q/p)^{\frac{1}{q}}$ em $\|f\|_{p,q}^*$. Decorre deste fato que $\|\chi_E\|_{p,q}^*$ independe de q, no qual χ_E é a função característica de E com $E \subset M$ e $\mu(E) < \infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_{p,q}^* &= \left(\frac{q}{p} \int_0^{\mu(E)} t^{(q/p)-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(t^{q/p} \Big|_0^{\mu(E)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\mu(E))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Esta igualdade nos mostra de certo modo que para p fixo, $L^{(p,q)}$ é um espaço do tipo L^p.

Teorema 2.2.3 *Se* $f \in L^{(p,q_1)}$ *e* $q_1 \leq q_2$ *então*

$$\|f\|^*_{p,q_2} \leq \|f\|^*_{p,q_1}. \tag{2.17}$$

Consequentemente temos que $L^{(p,q_1)} \subset L^{(p,q_2)}$.

Demonstração. Inicialmente consideremos o caso $q_2 = \infty$. Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e o fato que f^* é não-crescente segue que

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= f^*(t) \left(\frac{q_1}{p} \int_0^t u^{\frac{q_1}{p}-1} du \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\leq \left(\frac{q_1}{p} \int_0^t [u^{\frac{1}{p}} f^*(u)]^{q_1} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &= \|f\|^*_{p,q_1}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo na desigualdade acima temos que $\|f\|^*_{p,\infty} \leq \|f\|^*_{p,q_1}$. Vamos supor agora que $1 \leq q_2 < \infty$. Assumindo que f seja simples como em (2.3), podemos concluir que

$$\|f\|^*_{p,q} = \left(\sum_{j=1}^n c_j^q (d_j^{q/p} - d_{j-1}^{q/p}) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Consideremos $a_j = c_j^{q_2}$, $b_j = d_j^{q_2/p}$ e $\theta = q_1/q_2$. Dessa forma temos que $a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$, $b_n > ... > b_1 > b_0 = 0$ e $0 < \theta \leq 1$. Pelo Lema C.1.1 segue que

$$\|f\|^*_{p,q_2} = \left(\sum_{j=1}^n a_j \left(b_j - b_{j-1} \right) \right)^{1/q_2} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^\theta \left(b_j^\theta - b_{j-1}^\theta \right) \right)^{1/(\theta q_2)} = \|f\|^*_{p,q_1}.$$

Se f é mensurável, pelo Teorema 1.2.2 podemos aproximá-la por funções simples e pelo Teorema 1.2.3 seguido do Lema 2.1.5 concluímos o resultado.

obs.: os argumentos seguem analogamente aos encontrados na Proposição 2.2.1 e serão omitidos.

∎

A seguir, vamos enunciar dois conceitos importantes.

Definição 2.2.2 *Dizemos que um operador T definido no espaço vetorial das funções mensuráveis nas funções mensuráveis é dito sub-linear se*

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |T(f_1(x)| + |T(f_2)(x)|,$$

$$|T(\lambda f)| = |\lambda||Tf|, \ \ \forall \, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Se T satisfaz somente a primeira propriedade então dizemos que T é um operador sub-aditivo.

Definição 2.2.3 *Dizemos que uma norma $\| \ \|$ em (X, M, μ) preserva ordem se $\|g\| \leq \|f\|$ sempre que $|g(x)| \leq |f(x)|$ μ-q.t.p. para $f, g : X \to \mathbb{C}$.*

Em vista da definição acima segue o resultado:

Proposição 2.2.3 *Suponhamos que $\| \ \|$ seja uma norma que preserva ordem definida sobre as funções simples de M. Seguem as afirmações:*
(i) *se $\|\chi_E\| \leq [\mu(E)]^{1/p}$ para todo $E \in M$ então $\|f\| \leq \|f\|^*_{p,1}$ para toda função simples f.*
(ii) *se $[\mu(E)]^{1/p} \leq \|\chi_E\|$ para todo $E \in M$ então $\|f\|^*_{p,\infty} \leq \|f\|$ para toda função simples f.*

Demonstração.
(i) Como $\| \ \|$ preserva ordem é suficiente mostrarmos quando $f = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ é uma função simples não-negativa. De fato como $g^* = f^*$ para $g = |f|$ segue que $\|g\|^*_{p,q} = \|f\|^*_{p,q}$ e portanto uma vez provado o resultado para f simples não-negativa temos

$$\|f\| \leq \|g\| \leq \|g\|^*_{p,1} = \|f\|^*_{p,1}.$$

Assim, podemos assumir que $c_1 > c_2 > ... > c_n > c_{n+1} = 0$ e $E_i \cap E_k = \emptyset$ se $i \neq k$. Seja $f_j = b_j \chi_{F_j}$, no qual $F_j = \bigcup_{i=1}^{j} E_i$ e $b_j = c_j - c_{j+1}$. Logo temos que para todo $t > 0$,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} f^*_j(t). \tag{2.18}$$

De fato, por (2.5) temos que

$$
\begin{aligned}
f^*(t) &= \sum_{j=1}^n c_j \chi_{[d_{j-1},d_j)} = \sum_{j=1}^n c_j \left(\chi_{(0,d_j)} - \chi_{(0,d_{j-1})}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n (b_j + c_{j+1}) \left(\chi_{(0,d_j)} - \chi_{(0,d_{j-1})}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n b_j \chi_{(0,d_j)} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} c_{j+1}\chi_{(0,d_j)} - \sum_{j=2}^n c_j \chi_{(0,d_{j-1})}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n b_j \chi_{(0,d_j)} = \sum_{j=1}^n f_j^*.
\end{aligned}
$$

Seguindo os mesmos cálculos podemos provar que $f = \sum_{j=1}^n f_j$. Assim concluimos a prova já que

$$
\begin{aligned}
\|f\| &\le \sum_{j=1}^n \|f_j\| = \sum_{j=1}^n b_j \left\|\chi_{E_j}\right\|\\
&\le \sum_{j=1}^n b_j [\mu(E_j)]^{1/p} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p} f_j^*(t)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p}\sum_{j=1}^n f_j^*(t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p} f^*(t)\frac{dt}{t} = \|f\|_{p,1}^*.
\end{aligned}
$$

(ii) Da identidade (2.5) sabemos que

$$\|f\|_{p,\infty}^* = \sup_{1\le j\le n} d_j^{\frac{1}{p}} c_j.$$

Suponhamos que o supremo seja atingido em $j = k$. Se $g = c_k\chi_{F_k}$ então $0 \le g \le f$ e assim,

$$\|f\|_{p,\infty}^* = d_k^{\frac{1}{p}} c_k = c_k[\mu(F_k)]^{\frac{1}{p}} \le c_k \left\|\chi_{F_k}\right\| = \|g\| \le \|f\|.$$

■

Em vista da Definição 2.2.1 é natural denominarmos o espaço $L^{(p,\infty)}$, o maior espaço que obedece esta propriedade, como o L^p fraco. De fato, pelo Teorema 2.2.1 temos que a desigualdade (2.6) é equivalente a

$$\|Tf\|_{p,\infty}^* \le C\|f\|_r.$$

Como $\|f\|_r = \|f\|_{r,r}^*$ para $r \geq 1$, segue pelo Teorema 2.2.3 que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_{r,1}^* .$$

Logo se T é do tipo fraco (r, p) então

$$\|Tf\|_{p,\infty}^* \leq C \|f\|_{r,1}^* , \tag{2.19}$$

para toda f pertencente ao domínio de T. Uma aplicação bastante importante das desigualdades do tipo fraco é o chamado Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz.

Teorema 2.2.4 *Seja T um operador sub-aditivo do tipo fraco (r_j, p_j), com $1 \leq r_j \leq p_j \leq \infty$ para $j = 0, 1$ e $p_0 \neq p_1$. Então T é do tipo fraco (r, p), no qual*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} \quad \textit{para} \ \ 0 < \theta < 1.$$

O teorema acima será demonstrado num caso mais geral. Entretanto, em virtude da parte (ii) da Proposição 2.2.3, vamos mostrar que as hipóteses do teorema de interpolação acima podem ser enfraquecidas.

Teorema 2.2.5 *Seja T um operador linear definido no conjunto das combinações linear finita de funções características χ_E, com $E \subset M$ de medida finita, que transforma este num espaço vetorial munido de uma norma $\| \ \|$ que preserva ordem. Se*

$$\|T\chi_E\| \leq C \|\chi_E\|_{r,1}^* = C \left[\mu(E)\right]^{\frac{1}{r}} , \tag{2.20}$$

no qual $C > 0$ independe de E, então $\exists$ constante $A > 0$ tal que $\|Tf\| \leq A \|f\|_{r,1}^*$ para toda f no domínio de T.

Demonstração. Se $f \geq 0$ pertence ao domínio de T, nós podemos representá-la como $f = \sum_{j=1}^{n} f_j$, analogamente como na demonstração da Proposição 2.2.3.

Então

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n} Tf_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|Tf_j\| \\ &\leq c\sum_{j=1}^{n} b_j \left\|\chi_{F_j}\right\|_{r,1}^{*} = c\sum_{j=1}^{n} b_j \left[\mu(F_j)\right]^{\frac{1}{r}} \\ &= c\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r}\int_0^\infty t^{\frac{1}{r}} f_k^*(t)\frac{dt}{t} = c\,\|f\|_{r,1}^{*}\end{aligned}$$

Se f não é positiva, podemos decompor $f = f^+ - f^-$ tal que $f^+, f^- \geq 0$. Assim, como $(f^+)^*, (f^-)^* \leq f^*$ segue que

$$\|Tf\| \leq c\left(\left\|f^+\right\|_{r,1}^{*} + \left\|f^-\right\|_{r,1}^{*}\right) \leq 2c\,\|f\|_{r,1}^{*}.$$

Se $f = f_1 + if_2$ segue analogamente ao caso anterior que

$$\|Tf\| \leq 2c\left(\|f_1\|_{r,1}^{*} + \|f_2\|_{r,1}^{*}\right) \leq 4c\,\|f\|_{r,1}^{*}.$$

■

Observemos que o item (i) da Proposição 2.2.3 é um caso especial do teorema acima quando T é o operador identidade. Além disso, vemos que o resultado também é válido se T é um operador sub-linear.

O teorema de interpolação que iremos enunciar é consequência de uma clássica desigualdade conhecido como a *Desigualdade de Hardy*.

Lema 2.2.2 *Se $q \geq 1$, $r > 0$ e g é uma função não-negativa definida em $(0,\infty)$ então*

(i) $\displaystyle\left(\int_0^\infty \left[\int_0^t g(u)du\right]^q t^{-r-1}dt\right)^{1/q} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty [ug(u)]^q\, u^{-r-1}du\right)^{1/q}.$

(ii) $\displaystyle\left(\int_0^\infty \left[\int_t^\infty g(u)du\right]^q t^{r-1}dt\right)^{1/q} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty [ug(u)]^q\, u^{r-1}du\right)^{1/q}.$

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que (i) implica (ii). Aplicando $g_1(u) = u^{-2}g(u^{-1})$ em (i) temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left[\int_0^t g_1(u)du\right]^q t^{-r-1}dt &= \int_0^\infty \left[\int_{t^{-1}}^\infty g(v)dv\right]^q t^{-r-1}dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty g(v)dv\right]^q s^{r-1}ds.\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\int_s^\infty g(v)dv\right]^q s^{r-1}ds &= \int_0^\infty \left[\int_0^t g_1(u)du\right]^q t^{-r-1}dt \\
&\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{1/q} \int_0^\infty [ug_1(u)]^q u^{-r-1}du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{1/q} \int_0^\infty [vg(v)]^q v^{r-1}dv.
\end{aligned}
$$

Portanto, basta demonstrarmos (i). Utilizando a Desigualdade de Jensen's (vide Proposição C.1.2) com $X = (0,t)$, $f(u) = g(u)u^{-(r/q)}$,$\phi(x) = |x|^q$ e $d\mu(u) = u^{(r/q)-1}du$ nós obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left[\int_0^t g(u)du\right]^q &= \left[\int_0^t g(u)u^{1-(r/q)}u^{(r/q)-1}du\right]^q \\
&\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r\left(1-\frac{1}{q}\right)} \int_0^t [g(u)]^q u^{q-r-1+(r/q)}du.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{-r-1}\left[\int_0^t g(u)du\right]^q dt &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty t^{-1-\frac{r}{q}} \left[\int_0^t [g(u)]^q u^{q-r-1+(r/q)}du\right] dt \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty [g(u)u]^q u^{-r-1+(r/q)} \left(\int_u^\infty t^{-1-(r/q)}dt\right) du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q} \left(\int_0^\infty [ug(u)]^q u^{-r-1}du\right),
\end{aligned}
$$

sendo a segunda passagem decorrente ao Teorema de Fubini-Tonelli. Tomando a raíz q-ésima, obtemos a desigualdade desejada.

■

Se f é uma função μ-mensurável, um truncamento de f é uma função g dada por $g(x) = f(x)$ se $r_1 < |f(x)| \leq r_2$ e $g(x) = 0$ caso contrário, no qual r_1 e r_2 são reais não-negativos.

Definição 2.2.4 *Dizemos que um operador sub-aditivo T é do tipo fraco restrito (r,p) se satisfaz (2.19) para toda $f \in D \cap L^{(r,1)}$. Aqui supomos que D é o domínio de T que contém todos os trucamentos dos seus membros, bem como quaisquer combinação linear finita de funções características de conjuntos de medida finita.*

A seguir, vamos demonstrar um dos resultados mais importantes dessa seção.

Teorema 2.2.6 *Suponhamos que T seja um operador sub-aditivo do tipo fraco restrito (r_j, p_j), $j = 0, 1$ com $r_0 < r_1$ e $p_0 \neq p_1$. Então existe uma constante $B = B_\theta > 0$ tal que*

$$\|Tf\|_{p,q}^* \leq B \|f\|_{r,q}^* \tag{2.21}$$

para $\forall\ f \in D \cap L^{(r,q)}$ e $1 \leq q \leq \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} \quad e \ \ 0 < \theta < 1.$$

Demonstração. Definimos para $f \in D \cap L^{(r,q)}$

$$f^t(x) = \begin{cases} f(x) & se \ \ |f(x)| > f^*(t^\gamma) \\ 0 & se \ \ |f(x)| \leq f^*(t^\gamma) \end{cases}$$

e $f_t(x) = f(x) - f^t(x)$, no qual

$$\gamma = \frac{p_0^{-1} - p^{-1}}{r_0^{-1} - r^{-1}} = \frac{p^{-1} - p_1^{-1}}{r^{-1} - r_1^{-1}}.$$

Logo, podemos escrever

$$(f^t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s) & se \ \ 0 < s < t^\gamma \\ 0 & se \ \ s \geq t^\gamma. \end{cases} \tag{2.22}$$

De fato, temos que se $0 < w < f^*(t^\gamma)$ então

$$\left\{x \in X : |f^t(x)| > w\right\} = \left\{x \in X : |f(x)| > f^*(t^\gamma)\right\},$$

e analogamente se $w \geq f^*(t^\gamma)$ segue que

$$\left\{x \in X : |f^t(x)| > w\right\} = \left\{x \in X : |f(x)| > w\right\}.$$

Assim a função de distribuição de f^t é dada por

$$a_{f^t}(w) = \begin{cases} a_f(f^*(t^\gamma)) & se \ \ 0 < w < f^*(t^\gamma) \\ a_f(w) & se \ \ w \geq f^*(t^\gamma). \end{cases}$$

Pela propriedade (i) do Lema (2.1.4) e pelo fato que f^* é não-crescente segue

$$(f^t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s) & se \ \ 0 < s < t^\gamma \\ 0 & se \ \ s \geq t^\gamma. \end{cases} \tag{2.23}$$

Pela definição de f_t segue que

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & se \ \ |f(x)| > f^*(t^\gamma) \\ f(x) & se \ \ |f(x)| \leq f^*(t^\gamma). \end{cases}$$

Analogamente ao caso anterior podemos escrever

$$a_{f_t}(w) = \begin{cases} a_f(w) - a_f(f^*(t^\gamma)) & se \ \ 0 < w < f^*(t^\gamma) \\ 0 & se \ \ w \geq f^*(t^\gamma), \end{cases}$$

e assim temos

$$(f_t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(t^\gamma) & se \ \ 0 < s < t^\gamma \\ f^*(s) & se \ \ s \geq t^\gamma. \end{cases} \tag{2.24}$$

Como o operador é sub-aditivo então $|Tf(y)| \leq |Tf_t(y)| + |Tf^t(y)|$ q.t.p. para $y \in N$. Além disso se $w = u + v > 0$ temos

$$\{y \in N/|Tf(y)| > w\} \subset \{y \in N/|Tf_t(y)| > u\} \cup \left\{y \in N/|Tf^t(y)| > v\right\}.$$

Tomando $u = (Tf_t)^*(s)$ e $v = (Tf^t)^*(s)$ para $s > 0$, além de denotarmos por λ, λ_t e λ^t as funções de distribuição de Tf, Tf_t e Tf^t respectivamente segue da inclusão acima e da parte (i) do Lema 2.1.4 que

$$\lambda\left((Tf_t)^*(s) + (Tf^t)^*(s)\right) \leq \lambda_t\left((Tf_t)^*(s)\right) + \lambda^t\left((Tf^t)^*(s)\right) \leq 2s.$$

Dessa forma, obtemos que para todo $s > 0$

$$(Tf)^*(2s) \leq (Tf_t)^*(s) + (Tf^t)^*(s). \tag{2.25}$$

1^0 caso) $r_1 < \infty$ e $q < \infty$.

Da desigualdade (2.25) e de uma mudança de variáveis nós obtemos

$$\begin{aligned} \|Tf\|^*_{p,q} &= (q/p)^{1/q}\left(\int_0^\infty [t^{1/p}(Tf^*(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= (q/p)^{1/q}2^{1/p}\left(\int_0^\infty [t^{1/p}(Tf^*(2t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &\leq (q/p)^{1/q}2^{1/p}\left\{\left(\int_0^\infty [t^{1/p}(Tf_t)^*(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right. \\ &\left. + \left(\int_0^\infty [t^{1/p}(Tf^t)^*(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como T é do tipo fraco restrito (r_0, p_0) e (r_1, p_1) temos que existe $c_0, c_1 > 0$ tal que para todo $t > 0$

$$t^{1/p_0}(Tf^t)^*(t) \leq c_0 \left\|f^t\right\|^*_{r_0,1}, \tag{2.27}$$

$$t^{1/p_1}(Tf_t)^*(t) \leq c_1 \left\|f_t\right\|^*_{r_1,1}. \tag{2.28}$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left\|Tf^t\right\|^*_{p,q} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p}(Tf^t)^*(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq c_0 \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \left\|f^t\right\|^*_{r_0,1}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= c_0 r_0^{-1} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \left(\int_0^\infty s^{\frac{1}{r_0}-1}(f^t)^*(s)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq c_0 r_0^{-1} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \left(\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_0}-1}f^*(s)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= \frac{c_0|\gamma|^{-\frac{1}{q}}}{r_0} \left(\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o}} \left(\int_0^u s^{\frac{1}{r_0}-1}f^*(s)ds\right)\right]^q \frac{du}{u}\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

no qual a quarta desigualdade decorre de (2.23) e a quinta por uma mudança de variáveis. Além disso a última integral está na forma

$$\left(\int_0^\infty u^{q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)-1} \left[\int_0^u s^{\frac{1}{r_0}-1}f^*(s)ds\right]^q du\right)^{1/q}.$$

Como $q \geq 1$, $+q\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right) > 0$ e f^* é positiva segue pela parte (i) do Lema (2.2.2) que a integral acima é majorada por

$$\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)^{-1} \left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{r}}f^*(s)]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{r_0}{1-(r_0/r)} \left(\frac{r}{q}\right)^{1/q} \|f\|^*_{r,q}.$$

Assim,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left\|Tf^t\right\|^*_{p,q} \leq \frac{c_0}{1-(r_0/r)} \left(\frac{r}{|\gamma|q}\right)^{1/q} \|f\|^*_{r,q}. \tag{2.29}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|Tf_t\|^*_{p,q} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p}(Tf_t)^*(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq c_1 \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \|f_t\|^*_{r_1,1}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= c_1 r_1^{-1} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1}(f_t)^*(s)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq c_1 r_1^{-1} \left\{\left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_1}-1} f^*(t^\gamma)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_{t^\gamma}^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1} f^*(s)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\}.
\end{aligned}$$

Tomando a primeira parcela da última estimativa temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_1}-1} f^*(t^\gamma)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} &= r_1 \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} f^*(t^\gamma) t^{\frac{\gamma}{r_1}}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq r_1 |\gamma|^{-\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{r}} f^*(s)]^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\
&= r_1 \left(\frac{r}{|\gamma| q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^*_{r,q},
\end{aligned}$$

no qual a segunda desigualdade é dada por mudança de variáveis $t^\gamma = s$. Agora, por uma mudança de variáveis segue que

$$\left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_{t^\gamma}^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1} f^*(s)ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

é dada por

$$|\gamma|^{-\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left[\int_u^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1} f^*(s)\right]^q u^{q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)-1} du\right)^{1/q}.$$

Pelo item (ii) do Lema (2.2.2) temos que a última equação é majorada por

$$|\gamma|^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^{-1} \left(\int_0^\infty \left[s^{\frac{1}{r}} f^*(s)\right]^q \frac{du}{u}\right)^{1/q} = \frac{r}{1-(r/r_1)} \left(\frac{r}{|\gamma| q}\right)^{1/q} \|f\|^*_{r,q}.$$

Assim,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \|Tf_t\|^*_{p,q} \leq \left(\frac{c_1 r_1}{r_1 - r}\right) \left(\frac{r}{|\gamma| q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^*_{r,q}. \tag{2.30}$$

Aplicando (2.29) e (2.30) na desigualdade (2.26) concluímos que

$$\|Tf\|^*_{p,q} \leq 2^{1/p} \left(\frac{rc_0}{r-r_0} + \frac{c_1 r_1}{r_1 - r}\right) \left(\frac{r}{|\gamma| p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^*_{r,q}. \tag{2.31}$$

2^0 caso) $r_1 < \infty$ e $q = \infty$

Se $t > 0$ temos por (2.25), (2.27) e (2.28) que

$$\begin{aligned} (2t)^{1/p}(Tf)^*(2t) &\leq (2)^{1/p}\left(t^{1/p}(Tf^t)^*(t) + t^{1/p}(Tf_t)^*(t)\right) \\ &\leq (2)^{1/p}\left(c_0 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\left\|f^t\right\|^*_{r_0,1} + c_1 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\left\|f_t\right\|^*_{r_1,1}\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Pela desigualdade (2.23) e tomando a norma $\| \ \|^*_{r,\infty}$ obtemos

$$\begin{aligned} r_0 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\left\|f^t\right\|^*_{r_0,1} &= t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^\infty s^{\frac{1}{r_0}-1}(f^t)^*(s)ds \\ &\leq t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_0}-1}f^*(s)ds \\ &= t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^{t^\gamma} s^{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)-1}s^{\frac{1}{r}}f^*(s)ds \\ &\leq \|f\|^*_{r,\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}t^{\gamma\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)^{-1} \\ &= \|f\|^*_{r,\infty}\frac{r_0}{1-(r_0/r)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} r_1 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\left\|f_t\right\|^*_{r_1,1} &= t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_0^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1}(f_t)^*(s)ds \\ &\leq t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\left\{\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_1}-1}f^*(t^\gamma)ds + \int_{t^\gamma}^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1}f^*(s)ds\right\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Mas,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_1}-1}f^*(t^\gamma)ds &= r_1 f^*(t^\gamma)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}t^{\frac{\gamma}{r_1}} \\ &\leq r_1\|f\|^*_{r,\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}t^{\gamma\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)} \\ &= r_1\|f\|^*_{r,\infty} \end{aligned}$$

e além disso,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_{t^\gamma}^\infty s^{\frac{1}{r_1}-1}f^*(s)ds &= t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_{t^\gamma}^\infty s^{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-1}s^{\frac{1}{r}}f^*(s)ds \\ &\leq \|f\|^*_{r,\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_{t^\gamma}^\infty s^{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-1}ds \\ &= \|f\|^*_{r,\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}t^{\gamma\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^{-1} \\ &= \|f\|^*_{r,\infty}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Substituindo as parcelas em (2.32) e tomando o supremo, obtemos

$$\|Tf\|^*_{p,\infty} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{c_0}{1-(r_0/r)} + c_1 + \frac{c_1 r}{r_1 - r}\right)\|f\|^*_{r,\infty}.$$

3^0 caso) $r_1 = \infty$ e $q = \infty$

Analogamente a desigualdade (2.32) temos

$$\begin{aligned} (2t)^{1/p}(Tf)^*(2t) &\leq (2)^{1/p}\left(t^{1/p}(Tf^t)^*(t) + t^{1/p}(Tf_t)^*(t)\right) \\ &\leq (2)^{1/p}\left(c_0 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\left\|f^t\right\|^*_{r_0,1} + c_1 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\left\|f_t\right\|^*_{\infty,\infty}\right), \end{aligned} \tag{2.35}$$

posto que (2.27) é válido e (2.28) é substituido por

$$(Tf_t)^*(t) \leq c_1 t^{-\frac{1}{p_1}}\left\|f_t\right\|^*_{\infty,\infty}.$$

Pela estimativa de f_t em (2.24) segue que $\|f_t\|^*_{\infty,\infty} \leq f^*(t^\gamma)$ e assim,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\left\|f_t\right\|^*_{\infty,\infty} &\leq t^{\frac{\gamma}{r}} f^*(t^\gamma) t^{\frac{1}{p}-\frac{\gamma}{r}} \\ &\leq \left\|f\right\|^*_{r,\infty}. \end{aligned}$$

Como a primeira parcela da última desigualdade de (2.35) é estimado em (2.33) segue que

$$\left\|Tf\right\|^*_{p,\infty} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{c_0}{1-(r_0/r)} + c_1\right)\left\|f\right\|^*_{r,\infty}.$$

■

A seguir, daremos uma aplicação do Teorema de Interpolação 2.2.6. A desigualdade de Hausdorff-Young, Proposição 1.4.1, pode ser melhorada como segue o resultado.

Corolário 2.2.2 *Se $f \in L^p$ para $1 < p \leq 2$ então $\hat{f} \in L^{(p',p)}$ e existe $B = B_p$ tal que*

$$\left\|\hat{f}\right\|^*_{p',p} \leq B\left\|f\right\|_p, \tag{2.36}$$

no qual p' é o expoente conjugado de p.

Demonstração. Inicialmente observamos que a transformada de Fourier é um operador linear. Da Propriedade (1.6) segue que

$$\left\|\hat{f}\right\|^*_{\infty,\infty} = \left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \left\|f\right\|_1 = \left\|f\right\|_{1,1}.$$

Assim, o operador transformada de Fourier $\widehat{\ }$ é do tipo fraco restrito (r_0, p_0) para $r_0 = 1$ e $p_0 = \infty$. Pela Proposição 1.4.1 e Teorema 2.2.3 observamos que

$$\left\|\hat{f}\right\|^*_{p',\infty} \leq \left\|\hat{f}\right\|^*_{p',p'} = \left\|\hat{f}\right\|_{p'} \leq \|f\|_p = \|f\|^*_{p,p} \leq \|f\|^*_{p,1}.$$

Logo, o operador $\widehat{\ }$ é do tipo fraco restrito (r_1, p_1) para $r_1 = p$ e $p_1 = p'$. Como estamos nas hipóteses do Teorema 2.2.6 temos que existe $B > 0$ tal que

$$\left\|\hat{f}\right\|^*_{s,q} \leq B \|f\|^*_{t,q}$$

para todo $1 \leq q \leq \infty$ e

$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p'}, \quad \frac{1}{t} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p}.$$

Assim, $1 < t \leq 2$ e $t^{-1} + s^{-1} = 1$ e tomando $q = t$ concluímos que

$$\left\|\hat{f}\right\|^*_{s,t} \leq B \|f\|_{t,t} = B \|f\|_t$$

Renomeando $t = p$ segue o resultado.

■

Como objetivo do resto da seção, vamos mostrar que existe uma norma em $L^{(p,q)}$ comparável com $\| \ \|^*_{p,q}$ que torna $L^{(p,q)}$ um espaço de Banach. Vamos considerar o espaço de medida $(\mathbb{R}^n, B, m)$, no qual B é a σ-álgebra de Borel e m a medida de Borel-Lebesgue.

Lema 2.2.3 *Se $E \in M$, $F_s = \{x \in X : |f(x)| > s\}$ para $s > 0$ e $\lambda(s) = a_f(s)$, então*

(i) $\displaystyle\int_E |f| d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t) dt.$

(ii) $\displaystyle\int_{F_s} |f| d\mu = \int_0^{\lambda(s)} f^*(t) dt.$

(iii) *Se $\mu(X) \geq t > 0$ então existe $E_t \subset X$ tal que $\mu(E_t) = t$ e*

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_0^t f^*(u) du.$$

Demonstração.

(i) Sabemos que se $|g| \leq |f|$ então $g^* \leq f^*$. Logo se $g = f\chi_E$ então

$$\int_0^{\mu(E)} g^*(t)dt \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t)dt. \tag{2.37}$$

Agora, $g^*(t) = 0$ se $t > \mu(E)$, pois $a_g(s) \leq \mu(E)$ para $s > 0$. Pela Proposição 2.2.1 para $p = 1$ segue que

$$\int_E |f|d\mu = \int_M |g|d\mu = \int_0^{\infty} g^*(t)dt = \int_0^{\mu(E)} g^*(t)dt. \tag{2.38}$$

Pela desigualdade (2.37) e pela igualdade (2.38) obtemos o resultado.

(ii) Seja

$$g(t) = \begin{cases} f^*(t) & \text{para } \ 0 < t < \lambda(s) \\ 0 & \text{para } \ \lambda(s) \leq t, \end{cases}$$

e $h = f\chi_{F_s}$. Afirmação: g e h possuem a mesma função de distribuição. Suponhamos que f seja simples como em (2.3). Se $s \geq c_1$ o resultado decorre imediatamente. Assim, podemos considerar $c_{j+1} \leq s < c_j$ para algum $1 \leq j \leq n$. Como $\lambda(s) = d_j$, por (2.5) segue que

$$g(t) = \begin{cases} c_k & \text{se } \ d_{k-1} \leq t < d_k \ \text{ para } \ 1 \leq k \leq j \\ 0 & \text{para } \ d_j \geq t. \end{cases}$$

Além disso, $h = f\chi_{F_s} = \sum_{k=1}^{j} c_k \chi_{E_k}$ já que $F_s = \bigcup_{k=1}^{j} E_k$. Desa forma, temos

$$a_g(s) = d_j = a_h(s)$$

Se f é mensurável, pelo Teorema 1.2.2 existe uma sequência $\{f_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq ... \leq |f|$, $f_n \to f$ pontualmente. Assim, pela parte (ii) do Lema 2.1.5 segue que $g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$ com

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n^*(t) & \text{para } \ 0 < t < \lambda(s) \\ 0 & \text{para } \ \lambda(s) \leq t, \end{cases}$$

Agora, pela parte (i) do Lema (2.1.5) temos

$$a_g(s) = \lim_{n\to\infty} a_{g_n}(s) = \lim_{n\to\infty} a_{h_n}(s) = a_h(s)$$

no qual $h_n = f_n \chi_{F_s}$. Pela Proposição 2.2.1 para $p = 1$ e a afirmação acima, concluimos que

$$\int_{F_s} |f| d\mu = \int_M |h| d\mu = \int_0^\infty g(t)dt = \int_0^{\lambda(s)} f^*(t)dt.$$

(iii) Seja $0 < t < \mu(X)$, $G = \{x \in X : |f(x)| > f^*(t)\}$ e $H = \{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t)\}$. Afirmação: $\mu(G) \leq t \leq \mu(H)$. De fato, $\mu(G) \leq t$ segue diretamente do item (i) do Lema (2.1.4). Por outro lado, para provar a outra desigualdade vamos supor inicialmente f simples como em (2.3). Se $d_n \leq t$ então por (2.5) temos $\mu(H) = \mu(X) \geq t$. Assim, sem perda de generalidade, suponhamos que $d_{j-1} \leq t < d_j$ para algum $1 \leq j < n$. Logo temos que $\mu(H) = \sum_{k=1}^{j} \mu(E_k) = d_j > t$. Agora se f é uma função mensurável, pelo Teorema 1.2.2 existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq ... \leq |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente. Pelo item (i) do Lema (2.1.5) segue que

$$t \leq \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |\phi_m(x)| \geq f^*(t)\}\right) = \mu(H).$$

Como estamos considerando μ particular, medida de Borel-Lebesgue, podemos encontrar $E_t \in M$ tal que $G \subset E_t \subset H$ e $\mu(E_t) = t$. Se $h = f\chi_{E_t}$ então $h^* = f^*$ restrito a $(0,t)$ e $h(u) = 0$ para $t \leq u$ (analogamente provado no item (ii) anterior). Dessa forma, pela Proposição 2.2.1 com p=1 temos

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_M |h| d\mu = \int_0^\infty h^*(t)dt = \int_0^t f^*(t)dt.$$

∎

Como consequência dos itens (i) e (ii) do lema anterior segue que

$$\sup_{E\in M, \mu(E)\leq t} \int_E |f| d\mu = \int_0^t f^*(u)du. \tag{2.39}$$

Proposição 2.2.4 *$m_f(t) = t^{-1}\int_0^t f^*(u)du$ é uma norma em L^p para $1 \leq p \leq \infty$ e $t > 0$.*

Demonstração. De fato se $\mu(E) \leq t$ então pela desigualdade de Holder

$$\int_E |f| d\mu = \int_X \chi_E |f| d\mu \leq \|\chi_E\|_q \|f\|_p = t^{\frac{1}{q}} \|f\|_p ,$$

no qual q é o expoente conjugado de p. Assim, pela identidade (2.39), m_f está bem definida. Se $m_f = 0$ então $f^*(u) = 0$ para $0 < u < t$. Como f^* é não-crescente segue que $f^* = 0$ e portanto $f = 0$ μ-q.t.p. Além disso, da identidade (2.39) segue que $m_{\lambda f} = |\lambda| m_f$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $m_{f+g} \leq m_f + m_g$, posto que

$$\sup_{E \in M, \mu(E) \leq t} \int_E |f+g| d\mu \leq \sup_{E \in M, \mu(E) \leq t} \int_E |f| d\mu + \sup_{E \in M, \mu(E) \leq t} \int_E |g| d\mu.$$

■

Proposição 2.2.5 *Se f é mensurável então*

$$t f^*(t) \leq \int_0^t f^*(u) du.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que f seja simples como em (2.3). Se $t \geq d_n$ então $f^*(t) = 0$ e a desigualdade é válida. Agora sem perda de generalidade, suponhamos que $d_{j-1} \leq t < d_j$ para algum $1 \leq j \leq n$. Se $t = d_{j-1}$ então segue de (2.5) que

$$t f^*(t) = c_j d_{j-1} \leq \sum_{i=1}^{j-1} c_i (d_i - d_{i-1}) = \int_0^t f^*(u) du.$$

Se $d_{j-1} < t < d_j$ então temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t f^*(u) du &= \sum_{i=0}^{j-2} \int_{d_i}^{d_{i+1}} f^*(u) du + \int_{d_{j-1}}^t f^*(u) du \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} c_i \mu(E_i) + c_j (t - d_{j-1}). \end{aligned}$$

Mas $t f^*(t) = t c_j$ e portanto a desigualdade é válida se

$$c_j d_{j-1} \leq \sum_{i=1}^{j-1} c_i \mu(E_i),$$

o que é válido já que $c_1 > c_2 > ... > c_n > c_{n+1} = 0$. Agora se f é mensurável, a desigualdade decorre imediatamente dos Teoremas 1.2.2, 1.2.3 e da Proposição 2.1.5.

$\blacksquare$

Passaremos a denominar m_f simplesmente por m. Assim segue da proposição anterior que $f^*(t) \leq m(t)$. Se nós definirmos

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} m(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

quando $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, e

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} m(t) < \infty$$

quando $1 \leq p \leq \infty$ e $q = \infty$, então temos que

$$\|f\|_{p,q}^* \leq \|f\|_{p,q}. \tag{2.40}$$

A vantagem de definirmos $\|f\|_{p,q}$ ao invés de $\|f\|_{p,q}^*$ é o fato da primeira ser uma norma. Isso decorre diretamente da Proposição 2.2.4. Se $p = 1$, pela Proposição 2.2.1 temos que $\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_1$. Além da desigualdade (2.40) segue que se $1 < p \leq \infty$ então $\|f\|_{p,q}^*$ é equivalente a $\|f\|_{p,q}$.

Teorema 2.2.7 *Se $f \in L^{(p,q)}$, $1 < p \leq \infty$, então*

$$\|f\|_{p,q}^* \leq \|f\|_{p,q} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{p,q}^*.$$

Demonstração. A primeira desigualdade decorre de (2.40), como tínhamos observado. Agora, se $1 < p \leq \infty$ e $q = \infty$ segue que

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}} m(t) &= t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t u^{-\frac{1}{p}} u^{\frac{1}{p}} f^*(u)du \\ &\leq \|f\|_{p,\infty}^* t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t u^{-\frac{1}{p}} du \\ &= \frac{p}{p-1}\|f\|_{p,\infty}^*, \end{aligned}$$

no qual a desigualdade é obtida tomando o supremo em t. Se $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$ então segue pelo item (i) do Lema 2.2.2 que

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,q} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty \left[\int_0^t f^*(u)du\right]^q t^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty [uf^*(u)]^q u^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} du\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{p}{p-1}\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [u^{\frac{1}{p}} f^*(u)]^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{p}{p-1}\|f\|_{p,q}^*, \end{aligned}$$

e assim concluímos o teorema.

■

Teorema 2.2.8 *$L^{(p,q)}$ é um espaço de Banach com norma $\| \, \|_{p,q}$ para $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$.*

Demonstração. Como já vimos anteriormente, basta apenas demonstramos que $L^{(p,q)}$ é completo. Se $p = \infty$ já sabemos que $L^{(\infty,\infty)} = L^{\infty}$ e como L^{∞} é completo, segue o resultado. Agora, seja $1 < p < \infty$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^{(p,q)}$. Pelos Teoremas 2.2.7, 2.2.3 e 2.2.1 segue que

$$\sup_{s>0} s^p \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > s\}\right) \to 0 \quad \text{para} \;\; n, m \to \infty.$$

Assim temos que $\{f_n\}$ é de Cauchy em medida já que dado $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta^p \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}\right) \leq \epsilon_1$$

para $\epsilon_1 = \epsilon\, \delta^p$ e $n, m \geq n_0$. Logo,

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}\right) \leq \epsilon \quad \text{para} \;\; n, m \geq n_0.$$

Pelo Teorema 2.30 p.59 em [6] segue que existe f mensurável e uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ μ-q.t.p. Como $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{(p,q)}$ temos que dado $\delta > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_j\|_{p,q} < \delta$ para $j, n \geq j_0$. Para cada j fixo se $g_k = f_{n_k} - f_j$ e $g = f - f_j$ então pelo Lema de Fatou segue que

$$\int_E |g| d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E |g_k| d\mu$$

para todo conjunto mensurável E. Da identidade (2.39) e novamente pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\|g\|_{p,q} = \;& \left(\frac{q}{p} \int_0^{\infty} \left[t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t g^*(u) d\mu(u) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{q}{p} \int_0^{\infty} \liminf_{k\to\infty} \left[t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t (g_k)^*(u) d\mu(u) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{q}{p} \int_0^{\infty} \left[t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t (g_k)^*(u) d\mu(u) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \liminf_{k\to\infty} \|g_k\|_{p,q} = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_j\|_{p,q} \leq \delta
\end{aligned}$$

desde que $n_k, j \geq j_0$. Assim,

$$\|f - f_j\|_{p,q} = \|g\|_{p,q} \leq \delta \text{ para } j \geq j_0.$$

■

Observação 2.2.1 *No caso p=1, o espaço $L^{(p,q)}$ não pode ser normado para $1 < q \leq \infty$. Vamos mostrar um contra exemplo no caso $q = \infty$. Em $\mathbb{R}$ vamos considerar a sequência de funções $\{f_k\}$ definidas por $f_k(x) = |x-k|^{-1}$. Então cada $f_k \in L^{(1,\infty)}$ e $\|f_k\|^*_{1,\infty}$ independe de k. Seja $f = \sum_{k=1}^{N} f_k$. Se $\|\ \|$ é uma norma equivalente a $\|\ \|^*_{1,\infty}$ então temos que $\|f\| \leq C_1 N$, para alguma constante C_1. Entretanto, $f(x) \geq C_2 \ln N$ para $0 \leq x \leq N$ e então $\|f\|^*_{1,\infty} \geq C_2 N \ln N$ o que contradiz quando $N \to \infty$.*

2.3 O espaço $\widetilde{L}^p$

O objetivo dessa seção está em definirmos um novo espaço, denominado $\widetilde{L}^p$, que será uma extensão do espaço L^p. Na Seção 4.1 do Capítulo 4 veremos uma aplicação desses espaços no cálculo de estimativas integrais.

Em vista da Definição (2.2.1) segue que se T é o operador identidade e $r = p$ então

$$\sup_{s>0} s[a_f(s)]^{\frac{1}{p}} \leq A < \infty \Rightarrow a_f(s) \leq \left(\frac{A}{s}\right)^p \quad \forall s > 0. \tag{2.41}$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $A = \|f\|_{L^p}$. Quando T for o operador identidade e $r = p$ dizemos que uma função é do tipo fraco se o segundo membro da implicação (2.41) é satisfeito. Consideremos sobre $\mathbb{R}^n$ o espaço das funções do tipo fraco (p,p) em todas menos uma variável, ou seja, se $(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^n$ para $x \in \mathbb{R}$ e $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ então para cada x fixo, $f(x, \tilde{x})$ é do tipo fraco, isto é,

$$\mu\left(\left\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} / |f(x,\tilde{x})| > s\right\}\right) \leq \left(\frac{A_x}{s}\right)^p.$$

Seja $f_x(\tilde{x}) = f(x,\tilde{x})$ e $\|f_x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_x(\tilde{x})|^p d\tilde{x}\right)^{1/p}$. Sabemos que se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $E_\infty = \left\{x \in \mathbb{R} : \|f_x\|_p = \infty\right\}$ então $\|f_x\|_p^p \in L^1(\mathbb{R})$ e assim $\mu(E_\infty) = 0$. Suponhamos agora que f_x seja do tipo fraco e seja $t > 0$. Como $f_x^*(t) = \inf\{s : a_{f_x}(s) \le t\}$ segue que se $s = \|f_x\|_p / t^{1/p}$ então

$$f_x^* \le \frac{\|f_x\|_p}{t^{1/p}}$$

desde que $a_{f_x}(s) \le t$. Mas como f_x é do tipo fraco então $a_{f_x}(\|f_x\|_p / t^{\frac{1}{p}}) \le t$. Sendo assim para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_x^*(t) \le \|f_x\|_p .$$

Logo temos que $\|f_x\|_{p,\infty} \le \|f_x\|_p$ e por consequência

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \|f_x\|_{p,\infty}^p \, dx &\le \int_{\mathbb{R}} \|f_x\|_p^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x,\tilde{x})|^p d\tilde{x}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x,\tilde{x})|^p dx d\tilde{x} \\
&= \|f\|_p^p.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Observação 2.3.1 *Pelo Teorema 2.2.3 sempre temos* $\|f_x\|_{p,\infty} \le \|f_x\|_p$.

Em vista da última desigualdade definimos o seguinte espaço:

Definição 2.3.1 *Definimos* $\widetilde{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *como o espaço das funções mensuráveis tal que*

$$\|f\|_{\widetilde{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\|f(x,\cdot)\|_{p,\infty}^*\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.43}$$

Como observado acima, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 2.3.1 *Se* $n > 1$ *então* $L^p \subset \widetilde{L}^p$ *em* $\mathbb{R}^n$.

Uma observação é que da desigualdade (2.42) segue que $\|f\|_{\widetilde{L}^p} \le \|f\|_p$.

Capítulo 3

Integrais Singulares

Neste capítulo, nós iremos tratar de operadores lineares envolvendo núcleos da forma $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$, no qual Ω é uma função homogênea de grau zero em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfazendo certas condições de integrabilidade sobre S^{n-1}. Tais operadores são chamados de Integrais Singulares. Originalmente essas integrais foram estudadas por Calderón e Zygmund no artigo *On the existence of certain singular integrals*, [2]. Como referência para este capítulo usamos [4], [17] e [16].

3.1 O Valor Principal do Núcleo K(x)

De início, vamos enunciar um conceito muito utilizado ao longo desse capítulo:

Definição 3.1.1 *Uma função f definida sobre $X \subset \mathbb{R}^n$ é dita ser homogênea de grau k em X se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$.*

Em particular, consideramos Ω uma função definida em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ homogênea de grau 0. Além disso, suponhamos que Ω tenha a propriedade de média nula, isto é,

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0.$$

Denotamos $x = |x|x'$ ou quando necessário $x = ru$ com $|x| = r$. A seguir enunciaremos uma proposição que será de suma importância para definirmos uma classe especial de operadores, aqui chamados integrais singulares.

Proposição 3.1.1 *Seja Ω uma função definida em S^{n-1}, integrável e de média nula. Então v.p. $\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ dado por*

$$v.p. \left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx, \tag{3.1}$$

para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada.

Demonstração. De fato, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$v.p. \left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx.$$

O segundo termo do lado direito pode ser estimado por

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx \right| &\leq \int_{|x|\geq 1} \frac{|\Omega(x')|}{|x|^n} \frac{(1+|x|^2)^k}{(1+|x|^2)^k} |\phi(x)| dx \\ &\leq p_{k,0}(\phi) \int_{|x|\geq 1} \frac{|\Omega(x')|}{|x|^n (1+|x|^2)^k} dx \\ &= p_{k,0}(\phi) \left\| \Omega \right\|_{L^1(S^{n-1})} \int_1^\infty \frac{1}{r(1+r^2)^k} dr, \end{aligned}$$

no qual $p_{k,0}(\phi)$ é uma seminorma de ϕ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por (1.13). Em especial se $k = 1$ então pela desigualdade anterior obtemos

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx \leq p_{1,0}(\phi) \left\| \Omega \right\|_{L^1(S^{n-1})}.$$

Agora, estimando a primeira parcela temos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} (\phi(x) - \phi(0)) dx,$$

posto que a média de Ω é nula, isto é,

$$\int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} dx = \left(\int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x) \right) \int_\epsilon^1 \frac{1}{r} dr = 0.$$

Segue da desigualdade do Valor Médio que

$$\left| \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) dx \right| \leq \sup_{|s|\leq 1} \{ |\nabla \phi(s)| \} \left\| \Omega \right\|_{L^1(S^{n-1})}.$$

para todo $\epsilon < 1$. Assim, obtemos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi(x)dx \leq \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}\sum_{|\beta|=1} p_{1,\beta}(\phi).$$

Logo, já que $v.p.\left(\dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ é um funcional linear então segue que esta distribuição é temperada.

$\blacksquare$

De posse desta proposição, podemos definir uma classe especial de operadores integrais singulares da forma

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy, \tag{3.2}$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e Ω como na proposição anterior. De fato, podemos escrever que

$$Tf = v.p.\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right) * f, \tag{3.3}$$

o que mostra que (3.2) está bem definida. A seguir, mostraremos que a condição da média de Ω em S^{n-1} ser nula é necessária para a boa definição de (3.1) e consequentemente (3.2).

Proposição 3.1.2 *Uma condição necessária para o limite em (3.1) existir é que Ω tenha média zero em S^{n-1} para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Em particular consideramos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = 1$ para $|x| \leq 2$ (vide Proposição 1.2.3). Analogamente como na demonstração da Proposição 3.1.1 podemos escrever

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|y|<1}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy + \int_{|y|\geq 1}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy.$$

Note que o segundo termo do lado direito é independe de ϵ. Escrevendo a primeira parcela em coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|y|<1}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|y|<1}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}dy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\int_{S^{n-1}}\frac{\Omega(u)}{r^n}r^{n-1}d\sigma(u)dr \\
&= \left(\int_{S^{n-1}}\Omega(u)d\sigma(u)\right)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{r}dr.
\end{aligned}$$

Assim segue que

$$\left(\int_{S^{n-1}} \Omega(u)d\sigma(u)\right) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{r}dr < \infty \Leftrightarrow \int_{S^{n-1}} \Omega(u)d\sigma(u) = 0,$$

o que demonstra a proposição.

$\blacksquare$

3.2 Distribuições Homogêneas

O objetivo dessa seção está em observarmos que o grau de homogeneidade de uma distribuição traz propriedades interessantes sobre a transformada de Fourier.

Dada uma função ϕ, consideremos $\phi_\lambda(x) = \lambda^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)$ para $\lambda \neq 0$ Se f é homogênea de grau k então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_\lambda(x)dx = \lambda^k \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx,$$

desde que a integração faça sentido. Dessa forma, podemos definir a homogeneidade de uma distribuição como segue.

Definição 3.2.1 *Uma distribuição T é homogênea de grau k se para cada função teste ϕ satisfaz,*

$$\langle T, \phi_\lambda \rangle = \lambda^k \langle T, \phi \rangle .$$

Utilizando apenas a fórmula de mudança de variáveis concluímos que (3.1) é homogênea de grau $-n$.

Proposição 3.2.1 *Se T é uma distribuição temperada homogênea de grau k, então a transformada de Fourier $\hat{T}$ é homogênea de grau $-n-k$.*

Demonstração. Pela Propriedade (1.9) obtemos que

$$\widehat{\phi_\lambda}(\xi) = \hat{\phi}(\lambda\xi) = \lambda^{-n}\hat{\phi}_{\lambda^{-1}}(\xi).$$

Assim segue que

$$\left\langle \hat{T}, \phi_\lambda \right\rangle = \left\langle T, \widehat{\phi_\lambda} \right\rangle = \lambda^{-n} \left\langle T, \hat{\phi}_{\lambda^{-1}} \right\rangle = \lambda^{-n-k} \left\langle T, \hat{\phi} \right\rangle = \lambda^{-n-k} \left\langle \hat{T}, \phi \right\rangle,$$

o que demonstra a proposição.

■

Corolário 3.2.1 *Se* $0 < \alpha < n$ *então* $(|x|^{-\alpha})\hat{}(\xi) = c_{n,\alpha}|\xi|^{\alpha-n}$ *com* $c_{n,\alpha}$ *dada por* (1.3).

Demonstração. Se $n/2 < \alpha < n$ então $|x|^{-\alpha} = f_1(x) + f_2(x)$ para $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^2$, com $f_1(x) = |x|^{-\alpha}\chi_{\{|x|\leq 1\}}(x)$. Pela proposição anterior, $(|x|^{-\alpha})\hat{}$ é homogênea de grau $\alpha - n$. Além disso, como $\hat{}$ é invariante por rotação, mais precisamente pela Propriedade (1.10), segue que $(|x|^{-\alpha})\hat{}(\xi) = \gamma|\xi|^{\alpha-n}$. Como no Exemplo (1.3.1) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{-\alpha}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{e^{-\pi|x|^2}}|x|^{-\alpha}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}(|x|^{-\alpha})\hat{}dx \\
&= \gamma\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{\alpha-n}dx.
\end{aligned}$$

Pela Identidade (1.2) e pela Proposição 1.2.1 obtemos que

$$\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\pi^{\alpha-\frac{n}{2}} = \gamma\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

donde $\gamma = c_{n,\alpha}$. Agora se $0 < \alpha < n/2$ então $n/2 < n - \alpha < n$ e assim

$$\left(|x|^{\alpha-n}\right)\hat{}(\xi) = c_{n,n-\alpha}|\xi|^{-\alpha}.$$

Tomando a transformada de Fourier inversa concluímos que $(|x|^{-\alpha})\hat{}(\xi) = c_{n,\alpha}|\xi|^{\alpha-n}$. Como sabemos que a transformada de Fourier é contínua então o resultado é válido para $\alpha = n/2$ já que $|x|^{-\alpha}$ tende a $|x|^{-n/2}$ quando $\alpha \to n/2$.

■

Teorema 3.2.1 *Se Ω é uma função como na Proposição 3.1.1 então a transformada de Fourier de v.p.* $\left(\dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ *é uma função homogênea de grau 0 dada por*

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\ln\left(\frac{1}{|u\cdot\xi'|}\right) - i\frac{\pi}{2} sgn(u\cdot\xi')\right] d\sigma(u). \tag{3.4}$$

Demonstração. Como sabemos que v.p.$\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ é homogênea de grau $-n$ então pela Proposição (3.2.1) temos que sua transformada de Fourier é homogênea de grau 0. Além disso,

$$\begin{aligned}\left\langle \left(v.p.\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)^{\widehat{}}, \phi\right\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\hat{\phi}(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\hat{\phi}(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\hat{\phi}(x)dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pelo Teorema de Fubini-Tonelli e o Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\hat{\phi}(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi\right)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]\phi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]\phi(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\hat{\phi}(x)dx &= \int_{|x|\geq 1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi\right)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\frac{1}{\epsilon}>|x|\geq 1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]\phi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\epsilon}>|x|\geq 1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]\phi(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a Identidade (3.5) por

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]\phi(\xi)d\xi,$$

no qual definimos

$$m(\xi) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx.$$

Como a transformada de Fourier do v.p. $\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ é homogênea de grau 0 então podemos considerar $|\xi| = 1$. Além disso como a média de Ω é nula segue que

$$m(\xi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{\epsilon}^{1} \left(\frac{e^{-i2\pi r u \cdot \xi} - 1}{r} \right) dr + \int_{1}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-i2\pi r u \cdot \xi}}{r} dr \right] d\sigma(u).$$

Se escrevemos $m(\xi) = I_1 - iI_2$ então

$$I_1 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{\epsilon}^{1} (\cos(2\pi r u \cdot \xi) - 1) \frac{dr}{r} + \int_{1}^{\frac{1}{\epsilon}} \cos(2\pi r u \cdot \xi) \frac{dr}{r} \right] d\sigma(u)$$

e

$$I_2 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sin(2\pi r u \cdot \xi) \frac{dr}{r} \right] d\sigma(u).$$

Se $s = 2\pi r |u \cdot \xi|$ e assumindo $u \cdot \xi \neq 0$ então pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{2\pi r|u\cdot\xi|\epsilon}^{2\pi r|u\cdot\xi|/\epsilon} sgn(u \cdot \xi) \sin(s) \frac{ds}{s} \right] d\sigma(u) \\
&= \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\lim_{\epsilon \to 0} \int_{2\pi r|u\cdot\xi|\epsilon}^{2\pi r|u\cdot\xi|/\epsilon} sgn(u \cdot \xi) \sin(s) \frac{ds}{s} \right] d\sigma(u) \\
&= \int_{S^{n-1}} \Omega(u) sgn(u \cdot \xi) \left[\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds \right] d\sigma(u) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) sgn(u \cdot \xi) d\sigma(u).
\end{aligned}$$

Analogamente em I_1 obtemos

$$\int_{2\pi r|u\cdot\xi|\epsilon}^{1} \frac{(\cos(s) - 1)}{s} ds + \int_{1}^{2\pi r|u\cdot\xi|/\epsilon} \frac{\cos(s)}{s} ds + \int_{1}^{2\pi r|u\cdot\xi|} \frac{1}{s} ds$$

e assim tomando $\epsilon \to 0$,

$$\int_{0}^{1} \frac{(\cos(s) - 1)}{s} ds + \int_{1}^{\infty} \frac{\cos(s)}{s} ds - \ln(2\pi) - \ln|u \cdot \xi|.$$

Como a média de Ω é nula segue que

$$I_1 = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \ln|u \cdot \xi|^{-1} d\sigma(u),$$

e com I_2 obtemos (3.4).

■

Na Identidade (3.4) o fator que multiplica Ω tem 2 termos: o primeiro é uma função par com contribuição nula para a integral se Ω for ímpar e o segundo termo é uma função ímpar com contribuição nula para a integral se Ω for par. Passamos a decompor $\Omega = \Omega_p + \Omega_i$ respectivamente pelas partes par e ímpar dadas por:

$$\Omega_p(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) + \Omega(-u))$$

e

$$\Omega_i(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) - \Omega(-u)).$$

Corolário 3.2.2 *Dada uma função Ω como na Proposição 3.1.1, suponhamos que $\Omega_i \in L^1(S^{n-1})$ e $\Omega_p \in L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$. Então a transformada de Fourier de v.p.$\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ é limitada.*

Demonstração. Pela observação acima temos que

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega_p(u) \ln\left(\frac{1}{|u \cdot \xi'|}\right) d\sigma(u) - i\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega_i(u) sgn(u \cdot \xi') d\sigma(u),$$

e assim pela desigualdade de Hölder segue

$$|m(\xi)| \leq \|\Omega_p\|_{L^q(S^{n-1})} \left\|\ln\left(\frac{1}{|* \cdot \xi'|}\right)\right\|_{L^{q'}(S^{n-1})} + \frac{\pi}{2}\|\Omega_i\|_{L^1(S^{n-1})} < \infty$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, o que conclui o corolário.

■

3.3 Método das Rotações

Seja T um operador unidimensional limitado em $L^p(\mathbb{R})$, isto é, $\exists\, C_p > 0$ tal que $\|Tg\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}$ para toda $g \in L^p(\mathbb{R})$. A partir de T, estamos interessados em definir um operador T_u limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $u \in S^{n-1}$. Seja $L_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $L_u^{\perp}$ seu subespaço ortogonal em $\mathbb{R}^n$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\, x_1 \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in L_u^{\perp}$ tal que $x = x_1 u + \bar{x}$. Definimos

$$T_u f(x) = T(f(.u + \bar{x}))(x_1) \tag{3.6}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ q.t.p. x. Dessa forma por uma mudança de variáveis e o Teorema de Fubini-Tonelli segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |T(f(.u+\bar{x}))(x_1)|^p dx \\
&= \int_{L_u^{\perp}} \left(\int_{\mathbb{R}} |T(f(.u+\bar{x}))(x_1)|^p dx_1 \right) d\bar{x} \\
&\leq C_p^p \int_{L_u^{\perp}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(.u+\bar{x})(x_1)|^p dx_1 \right) d\bar{x} \\
&= C_p^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx,
\end{aligned}$$

e portanto T_u é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$. A seguir vejamos alguns exemplos especiais de operadores da forma T_u.

Exemplo 3.3.1 *A função Maximal de Hardy-Littlewood direcional*

$$M_u f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x-tu)| dt.$$

Exemplo 3.3.2 *A transformada de Hilbert direcional*

$$H_u f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x-tu)}{t} dt.$$

No apêndice B trataremos sobre a transformada de Hilbert, além de alguns resultados utilizados neste capítulo. O próximo resultado que iremos demonstrar é uma consequência imediata da desigualdade de Minkowski para integrais.

Proposição 3.3.1 *Dado um operador unidimensional T limitado em $L^p(\mathbb{R})$ com norma C_p, seja T_u um operador definido como em (3.6). Então para toda $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, o operador T_Ω definido por*

$$T_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) d\sigma(u)$$

é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pela desigualdade de Minkowski segue que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{S^{n-1}} |\Omega(u)||T_u f(x)| d\sigma(u) \right]^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(u)||T_u f(x)|^p dx \right)^{1/p} d\sigma(u) \\
&= \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p dx \right)^{1/p} d\sigma(u) \\
&\leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.
\end{aligned}$$

∎

Nós podemos aplicar a Proposição 3.3.1 para operadores da forma (3.2) quando Ω é uma função ímpar. De fato, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\Omega(u)}{r} f(x - ru) dr d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|>\epsilon} \frac{f(x - ru)}{r} dr \right) d\sigma(u). \end{aligned}$$

A última igualdade decorre simplesmente do fato que Ω é impar. Além disso temos que

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{1>|r|>\epsilon} \frac{f(x - ru) - f(x)}{r} dr \right) d\sigma(u) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{1 \leq |r|} \frac{f(x - ru)}{r} dr \right) d\sigma(u), \end{aligned}$$

já que Ω tem média nula. Como $f \in \mathcal{S}$ segue pelo Teorema da Convergência Dominada que a última experesão é dada por

$$\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|r|>\epsilon} \frac{f(x - ru)}{r} dr \right) d\sigma(u).$$

Pelo Exemplo (3.3.2) concluímos que

$$Tf(x) = \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x) d\sigma(u). \tag{3.7}$$

Em vista da expressão acima podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 3.3.1 *Seja Ω uma função ímpar como na Proposição 3.1.1. Se $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ então o operador definido em (3.2) é limitado (p, p) para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Decorre imediatamente da Proposição 3.3.1 e do Teorema B.2.1.

∎

No corolário acima, implicitamente definimos Tf para $f \in L^p$ como um limite na norma L^p. Entretanto, nós podemos mostrar que (3.2) é válido q.t.p. x. Se nós considerarmos o operador maximal associado ao operador integral singular dado por

$$T^*f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy \right|, \tag{3.8}$$

então T^* satisfaz a desigualdade

$$T^*f(x) \leq \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| H_u^* f(x) d\sigma(u),$$

no qual H_u^* é o operador direcional associado ao operador maximal da transformada de Hilbert dado por

$$H_u^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |H_{u,\,\epsilon} f(x)|,$$

com $H_{u,\,\epsilon}f(x) = \pi^{-1} \displaystyle\int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x-tu)}{t} dt$ (estimativa análoga a Identidade (3.7)). Aplicando novamente a Proposição 3.3.1 e o Teorema B.2.3 nós obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.2 *Seja Ω uma função como na Proposição 3.1.1. Então o operador T^* definido em (3.8) é forte (p,p) para $1 < p < \infty$. Em particular, dado $f \in L^p$, o limite (3.2) é válido q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.*

A última afirmação decorre imediatamente do Teorema B.1.2.

3.4 A Transformada de Riesz

Uma família importante de operadores da forma (3.2) com núcleos $K(x)$ para Ω uma função ímpar é dado por

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)dy \tag{3.9}$$

para $1 \leq j \leq n$ e $c_n = \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$. Em particular $\Omega(y) = \dfrac{y_j}{|y|}$ e portanto (3.9) está bem definida. Os operadores R_j são denominados transformadas de Riesz.

Lema 3.4.1 *Em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *temos*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{1-n}) = (1-n)v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right).$$

Demonstração. De fato, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{1-n})(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{1-n}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} |x|^{1-n}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1} |x|^{1-n}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)dx + \int_{|x|\geq 1} |x|^{1-n}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes segue que

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{1-n})(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{-\int_{|x|>\epsilon}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{1-n}\right)\phi(x)dx + \int_{|x|=\epsilon}|x|^{1-n}\phi(x)v_j dS(x)\right\},$$

no qual v_j é a j-ésima componente do vetor unitário v normal exterior a S^{n-1}.

Por mudança de variáveis segue que

$$\left|\int_{|x|=\epsilon}|x|^{1-n}\phi(x)v_j dS(x)\right| \leq \int_{S^{n-1}}|\epsilon y|^{1-n}|\phi(\epsilon y)|\epsilon^{n-1}dS(y).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\int_{S^{n-1}}|\epsilon y|^{1-n}|\phi(\epsilon y)|\epsilon^{n-1}dS(y) \to 0$$

para $\epsilon \to 0$ e assim

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|=\epsilon}|x|^{1-n}\phi(x)v_j dS(x) = 0.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{1-n})(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{1-n}\right)\phi(x)dx = (1-n)v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)(\phi),$$

donde obtemos o lema.

■

Uma propriedade importante dos operadores R_j é dada pela seguinte proposição.

Proposição 3.4.1 $(R_j f)\hat{}(\xi) = -i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$ *para* $\forall\ f \in L^2$.

Demonstração. Pelo Lema 3.4.1, Corolário 3.2.1 e pela Propriedade 1.11 segue que

$$\begin{aligned}
\left[v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)\right]^{\widehat{}}(\xi) &= (1-n)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{1-n})\right]^{\widehat{}}(\xi)\\
&= 2\pi i(1-n)^{-1}x_j\left[|x|^{1-n}\right]^{\widehat{}}(\xi)\\
&= 2\pi i c_{n,n-1}(1-n)^{-1}\frac{\xi_j}{|\xi|}\\
&= -i\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{\xi_j}{|\xi|}.
\end{aligned}$$

Assim se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\begin{aligned}
(R_j f)^{\widehat{}}(\xi) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}\left[v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)*f\right]^{\widehat{}}(\xi)\\
&= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}\left[v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)\right]^{\widehat{}}(\xi)\hat{f}(\xi)\\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora como $\mathcal{S}$ é denso em L^2, segue diretamente pelo Teorema de Plancherel 1.4.2 que o resultado também é válido para $f \in L^2$, o que conclui a proposição.

■

Corolário 3.4.1 *Se $f \in L^2$ então*

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f = -f. \tag{3.11}$$

Demonstração. Pela proposição anterior segue que

$$[R_j(R_j f)]^{\widehat{}}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}(R_j f)^{\widehat{}}(\xi) = -\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi),$$

donde temos $\left[\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f\right]^{\widehat{}} = -\hat{f}$. Como a transformada de Fourier é uma isometria em L^2, Teorema de Plancherel 1.4.2, então obtemos resultado.

■

Observação 3.4.1 *O corolário anterior nos mostra que $\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = -I$, no qual I é o operador identidade em L^2. Como S é denso em L^p para $p > 1$ segue que o resultado também é válido para L^p.*

3.5 Integrais Singulares com Núcleo Par

O objetivo dessa seção está em obtermos um resultado na direção do Corolário 3.3.1 para T em (3.2) com Ω uma função par. No entanto, o método das rotações não pode ser utilizado já que o operador neste caso não pode ser representado em termos da transformada de Hilbert. Entretanto segue de (3.11) que

$$Tf = -\sum_{j=1}^{n} R_j^2(Tf) = -\sum_{j=1}^{n} R_j(R_jT)f,$$

no qual R_jT é um operador ímpar (composição de um operador par com um operador ímpar). Se nós demonstrarmos que o operador R_jT tem a representação com em (3.2) então segue pelo Corolário 3.3.1 que T é limitado em L^p. Sendo assim, mostraremos que R_jT possui tal representação. Se Ω é uma função par pertencente a $L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$, considere para cada $\epsilon > 0$,

$$K_\epsilon(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{|x|>\epsilon\}}.$$

Facilmente vemos que $K_\epsilon \in L^r$ para $1 < r \leq q$ e portanto K_ϵ é uma distribuição temperada.

Lema 3.5.1 *Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então*

$$R_j(K_\epsilon * f) = (R_jK_\epsilon * f). \tag{3.12}$$

Demonstração. Tomando a transformada de Fourier para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ obtemos que

$$\begin{aligned} [R_j(K_\epsilon * f)]\hat{}\,(\xi) &= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}(K_\epsilon * f)\hat{}\,(\xi) \\ &= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{K_\epsilon}(\xi)\hat{f}(\xi) \\ &= (R_jK_\epsilon * f)\hat{}\,(\xi), \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

■

Lema 3.5.2 *Seja Ω uma função par como na Proposição 3.1.1. Se $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$ então existe uma função $\tilde{K}_j$ ímpar, homogênea de grau $-n$ tal que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_j K_\epsilon(x) = \tilde{K}_j(x)$$

na norma L^∞ para todo conjunto compacto que não contém a origem.

Demonstração. Fixado $x \neq 0$, seja $0 < \epsilon < \nu < |x|/2$. Como $K_l \in L^r$ para $1 < r \leq q$ e pelo Corolário 3.3.2 segue que

$$R_j K_l(x) = c_n \lim_{\delta \to 0} \int_{|y|>\delta} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} K_l(x-y)dy,$$

q.t.p. x para $l = \epsilon, \nu$ e $1 \leq j \leq n$. Pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned} R_j K_\epsilon(x) - R_j K_\nu(x) &= c_n \lim_{\delta \to 0} \int_{|x-y|>\delta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \left[\frac{\Omega(y')}{|y|^n} \chi_{\{\nu > |y| > \epsilon\}} \right] dy \\ &= c_n \lim_{\delta \to 0} \int_{1>|x-y|>\delta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \left[\frac{\Omega(y')}{|y|^n} \chi_{\{\nu > |y| > \epsilon\}} \right] dy + \\ &+ c_n \int_{|x-y| \geq 1} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \left[\frac{\Omega(y')}{|y|^n} \chi_{\{\nu > |y| > \epsilon\}} \right] dy \\ &= c_n \int_{\nu > |y| > \epsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\nu > |y| > \epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy = 0$$

posto que a média de Ω é nula, então

$$\begin{aligned} |R_j K_\epsilon(x) - R_j K_\nu(x)| &= \left| c_n \int_{\nu > |y| > \epsilon} g_j(y) - g_j(0) \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy \right| \\ &\leq c_n \int_{\nu > |y| > \epsilon} |g_j(y) - g_j(0)| \frac{|\Omega(y')|}{|y|^n} dy \end{aligned}$$

com $g_j(y) = \dfrac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}$. Assim, pela desigualdade do Valor Médio e por mudança de variáveis em coordenadas polares, temos que existe $c(n) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |R_j K_\epsilon(x) - R_j K_\nu(x)| &\leq c(n) \int_{\nu > |y| > \epsilon} \frac{|y|}{|x-y|^{n+1}} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^n} dy \\ &= \frac{c(n)}{|x|^{n+1}} \int_\epsilon^\nu \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| d\sigma(u) dr \qquad (3.13) \\ &= \frac{c(n)}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} (\nu - \epsilon). \end{aligned}$$

Logo, dado $\forall\ \alpha > 0$, $\{R_jK_\epsilon\}_\epsilon$ é uma sequência de Cauchy na norma L^∞ em $\{|x| > \alpha\}$. Como L^∞ é completo, então

$$K_j^*(x) = \lim_{\epsilon\to 0} R_jK_\epsilon(x).$$

q.t.p. x. Como R_jK_ϵ é ímpar segue o mesmo para K_j^* a menos de um conjunto de medida nula. Além disso se $\lambda > 0$ então por mudança de variáveis temos que $R_jK_\epsilon(\lambda x) = \lambda^{-n}R_jK_{\epsilon\lambda^{-1}}(x)$ q.t.p. x e portanto $K_j^*(\lambda x) = \lambda^{-n}K_j^*(x)$ para cada $\lambda > 0$. Se $D = \big\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times (0,\lambda) : K_j^*(\lambda x) \neq \lambda^{-n}K_j^*(x)\big\}$ então este conjunto tem medida nula já que K_j^* é mensurável. Pelo Teorema de Fubini-Tonelli dada uma esfera centrada na origem e raio $\rho > 0$, S_ρ, o conjunto $D\cap S_\rho$ tem medida nula. Dessa forma definimos

$$\tilde{K}_j(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho}{|x|}\right)^n K_j^*\left(\dfrac{\rho x}{|x|}\right) & x \neq 0 \ \text{ e } \ \rho x/|x| \notin D\cap S_\rho \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Facilmente vemos que essa função é mensurável, homogênea de grau $-n$ e ímpar. Além disso $\tilde{K}_j(x) = K_j^*(x)$ q.t.p. x. De fato, se $x \neq 0$ tal que $x_0 = \rho x/|x| \notin D\cap S_\rho$ (o caso que $x_0 \in D\cap S_\rho$ é trivial já que este conjunto tem medida nula) então para quase todo $\lambda > 0$ temos

$$\tilde{K}_j(\lambda x_0) = \lambda^{-n}\tilde{K}_j(x_0) = \lambda^{-n}K_j^*(x_0) = K_j^*(\lambda x_0),$$

o que demonstra o lema.

■

Lema 3.5.3 *O núcleo $\tilde{K}_j$ definido no Lema (3.5.2) satisfaz*

$$\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)|d\sigma(u) \leq C_q \left\|\Omega\right\|_{L^q(S^{n-1})}. \tag{3.14}$$

Além disso, se $\tilde{K}_{j,\,\epsilon}(x) = \tilde{K}_j(x)\chi_{\{|x|>\epsilon\}}$ então $\Delta_\epsilon = R_jK_\epsilon - \tilde{K}_{j,\,\epsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\left\|\Delta_\epsilon\right\|_1 \leq C_q' \left\|\Omega\right\|_{L^q(S^{n-1})}$.

Demonstração. Pela homogenidade de $\tilde{K}_j$ e por mudança de variáveis em coordenadas polares segue que

$$(\ln 2)\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)|d\sigma(u) = \int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x)|dx.$$

Dessa forma obtemos que

$$(\ln 2)\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)|d\sigma(u) \leq \int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)|dx + \int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|dx. \tag{3.15}$$

Analogamente em (3.13) com $\nu = 1/2$ já que $|x| > 1$, então tomando $\epsilon \to 0$ segue que

$$|\tilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)| \leq \frac{c(n)}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$$

e assim a primeira integral do lado esquerdo em (3.15) é limitada por $C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}$ (desigualdade de Hölder). Já a segunda integral é estimada novamente por Hölder, seguido do fato que R_j é limitado em L^q (vide Corolário 3.3.1), isto é,

$$\begin{aligned}\int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|dx &\leq C_1 \left\|R_jK_{1/2}\right\|_{L^q} \\ &\leq C_2 \left\|K_{1/2}\right\|_{L^q} \\ &\leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})},\end{aligned}$$

o que demonstra (3.14). Para demonstrarmos a segunda parte do lema, basta obervarmos $\Delta_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\Delta_1(\epsilon^{-1}x)$ e assim $\|\Delta_\epsilon\|_{L^1} = \|\Delta_1\|_{L^1}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\|\Delta_1\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{K}_{j,1}(x) - R_jK_1(x)\right| dx \\ &= \int_{|x|<2} \left|\tilde{K}_{j,1}(x) - R_jK_1(x)\right| dx + \int_{|x|>2} \left|\tilde{K}_{j,1}(x) - R_jK_1(x)\right| dx.\end{aligned}$$

A primeira parcela do lado esquerdo da última igualdade é estimado por

$$\int_{|x|<2} \left|\tilde{K}_{j,1}(x) - R_jK_1(x)\right| dx \leq \int_{1<|x|<2} \left|\tilde{K}_{j,1}(x)\right| dx + \int_{|x|<2} |R_jK_1(x)|\, dx$$

pela definição de $\tilde{K}_{j,1}$. Como na primeira parte do lema segue que cada parcela é limitada por $C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}$. Por outro lado como $|x| > 2$, tomando $\nu = 1$ e $\epsilon \to 0$ em (3.13) segue que

$$\left|\tilde{K}_{j,1}(x) - R_jK_1(x)\right| \leq \frac{c(n)}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$$

e como anteriormente obtemos

$$\int_{|x|>2} \left|\tilde{K}_{j,1}(x) - R_jK_1(x)\right| \leq C\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})},$$

o que demonstra o lema.

$\blacksquare$

Em virtude dos últimos resultados podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.5.1 *Seja Ω uma função na Proposição 3.1.1 tal que $\Omega_i \in L^1(S^{n-1})$ e $\Omega_p \in L^q(S^{n-1})$ para algum $q > 1$. Então o operador integral singular T em (3.2) é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.3.1 é suficiente considerarmos $\Omega = \Omega_p$. Além disso, sem perda de generalidade podemos supor que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pela definição de K_ϵ temos que $Tf = \lim\limits_{\epsilon \to 0} K_\epsilon * f$. Assim, por (3.11) e (3.12) segue que

$$K_\epsilon * f = -\sum_{j=1}^{n} R_j(R_j(K_\epsilon * f)) = -\sum_{j=1}^{n} R_j(R_j K_\epsilon) * f).$$

Utilizando a notação do Lema (3.5.3) temos que

$$R_j K_\epsilon * f = \tilde{K}_{j,\,\epsilon} * f + \Delta_\epsilon * f.$$

Estimando a norma L^p da primeira parcela temos

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{K}_{j,\,\epsilon} * f \right\|_p &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_{j,\,\epsilon}(y) f(x-y)dy \right|^p dx \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|y|>\epsilon} \tilde{K}_j(y) f(x-y)dy \right|^p dx \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|y|>\epsilon} \frac{\tilde{K}_j(\frac{y}{|y|})}{|y|^n} f(x-y)dy \right|^p dx \right]^{1/p},
\end{aligned}$$

no qual a última igualdade é obtida pela homogenidade de $\tilde{K}_j$. Agora como $\tilde{K}_j$ é ímpar segue por mudança de variáveis em coordendas polares que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|>\epsilon} \frac{\tilde{K}_j(\frac{y}{|y|})}{|y|^n} f(x-y)dy \right| &\leq \left| \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^\infty \tilde{K}_j(u) \frac{f(x-ru)}{r} dr d\sigma(u) \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \tilde{K}_j(u) \left| \int_{|r|>\epsilon} \frac{f(x-ru)}{r} dr \right| d\sigma(u) \\
&\leq \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \tilde{K}_j(u) H_u^* f(x) d\sigma(u).
\end{aligned}$$

Dessa forma pela desigualdade de Minkowski para integrais obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{K}_{j,\,\epsilon} * f\right\|_p &\leq \frac{\pi}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{S^{n-1}}|\tilde{K}_j(u)|H_u^* f(x)d\sigma(u)\right|^p dx\right]^{1/p}\\ &\leq \frac{\pi}{2}\,\|H_u^* f\|_p\int_{S^{n-1}}|\tilde{K}_j(u)|d\sigma(u).\end{aligned}$$

Assim pelo Lema (3.12) e como a transformada de Hilbert é forte (p,p) segue que

$$\left\|\tilde{K}_{j,\,\epsilon} * f\right\|_p \leq C\,\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\,\|f\|_p\,.$$

Já a outra parcela decorre da desigualdade de Young (1.4.2) já que pelo Lema (3.12) concluímos que

$$\|\Delta_\epsilon * f\|_p \leq \|\Delta_\epsilon\|_1\,\|f\|_p \leq C\,\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\,\|f\|_p\,.$$

Se nós combinarmos as estimativas acima e o fato que R_j é limitado em L^p nós observamos que

$$\|K_\epsilon * f\|_p \leq C\,\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\,\|f\|_p\,.$$

Como o lado esquerdo acima não depende de ϵ, segue pelo Lema de Fatou que

$$\|Tf\|_p \leq C\,\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\,\|f\|_p\,,$$

o que demonstra o Teorema.

∎

3.6 Núcleos Especiais

A seguir vamos estudar outra classe importante de núcleos da forma $K(x) = P(x)/|x|^\beta$, no qual P é um polinômio harmônico homogêneo de grau k e $Re(\beta) < n + k$. Seja P_k o conjunto dos polinômios homogêneo de grau k em $\mathbb{R}^n$ com coeficientes complexos. Dado $P \in P_k$ escrevemos

$$P(x) = \sum_{|\beta|=k} c_\beta x^\beta. \tag{3.16}$$

com $c_\beta \in \mathbb{C}$. Em particular, dizemos que um polinômio P é harmônico homogêneo de grau k se P for da forma (3.16) e além disso $\Delta P = 0$, no qual $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$.

Exemplo 3.6.1 *Se $k = 1$ então $P(x) = \sum_{|\beta|=k} c_\beta x^\beta$ é um polinômio harmônico homogêneo de grau 1.*

O próximo resultado diz respeito sobre a transformada de Fourier de $K(x)$.

Teorema 3.6.1 *Seja α um número complexo tal que $0 < Re(\alpha) < n$ e $P(x)$ um polinômio harmônico homogêneo de grau k em $\mathbb{R}^n$. Se $K(x) = P(x)/|x|^{n+k-\alpha}$ então $\hat{K}(\xi) = c_{k,\alpha} P(\xi)/|\xi|^{k+\alpha}$, com*

$$c_{k,\alpha} = (i)^{-k} \pi^{(n/2)-\alpha} \Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right). \tag{3.17}$$

Demonstração. Seja K_1 dado por

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1, \end{cases} \tag{3.18}$$

e $K_2(x) = K(x) - K_1(x)$. Se $0 < Re(\alpha) < n/2$ então $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $K_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, posto que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P(x)|}{|x|^{n+k-\alpha}} dx &= \int_0^1 \int_{S^{n-1}} \frac{|P(u)| r^k}{r^{n+k-\alpha}} r^{n-1} d\sigma(u) dr \\ &= \|P\|_{L^1(S^{n-1})} \left(\int_0^1 r^{\alpha-1} dr \right) < \infty, \end{aligned}$$

pois $0 < Re(\alpha)$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K_2(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|P(x)|^2}{|x|^{2(n+k-\alpha)}} dx &= \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{|P(x')|^2 r^{2k}}{r^{2(n+k-\alpha)}} r^{n-1} d\sigma(x') dr \\ &= \|P\|_{L^2(S^{n-1})}^2 \left(\int_1^\infty r^{2\alpha-n-1} dr \right) < \infty, \end{aligned}$$

para $0 < Re(\alpha) < n/2$. Assim, temos que a transformada de Fourier da distribuição temperada K é uma função $\hat{K} = \hat{K}_1 + \hat{K}_2$ para $0 < Re(\alpha) < n/2$.

Como P é um polinômio harmônico homogêneo de grau k segue que (vide identidade (2.19) em [17] p.152)

$$\hat{K}(x) = f(|x|)P(x). \tag{3.19}$$

Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então pela definição da transformada de Fourier de uma distribuição temperada temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\hat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(y)\phi(y)dy.$$

Por mudança de variáveis e do fato que K é homogênea de grau $\alpha - n$ segue que

$$\delta^{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} K(u)\hat{\phi}(\delta u)du = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(\delta^{-1}v)\phi(\delta^{-1}v)dv.$$

Agora, se $\psi(v) = \phi(\delta^{-1}v)$ então $\hat{\psi}(v) = \delta^n \hat{\phi}(\delta v)$ pela Propriedade (1.9) e assim

$$\delta^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(\delta^{-1}v)\phi(\delta^{-1}v)dv = \delta^n \int_{\mathbb{R}^n} K(u)\hat{\phi}(\delta u)du = \int_{\mathbb{R}^n} K(u)\hat{\psi}(u)du$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(u)\psi(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(v)\phi(\delta^{-1}v)dv.$$

Como a igualdade é valida para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{K}(v) = \delta^{-\alpha}\hat{K}(\delta^{-1}v)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. De fato, isto já era esperado pela Proposição 3.2.1, uma vez que a transformada de Fourier de K coincide como função e distribuição temperada. Pela Identidade (3.19) segue que

$$f(\delta r) = \delta^{-k-\alpha} f(r) \quad \text{q.t.p. } r > 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} f(r)dr = \int_0^1 f(\xi s)\xi ds = \xi^{1-k-\alpha} \int_0^1 f(s)ds = F(1)\xi^{1-k-\alpha}.$$

para todo $\xi > 0$. Logo podemos concluir que $f(r) = \gamma r^{-k-\alpha}$ e portanto $\hat{K}(\xi) = \gamma P(\xi)/|\xi|^{k+\alpha}$. Para calcular γ, consideremos $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}P(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\hat{\phi}(x) = i^{-k}\phi(x)$ (Teorema 3.4 em [17] p.155) e assim

$$i^{-k} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} P(x) \left(\frac{P(x)}{|x|^{k+n-\alpha}} \right) dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} P(x) \left(\frac{P(x)}{|x|^{k+\alpha}} \right) dx.$$

Por mudança em coordenadas polares temos

$$i^{-k}\int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{k+\alpha-1}dr = \gamma \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{k+n-\alpha-1}dr$$

e usando a Identidade (1.2) concluímos que

$$c_{k,\alpha} = \gamma = (i)^{-k}\pi^{(n/2)-\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right).$$

Dessa forma, provamos que o teorema é válido para $0 < Re(\alpha) < n/2$. Para estendermos o resultado para $0 < Re(\alpha) < n$, definimos as funções $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dadas por

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x)}{|x|^{k+n-z}}\hat{\phi}(x)dx,$$
$$g(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x)}{|x|^{k+z}}\phi(x)dx,$$

para $\phi \in \mathcal{S}$. De fato, essas funções estão bem definidas já que passando em coordenadas polares temos

$$f(z) = \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty P(x')r^{z-1}\hat{\phi}(rx')drd\sigma(x'), \tag{3.20}$$

$$g(z) = \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty P(x')r^{n-z-1}\phi(rx')drd\sigma(x'), \tag{3.21}$$

e portanto

$$|f(z)| \leq p_{m,0}(\hat{\phi})\left\|P\right\|_{L^1(S^{n-1})}\int_0^\infty \frac{r^{t-1}}{(1+r^2)^m}dr < \infty, \tag{3.22}$$

$$|g(z)| \leq p_{j,0}(\phi)\left\|P\right\|_{L^1(S^{n-1})}\int_0^\infty \frac{r^{n-t-1}}{(1+r^2)^j}dr < \infty, \tag{3.23}$$

para $z = t + is$, $m = [m]$ e $j = [j]$ (vide Seção C.2). Derivando sobre o sinal de integração em (3.20) e (3.21) temos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z) = \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty P(x')(\ln r)r^{z-1}\hat{\phi}(rx')drd\sigma(x'), \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z) = -\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty P(x')(\ln r)r^{n-z-1}\phi(rx')drd\sigma(x'). \tag{3.25}$$

Note que a derivação é possível pelo Teorema da Convergência Dominada (vide detalhes na Seção C.2). Analogamente, tomando a derivada parcial em relação a s em (3.20) e (3.21) segue que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(z) = i\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty P(x')(\ln r)r^{z-1}\hat{\phi}(rx')drd\sigma(x'), \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(z) = -i\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty P(x')(\ln r)r^{n-z-1}\phi(rx')drd\sigma(x'). \tag{3.27}$$

Uma vez demonstrado que as derivadas parciais são contínuas pelo Teorema C.2.1, segue que f e g satisfazem o operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial s}\right)u = 0,$$

e portanto f e g são analíticas para $0 < Re(\alpha) < n$. Como consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{P(x)}{|x|^{k+n-\alpha}}\hat{\phi}(x)dx = c_{k,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{P(x)}{|x|^{k+\alpha}}\phi(x)dx \tag{3.28}$$

é válida para $0 < Re(\alpha) < n$, desde que $c_{k,\alpha}$ seja analítica nessa restrição. Dessa forma, concluímos o teorema já que se $0 < Re(\alpha) < n$ e $\phi \in \mathcal{S}$ então pela igualdade em (3.28) obtemos

$$\left\langle \hat{K}, \phi \right\rangle = \left\langle c_{k,\alpha}P(x)/|x|^{k+\alpha}, \phi \right\rangle.$$

■

Observação 3.6.1 *Na demonstração do teorema acima, utilizamos dois resultados sobre polinômios esféricos harmônicos, isto é, polinômios harmônicos homogêneos restritos a S^{n-1}. Uma vasta teoria pode ser encontrada em [17], Capítulo 4.*

Exemplo 3.6.2 *Como aplicação do teorema, vamos estudar o núcleo vetorial $K(x) = x/|x|^n$, para $x \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $K_i(x) = x_i/|x|^n$ para $i = 1, ..., n$. Se $n \geq 3$ facilmente vemos que $K_i(x) = f_1(x) + f_2(x)$ tal que $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^2$, sendo $f_1(x) = K(x)\chi_{\{|x|\leq 1\}}$ e $f_2(x) = K(x)\chi_{\{|x|>1\}}$. No caso de $n = 2$, em especial, temos a mesma decomposição $K_i(x) = f_1(x) + f_2(x)$, com $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^p$ para $2 < p$. Observe que neste caso, $f_2 \notin L^2$. Assim, se $n \geq 2$ então K_i é uma distribuição temperada. Se escrevermos $K_i(x) = P_i(x)/|x|^n$ com $P_i(x) = x_i$, pelo Exemplo (3.6.1) temos que P_i é um polinômio harmônico homogêneo de grau 1. Assim, estamos nas hipóteses do Teorema 3.6.1 para $\alpha = 1$, $k = 1$ e portanto podemos afirmar que*

$$\widehat{\left(\frac{x_i}{|x|^n}\right)}(\xi) = c_{1,1}\frac{\xi_i}{|\xi|^2} \tag{3.29}$$

em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $\forall\ n \geq 2$. No caso de $n = 1$, $K(x) = H(x) - H(-x)$ no qual H é a função de Heaviside dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ 0 & |x| < 1. \end{cases}$$

3.7 O Espaço H^1

Na Seção B.2 veremos que a transformada de Hilbert de uma função integrável não pertence, em geral, a L^1 e que uma condição necessária para isto valha é que a função tenha integral nula. Nesta Seção, nós estamos interessados em obter um subespaço de L^1 cuja imagem sob certos operadores integrais singulares pertençam a L^1.

Definição 3.7.1 *Um átomo a é uma função com valores complexos definida em $\mathbb{R}^n$, suportada em um cubo Q e que satisfaz*

$$\int_Q a(x)dx = 0 \qquad e \qquad \|a\|_\infty \leq \frac{1}{|Q|}.$$

Vamos denotar por Δ a diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, isto é, $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Teorema 3.7.1 *Seja T um operador limitado em L^2 e K um função definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$ tal que para $f \in L^2$ de suporte compacto temos*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy,$$

com $x \notin S(f)$. Além disso, suponhamos que K satisfaz

$$\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x, y) - K(x, z)| dx \leq A. \tag{3.30}$$

Então existe uma constante C tal que para todo átomo a,

$$\|Ta\|_1 \leq C.$$

Demonstração. Se a é um átomo então temos que $a \in L^2$ e portanto Ta está bem definido. Seja Q^* um cubo com o mesmo centro que Q, c_Q, com o comprimento dos lados $2\sqrt{n}$ vezes maior. Já que T é limitado em L^2 então

$$\begin{aligned}
\int_{Q^*} |Ta(x)|dx &\leq |Q^*|^{1/2} \left(\int_{Q^*} |Ta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C|Q|^{1/2} \left(\int_Q |a(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1.
\end{aligned}$$

Além disso, como a tem média nula, pela condição (3.30) segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n - Q^*} |Ta(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n - Q^*} \left| \int_Q K(x,y)a(y)dy \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n - Q^*} \left| \int_Q \left[K(x,y) - K(x, c_Q) \right] a(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_Q \int_{\mathbb{R}^n - Q^*} |K(x,y) - K(x,c_Q)| \, dx |a(y)| dy \\
&\leq C_2.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$ obtemos o resultado.

■

Nós definimos o espaço atômico, denotado por H^1_{at}, como

$$H^1_{at}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_j \lambda_j a_j : a_j \text{ átomo }, \lambda_j \in \mathbb{C}, \sum_j |\lambda_j| < \infty \right\}.$$

A proposição a seguir mostra uma propriedade importante sobre este espaço.

Proposição 3.7.1 $H^1_{at}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\sum_j \lambda_j a_j \in H^1_{at}$. Como $\lambda_j a_j \in L^1$ e $\sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda_j a_j(x)| dx < \infty$ então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_j \lambda_j a_j(x) \right| dx \leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda_j a_j(x)| dx \leq \sum_j |\lambda_j| < \infty.$$

■

Definimos a norma em H^1_{at} por

$$\|f\|_{H^1_{at}} = \inf \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j a_j \right\}.$$

Segue imediatamente do Teorema 3.7.1 que os operadores integrais singulares são limitados de H^1_{at} em L^1.

Corolário 3.7.1 *Seja T um operador como no Teorema 3.7.1 e $f \in H^1_{at}$. Então*

$$\|Tf\|_1 \leq C \|f\|_{H^1_{at}} .$$

Seja R_j a transformada de Riesz em $\mathbb{R}^n$ para $1 \leq j \leq n$. Definimos o espaço

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), 1 \leq j \leq n \right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_1 + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_1 .$$

O próximo teorema nos mostra que podemos ter outra caracterização dos espaços atômicos. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [16].

Teorema 3.7.2 $H^1_{at}(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ *e suas normas são equivalentes.*

A definição dos espaços de Hardy pode ser ampliada para $0 < p \leq \infty$. Como referência sobre esse assunto citamos [16]. Se f é uma distribuição temperada então dizemos que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ se existe $\phi \in \mathcal{S}$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$ tal que $M_\phi f \in L^p$. A função $M_\phi f(x)$ é a função maximal dada por

$$M_\phi f(x) = \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)|,$$

com ϕ_t dado pela Definição (B.1.1). Quando $1 < p \leq \infty$ então $H^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado como $L^p(\mathbb{R}^n)$ (vide [16] p.91). No caso de $p = 1$ vimos que $H^1 \subset L^1$ estritamente. Já para $0 < p < 1$ assim como no caso de $p = 1$ podemos definir H^p via decomposição por átomos.

Definição 3.7.2 *Um H^p átomo a para $p < 1$ é uma função com valores complexos definida em $\mathbb{R}^n$, suportada em um cubo Q e que satisfaz*

$$\int_Q x^\beta a(x)dx = 0 \text{ para todo } \beta \text{ com } |\beta| \leq n(p^{-1} - 1)$$

e

$$\|a\|_\infty \leq |Q|^{-1/p}.$$

Analogamente definimos o espaço H^p atômico para $p < 1$, denotado por H^p_{at}, como

$$H^p_{at}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_j \lambda_j a_j : a_j \ H^p \text{ átomo }, \lambda_j \in \mathbb{C}, \sum_j |\lambda_j|^p < \infty \right\}.$$

com a respectiva norma dada por

$$\|f\|_{H^p_{at}} = \inf \left\{ \left(\sum_j |\lambda_j|^p \right)^{1/p} : f = \sum_j \lambda_j a_j \right\}.$$

A caracterização desses espaços via decomposição de átomos decorre do seguinte resultado provado em [16] p.107:

Teorema 3.7.3 $H^p_{at}(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R}^n)$ *e suas normas são equivalentes.*

O objetivo do resto dessa seção está em estudarmos um operador especial atuando nos espaços H^p. Para tal, consideramos o operador I_a definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$I_a\phi(x) = \frac{1}{\gamma_a} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \frac{1}{|x-y|^{n-a}} dy, \tag{3.31}$$

para $0 < a < n$ e $\gamma_a = \pi^{\frac{n}{2}-a} \dfrac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-a}{2}\right)}$. O operador está bem definido uma vez que $I_a\phi(x) = \gamma_a^{-1} \left(|y|^{a-n} * \phi\right)(x)$ e $|y|^{a-n}$ é uma distribuição temperada para $0 < a < n$. Do Corolário 3.2.1 segue que

$$(I_a\phi)\hat{}(\xi) = |\xi|^{-a}\hat{\phi}(\xi). \tag{3.32}$$

O Teorema a seguir nos mostra que o operador I_a pode ser definido em L^p.

Teorema 3.7.4 *Seja* $0 < a < n$ *e* $1 < p < q < \infty$ *tal que* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{a}{n}$. *Então*

$$\|I_a f\|_q \leq A_{p,\,q} \|f\|_p. \tag{3.33}$$

Demonstração. Para $R > 0$ podemos escrever

$$I_a f(x) = \int_{|y|<R} f(x-y)|y|^{a-n} dy + \int_{|y|\geq R} f(x-y)|y|^{a-n} dy.$$

A primeira integral é a convolução de f com a função $|y|^{a-n}\chi_{\{|y|<R\}}$ que é radial, decrescente e integrável. Assim segue pela Proposição B.1.2 que

$$\left|\int_{|y|<R} f(x-y)|y|^{a-n}dy\right| \leq (Mf)(x)\int_{|y|\leq R}|y|^{a-n}dy = cR^a(Mf)(x).$$

Pela desigualdade de Hölder a segunda integral é dominada por

$$\|f\|_p \left\||y|^{a-n}\chi_{\{|y|\geq R\}}\right\|_{p'}.$$

De fato, $|y|^{a-n}\chi_{\{|y|\geq R\}} \in L^{p'}$ já que $(n-a)p' - n = \dfrac{np'}{q} > 0$ por hipótese. Dessa forma segue que

$$\left\||y|^{a-n}\chi_{\{|y|\geq R\}}\right\|_{p'} = cR^{-n/q}$$

e assim

$$I_a f(x) \leq A\left[R^{\,a}(Mf)(x) + \|f\|_p R^{-n/q}\right].$$

Agora se $R^{-n/p} = \dfrac{Mf(x)}{\|f\|_p}$ então

$$I_a f(x) \leq A\left[(Mf)(x)\right]^{p/q}\|f\|_p^{1-p/q}.$$

A desigualdade (3.33) segue já que Mf é limitado em L^p para $1 < p < \infty$ (vide Seção B.1 no apêndice B).

■

O Teorema acima pode ser estendido para os espaços de Hardy H^p. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [16]

Teorema 3.7.5 *Se $0 < p < q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{a}{n}$, então*

$$\|I_a f\|_{H^q} \leq A_{p,\,q}\|f\|_{H^p}. \tag{3.34}$$

Capítulo 4

Demonstração do Teorema 0.2.3

Neste capítulo iremos demonstrar o Teorema 0.2.3. Basicamente o item (i) do teorema decorre da Proposição 4.1.1 enquanto que a parte (ii) decorre da extensão do Teorema 3.7.4 e do Corolário 3.3.1.

4.1 Decomposição e Estimativa L^1

Nesta seção enunciaremos dois resultados primordiais na demonstração do Teorema 4.

Lema 4.1.1 *Seja $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então para cada $\delta > 0$ nós podemos escrever $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ com*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\Phi_1(x)|\delta^{-\gamma} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi_2(x)|\delta^{1-\gamma} \leq c\,\|\nabla\Phi\|_{p,\infty}^{*}\,, \tag{4.1}$$

sempre que $p > n$, $\gamma = 1 - n/p$ e c independente de δ e Φ.

Demonstração. Consideremos o seguinte núcleo vetorial dado por $K(x) = c_n \dfrac{x}{|x|^n}$ estudado na Seção 3.2 do Capítulo 3 para $c_n = (c_{1,1})^{-1}$ em (3.17). Primeiramente consideremos:

Lema 4.1.2 *Se $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $\Phi = K * \nabla\Phi$.*

Demonstração do Lema. Denotamos $K * \nabla\Phi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\cdot\nabla\Phi(y)dy$, no qual $(\cdot)$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Como vimos, para cada $j = 1, ..., n$ e $n > 1$ temos que $x_j/|x|^n$ é uma distribuição temperada. Logo,

$$K * \nabla\Phi = c_n \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|^n} * \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \tag{4.2}$$

no qual,

$$\left(\frac{x_j}{|x|^n} * \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(y_j - z_j)}{|y-z|^n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(y)dy.$$

Como Φ é uma função suave de suporte compacto então pela Identidade (3.29) temos

$$c_n \left(\frac{x_j}{|x|^n} * \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{\Phi}(\xi).$$

Da igualdade (4.2) segue que

$$[K * \nabla\Phi]^{\widehat{}}(\xi) = c_n \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{|x|^n} * \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{\Phi}(\xi)$$

e assim pela fórmula inversa da transformada de Fourier em (1.15) concluimos para $n > 1$ que

$$\Phi = K * \nabla\Phi.$$

Se $n = 1$ então $K(x) = c_1(H(x) - H(-x))$ no qual $H(x)$ é a função de Heaviside. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos o lema.

■

Voltando a demonstração da Proposição, seja η uma função suave suportada em $|x| \leq 1$ com $\eta = 1$ para $|x| \leq 1/2$ (vide Proposição 1.2.3). Decompondo $K = K_1 + K_2$ sendo $K_1 = K(x)\eta\,(x/\delta)$, definimos $\Phi_j = K_j * \nabla\Phi$ para $j = 1, 2$.
Afirmação: Se $F(x) = K_1(x)$ então $F^*(t) \leq ct^{-\frac{n-1}{n}}$ para $0 < t \leq c_1\delta^n$ e $F^*(t) = 0$ caso contrário. De fato, como F está suportada em $\overline{B_\delta(0)}$ é fácil ver que se $s > 0$ então $a_F(s) \leq c_1\delta^n$. Assim, se $t > c_1\delta^n$ então $a_F(s) \leq t$ para $\forall\ s > 0$, donde $f^*(t) = 0$. Agora, dado $0 \leq t \leq c_1\delta^n$ escolha $\epsilon > 0$ tal que $2^{-n}t \leq c_1\epsilon^n \leq t$. Disto segue que $\epsilon \leq \delta$ e $c_n\epsilon^{1-n} \leq ct^{\frac{1-n}{n}}$ para $c = (2c_1^{1/n})^{n-1}c_n$. Logo, $a_F(c_n\epsilon^{1-n}) \leq c_1\epsilon^n \leq t$ e como a_F é não crescente

concluímos que $a_F(ct^{\frac{1-n}{n}}) \leq t$. Dessa forma, $F^*(t) \leq ct^{-\frac{n-1}{n}}$ para $0 < t \leq c_1\delta^n$. Utilizando a desigualdade de rearranjamento (2.16) para $F(x) = K_1(x)$ e $G(x) = \nabla\Phi(x)$ temos

$$|\Phi_1(x)| = |(K_1 * \nabla\Phi)(x)| \leq c \int_0^{c_1\delta^n} t^{-\frac{n-1}{n}} (\nabla\Phi)^*(t)dt.$$

Assim, tomando $\|\nabla\Phi\|^*_{p,\infty}$ segue que

$$|\Phi_1(x)| \leq c \|\nabla\Phi\|^*_{p,\infty} \int_0^{c_1\delta^n} t^{-\frac{n-1}{n}} t^{-1/p} dt = \tilde{c_1} \|\nabla\Phi\|^*_{p,\infty} \delta^\gamma, \tag{4.3}$$

para $\tilde{c_1} = \dfrac{np}{n-p} c_1^{\frac{n-p}{np}} c$ e $\gamma = 1 - n/p$ desde que $p > n$. Por outro lado, da igualdade (4.2) temos que

$$\Phi_2 = K_2 * \nabla\Phi = c_n \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{|x|^n} \left(1 - \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)\right) * \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}.$$

Utilizando as equivalências das normas euclidianas segue que

$$|\nabla\Phi_2| \leq \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} \{|\partial_{x_i}\Phi_2|\}$$

para $\partial_{x_i}\Phi_2 = \partial_{x_i}K_2 * \nabla\Phi$. Dessa forma, podemos decompor $\partial_{x_i}K_2 = K_i^1 + K_i^2 + K_i^3$, no qual os vetores são dados por

$$K_i^1 = -c_n n \left(1 - \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)\right) \left(\frac{x_1 x_i}{|x|^{n+2}}, ..., \frac{x_n x_i}{|x|^{n+2}}\right),$$

$$K_i^2 = c_n \left(1 - \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)\right) \left(0, ..., \overbrace{\frac{1}{|x|^n}}^{i-esima}, ..., 0\right),$$

$$K_i^3 = c_n \left(\frac{x_1}{|x|^n}, ..., \frac{x_n}{|x|^n}\right) \partial_{x_i}\left(1 - \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)\right).$$

e assim $\partial_{x_i}\Phi_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^3 K_i^j * \nabla\Phi$. Portanto para estimar $|\nabla\Phi_2|$ basta utilizarmos a desigualdade de rearranjamento (2.16) para cada parcela $K_i^j * \nabla\Phi$ sendo $F = K_i^j$ e $G = \nabla\Phi$. Para calcularmos $(K_i^1)^*$ podemos supor sem perda de generalidade que $K_i^1 = n^{\frac{3}{2}} c_n \left(1 - \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)\right) \dfrac{1}{|x|^n}$, pelo Lema (2.1.3). Sendo assim, para j=1,2 temos que K_i^j é do tipo $J(x) = c\left(1 - \eta\left(\frac{x}{\delta}\right)\right) \dfrac{1}{|x|^n}$, no qual c é uma constante. Vamos agora calcular J^*. Se $|x| \leq \delta/2$ então $1 - \eta(x/\delta) = 0$ e portanto

$B_{\delta/2}(0) \notin \{x \in X/|J(x)| > s\}$ para todo $s > 0$. Além disso, dado $s > 0$ temos que se $(sc^{-1})^{-\frac{1}{n}} \leq |x|$ então $|J(x)| \leq s$, já que $0 \leq |1 - \eta(x/\delta)| \leq 1$ para todo $x \in X$. Portanto temos que $\{x \in X/|J(x)| > s\} \subset B_{(sc^{-1})^{-\frac{1}{n}}}(0) - \overline{B_{\delta/2}(0)}$, desde que $\delta/2 < (sc^{-1})^{-\frac{1}{n}}$. Neste caso

$$a_J(s) \leq c_1 \left(\frac{c}{s} - \frac{\delta^n}{2^n} \right).$$

Assim dado $t > 0$ tomemos $s = cc_1 2^n (t + c_1\delta^n)^{-1}$. Logo vemos que $\delta/2 < (sc^{-1})^{-\frac{1}{n}}$ é satisfeito e além disso $a_J(s) \leq t2^{-n}$. Dessa forma podemos concluir que para todo $t > 0$ temos $J^*(t/2^n) \leq cc_1 2^n (t + c_1\delta^n)^{-1}$. Como $J^*(t) \leq J^*(t/2^n)$, posto que J^* é não crescente segue que

$$J^*(t) \leq cc_1 2^n (t + c_1\delta^n)^{-1}. \tag{4.4}$$

Para finalizarmos a estimativa precisamos apenas calcular $(K_i^3)^*$. Para simplificar a notação denominamos $F = K_i^3$. Da definição de F segue que $a_F(s) \leq c_1\delta^n$ para $\forall\ s > 0$, já que η está suportada em $\overline{B_1(0)}$. Disto segue que $F^*(t) \leq 0$ para $t > c_1\delta^n$. Para sermos mais precisos, F está suportada no anel $(0, \delta/2, \delta)$ e é limitada, de tal forma que $a_F(s) \leq c_1\delta^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ para $\forall\ s > 0$. Assim para $t \to 0^+$ temos que $F^*(t) < \infty$. Logo, podemos escolher uma constante c_{i3} tal que

$$(K_i^3)^*(t) \leq c_{i3}(t + c_1\delta^n)^{-1}. \tag{4.5}$$

Se $c_3 = \max_{1 \leq i \leq n} \{c_{i3}\}$, pelas desigualdades (4.4) e (4.5) obtemos que

$$|\nabla\Phi_2| \leq c \int_0^\infty (t + c_1\delta^n)^{-1} (\nabla\Phi)^*(t) dt,$$

no qual $c = \max\{c_3, c_n c_1 2^n n\}$. Tomando $\|\nabla\Phi\|_{p,\infty}^*$ temos

$$|\nabla\Phi_2| \leq c \|\nabla\Phi\|_{p,\infty}^* \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{p}}}{t + c_1\delta^n} dt \leq \tilde{c_2} \|\nabla\Phi\|_{p,\infty}^* \delta^{\gamma-1}, \tag{4.6}$$

posto que

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{p}}}{t + c_1\delta^n} dt \leq pc_1^{-\frac{1}{p}} \delta^{-\frac{n}{p}}$$

desde que $p > 1$, o que é satisfeito pois $p > n$. Tomando o supremo em (4.3) e em (4.6) segue o resultado

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\Phi_1(x)|\delta^{-\gamma} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi_2(x)|\delta^{1-\gamma} \leq c\,\|\nabla\Phi\|^*_{p,\infty}\,,$$

para $c = \tilde{c_1} + \tilde{c_2}$.

■

Seja F uma função definida em $\mathbb{R}^n$ com $n > 1$. Vamos considerar em $\mathbb{R}^{n-1}$ a função F^y dada por $F^y(\bar{x}) = F(y, \bar{x})$.

Proposição 4.1.1 *Suponhamos $F_1, F_2, ..., F_n$ funções suaves de suporte compacto tal que*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}. \tag{4.7}$$

Se $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} F_1(x)\Phi(x)dx\right| \leq c\left(\sum_{k=2}^{n} \|F_k\|_{L^1}\right)\|\nabla\Phi\|_{\widetilde{L}^p}\,, \tag{4.8}$$

para $p = n$.

Demonstração. Analogamente a F^y definimos Φ^y tal que $\Phi^y(\bar{x}) = \Phi(y, \bar{x})$. Considere $J(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_1^y(\bar{x})\Phi^y(\bar{x})d\bar{x}$. Pela proposição anterior podemos decompor para cada y e $N = n - 1$, $\Phi^y = \Phi_1^y + \Phi_2^y$ tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\Phi_1^y|\delta^{-\gamma} + \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_2^y|\delta^{1-\gamma} \leq c\,\|\nabla\Phi^y\|^*_{p,\infty}\,. \tag{4.9}$$

Dessa forma, podemos decompor $J(y) = J_1(y) + J_2(y)$ tal que

$$J_i(y) = \int_{\mathbb{R}^N} F_1^y(\bar{x})\Phi_i^y(\bar{x})d\bar{x}$$

para $i = 1, 2$. Pela desigualdade (4.9) temos

$$|J_1(y)| \leq c\delta^\gamma\,\|F_1^y\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,\|\nabla\Phi^y\|^*_{p,\infty}\,.$$

Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Fubini-Tonelli obtemos

$$\begin{aligned}
J_2(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} F_1^y(\bar{x})\Phi_2^y(\bar{x})d\bar{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{-\infty}^{y} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1,\bar{x})dx_1\right] \Phi_2^y(\bar{x})d\bar{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{-\infty}^{y} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F(x_1,\bar{x})\right) \Phi_2^y(\bar{x})dx_1\right] d\bar{x} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_1}(F(x_1,\bar{x}))\Phi_2^y(\bar{x})d\bar{x}dx_1.
\end{aligned}$$

Pela hipótese (4.7) e integração por partes concluimos que

$$\begin{aligned}
J_2(y) &= \sum_{k=2}^{n} \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x_1,\bar{x})\Phi_2^y(\bar{x})d\bar{x}dx_1 \\
&= -\sum_{k=2}^{n} \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}^N} F_k(x_1,\bar{x})\frac{\partial \Phi_2^y}{\partial x_k}(\bar{x})d\bar{x}dx_1
\end{aligned}$$

Dessa forma novamente por (4.9) segue

$$|J_2(y)| \leq c\delta^{\gamma-1}\left(\sum_{k=2}^{n} \|F_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right) \|\nabla\Phi^y\|_{p,\infty}^{*}.$$

Tomando $\delta = \delta(y) = \|F_1^y\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{-1} \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} \|F_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)$ temos

$$|J(y)| \leq 2cK(y)\,\|\nabla\Phi^y\|_{p,\infty}^{*}$$

para

$$K(y) = \left(\|F_1^y\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\right)^{1-\gamma}\left(\sum_{k=2}^{n} \|F_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^{\gamma}.$$

Pela desigualdade de Hölder com expoentes $r = n/(n-1)$ e $p = n$, além de $\gamma = 1 - N/n$ (lembrando que $N = n-1$) então

$$\int_{\mathbb{R}} |J(y)|dy \leq 2c\,\|K\|_{L^r(\mathbb{R})}\left\|\left(\|\nabla\Phi^y\|_{p,\infty}^{*}\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Mas,

$$\left\|\left(\|\nabla\Phi^y\|_{p,\infty}^{*}\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}}\left[\|\nabla\Phi^y\|_{p,\infty}^{*}\right]^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla\Phi\|_{\tilde{L}^p} \tag{4.10}$$

e

$$\begin{aligned}
\|K\|_{L^r(\mathbb{R})} &= \left(\sum_{k=2}^{n} \|F_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\|F_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{1}{n}} \\
&\leq \tilde{c}\sum_{k=1}^{n} \|F_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Pela definição de $J(y)$ e das desigualdades (4.10) e (4.11), concluímos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} F_1(x)\Phi(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |J(y)|dy \leq c\left(\sum_{k=2}^{n} \|F_k\|_{L^1}\right)\|\nabla\Phi\|_{\widetilde{L}^p}.$$

■

A desigualdade (4.8) do lema acima é uma estimativa mais forte comparada a estimativa encontrada em [15], uma vez que sabemos que $L^p \subset \widetilde{L}^p$.

4.2 Demonstração do Teorema 0.2.3

Para iniciarmos a demonstração do teorema vamos considerar $u = \sum_{|I|=q} u_I dx_I$ uma q-forma suave de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ (vide Seção 1.5). Se v é uma outra q-forma suave de suporte compacto dada por $v = \sum_{|I|=q} v_I dx_I$, definimos o produto interno de u por v por

$$(u, v) = \sum_{|I|=q} \int_{\mathbb{R}^n} u_I(x)v_I(x)dx.$$

De fato não é complicado observarmos que o produto interno está bem definido. Além disso se u e v são respectivamente formas suaves de suporte compacto de grau q e $q+1$ então definimos d^* como $(du, v) = (u, d^*v)$. Por definição denotamos

$$\|u\|_{L^p} = \sum_{|I|=q} \|u_I\|_{L^p}.$$

Vamos a demonstração do teorema.

Parte **(i)**. Seja $n \geq 3$ e $u = \sum_{|I|=q} u_I dx_I$ uma q-forma suave de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ tal que $2 \leq q \leq n-2$. Para demonstrarmos a desigualdade

$$\|u\|_{L^r} \leq A\left(\|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}\right)$$

com $r = n/(n-1)$ é suficiente demonstrarmos que

$$|(u, \phi)| \leq A\left(\|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}\right)\|\phi\|_{L^p}, \tag{4.12}$$

com p=n e ϕ é uma $q-$forma suave de suporte compacto. De fato, isto decorre do Teorema de Representação de Riesz já que

$$\|u\|_{L^r} = \sup_{\|\phi\|_p \leq 1} |(u, \phi)|$$

para ϕ uma q-forma suave de suporte compacto. Seja G uma solução fundamental do operador Δ em $\mathbb{R}^n$ (Laplaciano), isto é, se δ_0 é a distribuição de Dirac na origem então G é solução de $\Delta G = \delta_0$. Como $n \geq 3$ então tomemos

$$G(x) = a|x|^{2-n}$$

para a uma constante apropriada (vide [8] p.155). Em vista do próximo lema, denotamos também por Δ o operador $d^*d + dd^*$, ou seja, se u é uma q-forma suave de suporte compacto então $\Delta u = (d^*d + dd^*)u = \sum_{|I|=q} \Delta u_I dx_I$.

Lema 4.2.1 $d^*du + dd^*u = \sum_{|I|=q} \Delta u_I dx_I$

Demonstração do Lema. Seja u_I uma parcela de $u = \sum_{|I|=q} u_I dx_I$ para $I = \{i_1 < ... < i_q\}$. Se $k \in I$ denotamos por $dx_k \vee dx_I = (-1)^{r-1} dx_{I(k)}$ para algum $r \in \{1, ..., q\}$ tal que $k = i_r$ e $I(k) = \{i_1 < ... < i_{r-1} < i_{r+1} < ... < i_q\}$. Se $j \notin I$ então um termo de $d^*d(u_I dx_I)$ é dado por

$$\left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_f \partial x_j}\right] dx_f \vee (dx_j \wedge dx_I),$$

para $f \in I \cup \{j\}$ e $d^*d(u_I dx_I) = 0$ se $j \in I$. Da mesma forma, se $k \in I$ então um termo de $dd^*(u_I dx_I)$ é dado por

$$\left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_m \partial x_k}\right] dx_m \wedge (dx_k \vee dx_I),$$

para $m \notin I$ e $m = k$. Assim segue que quando $f = j$ temos

$$\left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_f \partial x_j}\right] dx_f \vee (dx_j \wedge dx_I) = \partial^2_{x_j} u_I dx_I \tag{4.13}$$

para todo $j \notin I$ e quando $m = k$ temos

$$\left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_m \partial x_k}\right] dx_m \wedge (dx_k \vee dx_I) = \partial^2_{x_k} u_I dx_I \tag{4.14}$$

para todo $k \in I$. Logo, $(d^*d + dd^*)u_I dx_I = \Delta u_I dx_I$ desde que

$$\sum_{j \notin I} \sum_{f \in I} \left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_f \partial x_j}\right] dx_f \vee (dx_j \wedge dx_I) = -\sum_{k \in I} \sum_{m \notin I} \left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_m \partial x_k}\right] dx_m \wedge (dx_k \vee dx_I).$$

Agora, dado $m \notin I$ e $k \in I$, se tomarmos $k = f$ e $j = m$ então

$$\left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_k \partial x_m}\right] dx_k \vee (dx_m \wedge dx_I) = -\left[\frac{\partial^2 u_I}{\partial x_m \partial x_k}\right] dx_m \wedge (dx_k \vee dx_I)$$

e assim obtemos a igualdade desejada posto que $dx_k \vee (dx_m \wedge dx_I) = -dx_m \wedge (dx_k \vee dx_I)$. Das identidades (4.13) e (4.14) segue que

$$(d^*d + dd^*)(u_I dx_I) = \sum_{j \notin I} \partial^2_{x_j} u_I dx_I + \sum_{k \in I} \partial^2_{x_k} u_I dx_I = \Delta u_I dx_I.$$

Aplicando o resultado para cada u_I obtemos o resultado para $u = \sum_{|I|=q} u_I dx_I$.

■

Em vista do lema acima temos que $\phi = \Delta(G * \phi) = (d^*d + dd^*)(G * \phi)$. Se denotarmos $\widetilde{G}(\phi) = G * \phi$ segue que

$$(u, \phi) = (u, (dd^* + d^*d)\widetilde{G}(\phi)) = (du, d\widetilde{G}(\phi)) + (d^*u, d^*\widetilde{G}(\phi)). \tag{4.15}$$

Por hipótese temos que $(du, d\widetilde{G}(\phi)) = (f, \Phi)$ com f e Φ $(q+1)$-formas dadas por $f = du$ e $\Phi = d\widetilde{G}(\phi)$. Se Φ_J e f_J são respectivamente as funções coordenadas de Φ e f então para estimarmos $(du, d\widetilde{G}(\phi))$ é suficiente estimarmos $\int_{\mathbb{R}^n} f_J(x)\Phi_J(x)dx$ para cada conjunto de índices J tal que $|J| = q+1$. Sem perda de generalidade podemos considerar $\Phi_J = \partial_{x_k}(G * \phi_{F_k})$ para algum conjunto de índices tal que $|F_k| = q$. Se $G(x) = a|x|^{2-n}$ então temos que $\partial_{x_k} G(x) = a(2-n)\frac{x_k}{|x|^n} \in L^1 + L^2$ e portanto pela Proposição 1.4.2 segue que $\Phi_J \in L^{r_1}$ para $r_1 \geq 2$. Além disso temos que

$$\partial_{x_l}\partial_{x_k} G(x) = \begin{cases} a(2-n)(-n)\dfrac{1}{|x|^n}\left(\dfrac{x_l x_k}{|x|^2}\right) & \text{para } \ l \neq k \\ \\ a(2-n)\dfrac{1}{|x|^n}\left(1 - n\dfrac{x_k^2}{|x|^2}\right) & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.16}$$

Estes núcleos são da forma $K(x)$ como estudados na Seção 3.1 com Ω par. Se $\Omega(x) = \dfrac{x_l x_k}{|x|^2}$ então facilmente vemos que a média é nula em S^{n-1} (basta observarmos a integral em cada octante). No caso de $\Omega(x) = 1 - n\dfrac{x_k^2}{|x|^2}$ segue por mudança de variáveis que

$$\int_{S^{n-1}} u_k^2 d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} u_1^2 d\sigma(u)$$

para $k = 2, ..., n$ sendo $u_j = \dfrac{x_j}{|x|}$. Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{S^{n-1}} u_k^2 d\sigma(u) = |S^{n-1}|$ temos que

$$\int_{S^{n-1}} u_k^2 d\sigma(u) = \frac{|S^{n-1}|}{n}$$

e assim

$$\int_{S^{n-1}} \left(1 - nu_k^2\right) d\sigma(u) = |S^{n-1}| - n\frac{|S^{n-1}|}{n} = 0$$

para todo k. Como os núcleos pertencem a $L^q(S^{n-1})$ para $q \geq 1$ então pelo Teorema 3.5.1 segue que $\|\partial_{x_l}\partial_{x_k} G * f\|_p \leq C \|f\|_p$ para $1 < p < \infty$. Posto que $q + 1 \leq n - 1$, se J é um conjunto de índices tal que $|J| = q + 1$ então existe um índice k, $1 \leq k \leq n$, com $k \notin J$. Denotamos por $J_{j,k}$ o conjunto de índices tal que $J_{j,k} = J - \{j\} \cup \{k\}$ para cada $j \in J$. Como f é uma forma fechada segue que

$$\frac{\partial f_J}{\partial x_k} = \sum_{j \in J} \pm \frac{\partial f_{J_{j,k}}}{\partial x_j}. \tag{4.17}$$

Se Φ_J fosse de suporte compacto, teríamos pela Proposição 4.1.1 que

$$\left| \int_{R^n} f_J(x)\Phi_J(x)dx \right| \leq c \|f\|_{L^1} \|\nabla \Phi_J\|_{L^p} \tag{4.18}$$

para $c = c(J) > 0$. Mas como $\Phi_J \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $p = n$ então segue por densidade que a desigualdade (4.18) também é válida para Φ_J. Como $|\nabla \Phi_J| \leq \displaystyle\sum_{l=1}^{n} |\partial x_l \Phi_J|$ então

$$\begin{aligned}
\left| \int_{R^n} f_J(x)\Phi_J(x)dx \right| &\leq c \|f\|_{L^1} \left(\sum_{l=1}^{n} \|\partial x_l \Phi_J\|_p \right) \\
&= c \|f\|_{L^1} \left(\sum_{l=1}^{n} \|\partial_{x_l}\partial_{x_k} G * \phi_{F_k}\|_p \right) \\
&\leq c \|f\|_{L^1} \|\phi_{F_k}\|_p
\end{aligned}$$

Assim,
$$\left|\int_{R^n} f_J(x)\Phi_J(x)dx\right| \leq C\,\|f\|_{L^1}\,\|\phi\|_{L^p} \tag{4.19}$$
para todo $|J| = q+1$. A mesma estimativa é válida no caso de $(g, d^*\widetilde{G}(\phi))$, uma vez que $2 \leq q$, $d^*g = 0$ e assim obtemos uma igualdade análoga a (4.17) para g_J com $|J| = q-1$ e $g = \sum_{|J|=q-1} g_J dx_J$. Sem perda de generalidade podemos considerar $\Psi_J = \partial_{x_k}(G * \phi_{F_k})$ para algum $|F_k| = q$ sendo $\Psi = d^*\widetilde{G}(\phi))$. Dessa forma, pelos mesmos argumentos acima, concluímos que
$$\left|\int_{R^n} g_J(x)\Psi_J(x)dx\right| \leq C\,\|g\|_{L^1}\,\|\phi\|_{L^p} \tag{4.20}$$
para todo $|J| = q-1$. Das desigualdades (4.19) e (4.20) obtemos
$$|(u,\phi)| \leq A\left(\|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}\right)\|\phi\|_{L^p}.$$

Parte **(ii)**. Inicialmente vamos considerar o caso $q = 1$. Da identidade (4.15) estimamos a parcela $(f, d\widetilde{G}(\phi))$ como na parte (i), diferentemente no caso $(g, d^*\widetilde{G}(\phi))$. Isto segue do fato que se u é uma 1-forma então g é uma 0-forma e portanto não obtemos uma condição análoga a (4.17). No caso da primeira parcela o mesmo argumento é válido uma vez que $q = 1 \leq n-1$ e $df = 0$, satisfazendo a condição (4.17). Se $\phi = \sum_{k=1}^{n} \phi_k dx_k$ então
$$(g, d^*\widetilde{G}(\phi)) = -\left(g\,,\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(G * \phi_k)\right).$$
Pelo Teorema 3.6.1 e pelas identidades (3.10) e (3.32) segue que
$$\widehat{g}(\xi)\left(\partial x_k G * \phi_k\right)^{\widehat{}}(\xi) = [I_1(g)]^{\widehat{}}(\xi)[R_k(\phi_k)]^{\widehat{}}(\xi),$$
no qual $I_1(g)$ é dado por (3.31) e R_k é a transformada de Riesz para $k = 1, ..., n$. Pela identidade de Parseval (1.18) obtemos
$$-\left(g\,,\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(G * \phi_k)\right) = \left(I_1(g), \sum_{k=1}^{n} R_k(\phi_k)\right).$$
Segue do Teorema 3.7.5 com $a = 1$ e $p = 1$, Corolário 3.3.1 e pela desigualdade de Hölder que
$$|(g, d^*\widetilde{G}(\phi))| \leq C\,\|g\|_{H^1}\,\|\phi\|_p,$$

o que demonstra a parte (ii) para o caso $q = 1$. O caso $q = n - 1$ segue da mesma forma sendo a parcela $(g, d^*\widetilde{G}(\phi))$ estimada como na item (i) e a parcela $(f, d\widetilde{G}(\phi))$ estimada como acima.

■

Observação 4.2.1 *No caso $q = 0$, a parcela $(g, d^*\widetilde{G}(\phi))$ não está presente e assim procedemos a demonstração como no item (i). Similarmente para o caso $q = n$.*

4.3 Um Contra-Exemplo para $n = 2$

O contra-exemplo que iremos apresentar foi proposto por J. Bourgain e H. Brezis em [1]. O mesmo mostra que quando $n = 2$ o Teorema 0.2.3 não é válido.

Seja $Z = \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\right)$ definido em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, que admite extensão no sentido das distribuições para $\mathbb{R}^2$. Temos que $rot\ Z = 2\pi\delta_0$ e $div\ Z = 0$. De fato, como $-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ segue que para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle rot\ Z, \phi\rangle &= \left\langle \partial_{x_1}\left(\frac{x_1}{|x|^2}\right) - \partial_{x_2}\left(-\frac{x_2}{|x|^2}\right), \phi \right\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{x_1}{|x|^2}\partial_{x_1}\phi + \frac{x_2}{|x|^2}\partial_{x_2}\phi\right) dx \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \left(\frac{x_1}{|x|^2}\partial_{x_1}\phi + \frac{x_2}{|x|^2}\partial_{x_2}\phi\right) dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{ -\int_{|x|>\epsilon} \left[\partial_{x_1}\left(\frac{x_1}{|x|^2}\right) + \partial_{x_2}\left(\frac{x_2}{|x|^2}\right)\right]\phi(x)dx + \right. \\
&\left. + \int_{|x|=\epsilon}\left(\frac{x_1}{|x|^2}v_1 + \frac{x_2}{|x|^2}v_2\right)\phi(x)d\sigma(x)\right\}
\end{aligned}$$

no qual v_j é a j-ésima componente do vetor unitário v normal exterior a S^1. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\langle rot\ Z, \phi\rangle = 2\pi\phi(0) =< 2\pi\delta_0, \phi > .$$

Analogamente provamos que $div\ Z = 0$. Seja ϕ_ϵ uma aproximação da identidade (vide Definição B.1.1). Se definirmos $g = (g_1, g_2)$ com $g_1 = -2\pi\frac{x_2}{|x|^2} * \phi_\epsilon$

e $g_2 = 2\pi \dfrac{x_1}{|x|^2} * \phi_\epsilon$ segue que $rot\ g = 2\pi\phi_\epsilon$ e $div\ g = 0$. Pelo Teorema de Plancherel temos que $g_1, g_2 \in L^2$. De fato, pelo Teorema 3.6.1, segue que $\|g_1\|_{L^2} = \left\| \dfrac{\xi_2}{|\xi|^2}\hat{\phi}(\epsilon\ \cdot) \right\|_{L^2}$ e $\|g_2\|_{L^2} = \left\| \dfrac{\xi_2}{|\xi|^2}\hat{\phi}(\epsilon\ \cdot) \right\|_{L^2}$. Tomando $\epsilon \to 0$ segue que $\|g_1\|_{L^2} \to \left\| \dfrac{x_2}{|x|^2} \right\|_{L^2}$ e $\|g_2\|_{L^2} \to \left\| \dfrac{x_1}{|x|^2} \right\|_{L^2}$. Portanto, se a desigualdade do Teorema 0.2.3 fosse válida para $n = 2$, o limite do lado esquerdo de (4) divergiria uma vez que $Z \notin L^2$ e assim teríamos que a constante A não seria uniforme.

Apêndice A

Demonstração do Teorema 0.2.2

O objetivo dessa seção é apresentarmos uma demonstração simples da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. Esta desigualdade decorre basicamente da chamada desigualdade de Hölder generalizada (vide [6] p.189).

Demonstração. Primeiro consideraremos o caso $p = 1$. Como u tem suporte compacto, para cada $i = 1, ..., n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_{x_i} u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) dy_i$$

e assim

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, ..., y_i, ..., x_n)| dy_i$$

para $i = 1, ..., n$. Consequentemente,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, ..., y_i, ..., x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando em relação a x_1 segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \quad &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, ..., y_i, ..., x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right]^{\frac{1}{n-1}} \right) dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right]^{\frac{1}{n-1}} dx_1
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder generalizada obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora, integrando em relação a x_2 segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_2\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1,i\neq 2}^{n}(I_i)^{\frac{1}{n-1}}dx_2,\end{aligned}$$

no qual $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1$ e $I_i = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_i$. Novamente pela desigualdade de Hölder generalizada segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\times\\ &\times\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Continuando a integração por $x_3, x_4, ..., x_n$ teremos que

$$\begin{aligned}\int_{R^n}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx &\leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1,...,dy_i,...,dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} =\\ &= \left(\int_{R^n}|Du(x)|dx\right)^{\frac{n}{n-1}},\end{aligned} \tag{A.1}$$

o que conclui o caso para $p = 1$. Se $1 < p < n$ vamos aplicar (A.1) para $v = |u|^{\gamma}$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido. Então

$$\begin{aligned}\left(\int_{R^n}|u(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{R^n}|D|u(x)|^{\gamma}|dx\\ &= \gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\gamma-1}|Du(x)|dx\\ &\leq \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{R^n}|Du(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade obtida pela desigualdade de Hölder. Se escolhermos $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\dfrac{p}{p-1}$ então segue que $\gamma = \dfrac{p(n-1)}{n-p} > 1$ e assim

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

■

Observação A.0.1 *Note que realmente necessitamos que u tenha suporte compacto para que (2) seja válido, como o exemplo $u \equiv 1$ nos mostra.*

Apêndice B

Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert é uma ferramenta muito importante no estudo de operadores integrais singulares. Sendo assim, neste capítulo faremos uma pequena exposição sobre esse assunto, além de um breve estudo da função maximal de Hardy-Littlewood. Uma maior abordagem sobre esses assuntos, bem como as demonstrações dos resultados aqui enunciados podem ser encontrados em [4] e [16].

B.1 Aproximação da Identidade e a Função Maximal de Hardy-Littlewood

Nesta seção faremos um breve comentário sobre aproximação da identidade e a função maximal de Hardy-Littlewood.

Definição B.1.1 *Dizemos que* $\{\phi_t : t > 0\}$ *é uma aproximação da identidade se* ϕ *é uma função integrável em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$ *e* $\phi_t = t^{-n}\phi(t^{-1}x)$.

A proposição seguinte justifica de fato tal nomenclatura para a família $\{\phi_t : t > 0\}$.

Proposição B.1.1 *Se* $\{\phi_t : t > 0\}$ *é uma aproximação da identidade então para toda* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *temos que* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \phi_t * g(x) = g(x)$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos que ϕ_t converge para δ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0$. Se $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então por mudança de variáveis temos

$$\langle \phi_t, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\phi(t^{-1}x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(tx)dx.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{t\to 0} \langle \phi_t, g \rangle = g(0) = \langle \delta, g \rangle .$$

Como $\delta * g = g$ para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então concluímos a proposição posto que

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * g(x) = g(x).$$

■

O próximo resultado nos mostra que a convergência de $\phi_t * f$ pode ser dada na norma em L^p.

Teorema B.1.1 *Seja $\{\phi_t : t > 0\}$ uma aproximação da identidade. Então*

$$\lim_{t\to 0} \|\phi_t * f - f\|_p = 0$$

se $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ e uniformemente (quando $p = \infty$) se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Outra questão importante é sabermos quando uma família de operadores se aproxima do operador identidade. Nesta direção enunciaremos o próximo resultado.

Teorema B.1.2 *Seja $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores lineares em $L^p(X,\mu)$ e T^* a função definida por*

$$T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|.$$

Se T^* é fraco (p,q) então o conjunto

$$\left\{ f \in L^p(X,\mu) : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \ q.t.p. \right\}$$

é fechado em $L^p(X,\mu)$.

Nós chamamos T^* como o operador maximal associado a família $\{T_t\}_{t>0}$.

Se f é uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$ definimos a função maximal de Hardy-Littlewood por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)|dy.$$

no qual denotamos B_r a bola de centro 0 e raio $r > 0$. Se $\phi = |B_1|^{-1}\chi_{B_1}$ então a função acima coincide com a função maximal associada a aproximação da identidade $\{\phi_t : t > 0\}$ como no Teorema B.1.2 para f não negativa. Ao invés de bolas, podemos definir a função maximal em cubos $Q_r = [-r, r]^n$, ou seja,

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)|dy.$$

Quando $n = 1$, M e M' coincidem e se $n > 1$ então as funções são comparáveis. A importância das funções maximais no estudo das aproximações da identidade segue do seguinte resultado.

Proposição B.1.2 *Se ϕ é uma função positiva, radial, decrescente (como uma função em (0,∞)) e integrável. Então*

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1 \, Mf(x).$$

O teorema a seguir demonstra uma propriedade fundamental sobre a função maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema B.1.3 *O operador M é fraco (1,1) e forte (p,p),* $1 < p \leq \infty$.

B.2 A Transformada de Hilbert

Inicialmente vamos motivar a definição da transformada de Hilbert. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $u(x,t) = P_t * f(x)$ é solução de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

no qual P_t é o núcleo de Poisson dado por

$$P_t(x) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

com $\hat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$ (vide [4] p.19). Para $n = 1$ podemos escrever $u(x,t) = u(z)$ com $z = x + it$ da forma

$$u(z) = \int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i z\xi}d\xi + \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}d\xi.$$

Se definirmos

$$iv(z) = \int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i z\xi}d\xi - \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}d\xi$$

temos que v é harmônica em $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, ou seja, $\Delta v = 0$. Além disso, se f tem valores reais então u e v tem valores reais e como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

segue que $u + iv$ é analítica em $\mathbb{C}^+$(Im z>0). Logo, v é conjugada harmônica de u. Claramente,

Lema B.2.1 $v(z) = \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi.$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} v(z) &= -i\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i(x+it)\xi}d\xi + i\int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi)e^{2\pi i(x-it)\xi}d\xi \\ &= \int_0^\infty -i\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}e^{-2\pi t\xi}d\xi + \int_{-\infty}^0 i\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}e^{-2\pi t|\xi|}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{2\pi x\xi}d\xi. \end{aligned}$$

■

Por outro lado,

Lema B.2.2 $v(x,t) = Q_t * f(x)$ *no qual* $\hat{Q}_t = -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} v(x,t) = Q_t * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} Q_t(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{Q}_t(\xi) e^{2\pi i (x-y)\xi} d\xi \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right) - isgn(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

■

Pela transformada de Fourier inversa temos que $Q_t = \frac{1}{\pi} \frac{x}{t^2 + x^2}$, denominada núcleo conjugado de Poisson. De fato,

$$\begin{aligned} Q_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{Q}_t(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_0^\infty -ie^{-2\pi t \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 ie^{2\pi t \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= -i \int_0^\infty e^{2\pi (ix - t)\xi} d\xi + i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi (ix + t)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{x}{t^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Facilmente vemos que $P_t + iQ_t = \frac{i}{\pi z}$ é analítica em Im z>0. No entanto, temos que $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x)$ já que P_t é uma aproximação da identidade.

Observação B.2.1 *Q_t não é uma aproximação da identidade pois Q_t não é integrável para $t > 0$.*

Formamente temos que $\lim_{t \to 0} Q_t(x) = \frac{1}{\pi x}$. Assim, definimos a distribuição temperada, chamada valor principal de $1/x$, denominada por $v.p. \left(\frac{1}{x} \right)$ por

$$v.p. \left(\frac{1}{x} \right) (\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Desta definição segue que:

Proposição B.2.1 *$Q_t \to \pi^{-1} v.p. \left(\frac{1}{x} \right)$ quando $t \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ definimos $\psi_\epsilon(x) = \dfrac{1}{x}\chi_{\{|x|>\epsilon\}}$ que é limitada e portanto uma distribuição temperada dada por

$$\psi_\epsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\epsilon(x)\phi(x)dx = \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx$$

com $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Facilmente vemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \psi_\epsilon(\phi) = v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\phi).$$

Para ontermos o resultado é suficiente demonstrarmos que $Q_t - \pi^{-1}\psi_t \to 0$ quando $t \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
(Q_t - \pi^{-1}\psi_t)(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{t^2+x^2}\phi(x)dx - \int_{|x|>t} \frac{1}{x}\phi(x)dx \\
&= \int_{|x|<t} \frac{x}{t^2+x^2}\phi(x)dx + \int_{|x|>t} \left[\frac{x}{t^2+x^2} - \frac{1}{x}\right]\phi(x)dx \\
&= \int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(ty)dy + \int_{|y|>1} \left[\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{y}\right]\phi(ty)dy \\
&= \int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(ty)dy - \int_{|y|>1} \frac{1}{y(1+y^2)}\phi(ty)dy
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{t\to 0}(Q_t - \pi^{-1}\psi_t)(\phi) = \int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(0)dy - \int_{|y|>1} \frac{1}{y(1+y^2)}\phi(0)dy = 0$$

já que ambos integrandos são funções ímpares.

■

Observação B.2.2 *Em virtude da proposição acima segue que*

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \pi^{-1}\left\langle v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\cdot), f(x-\cdot)\right\rangle = \pi^{-1}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}dy.$$

Pela continuidade da transformada de Fourier em S' e pelo fato que $\hat{Q}_t(\xi) = -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$ temos que $\pi^{-1}\left[v.p.\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\widehat{}}(\xi) = -isgn(\xi)$. De fato,

$$\pi^{-1}\left[v.p.\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\widehat{}}(\xi) = \lim_{t\to 0}\hat{Q}_t(\xi) = -isgn(\xi).$$

Definição B.2.1 *Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos a transformada de Hilbert por*

$$Hf = \pi^{-1}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}dy.$$

Assim podemos redefinir a transformada de Hilbert pelas seguintes equivalências:

$$Hf = \lim_{t\to 0} Q_t * f$$
$$Hf = \pi^{-1} v.p. \left(\frac{1}{x}\right) * f$$
$$(Hf)\widehat{\ }(\xi) = -isgn(\xi)\hat{f}(\xi)$$

Segue pelo Teorema de Plancherel 1.4.2 e da terceira expressão acima que H está bem definida para $f \in L^2$ e além disso

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2$$

$$H(Hf) = -f$$
$$\int Hf \cdot g = -\int f \cdot Hg.$$

O próximo teorema nos mostra que a transformada de Hilbert pode ser extendida para funções em L^p para $1 < p < \infty$.

Teorema B.2.1 *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ seguem as afirmações:*
(i) *(Kolmogorov) H é fraco (1,1),*

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 .$$

(ii) *(M. Riesz) H é forte (p,p), $1 < p < \infty$,*

$$\|Hf\|_p \leq C_p \|f\|_p .$$

A desigualdade (p,p) é falsa para $p = 1$ e $p = \infty$. Se $f = \chi_{\{[0,1]\}}$ então $Hf(x) = \pi^{-1} ln \left|\frac{x}{x-1}\right|$ que não é limitada. No caso para $p = 1$ enunciaremos o seguinte resultado:

Lema B.2.3 *Se $\phi \in \mathcal{S}$ então $H\phi \in L^1 \Leftrightarrow \hat{\phi}(0) = 0$.*

Demonstração. Como $\phi \in \mathcal{S}$ então $\phi \in L^2$ e portanto $(H\phi)\widehat{\ }(\xi) = -isgn(\xi)\hat{\phi}(\xi)$. Se $H\phi \in L^1$ então sabemos que $(H\phi)\widehat{\ }$ é contínua. Logo a continuidade da origem implica que $\hat{\phi}(0) = 0$. Se $\phi \in \mathcal{S}$ e $\hat{\phi}(0) = 0$ então existe $\psi \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{\phi}(\xi) = \xi\hat{\psi}(\xi)$. Agora, podemos escrever

$$H\phi(x) = \frac{|x|H\phi(x)}{(1+|x|)} + \frac{H\phi(x)}{(1+|x|)}. \tag{B.1}$$

Como $(1+|x|)^{-1} \in L^2$ e $H\phi \in L^2$ então $(1+|x|)^{-1}H\phi \in L^1$. Agora pelas propriedades da transformada de Fourier segue que $(|x|H\phi)\hat{}(\xi) = c(sgn(\xi)\hat{\psi}(\xi) + |\xi|(\widehat{\psi})'(\xi)) \in L^2$ e portanto $|x|H\phi \in L^2$. Assim como $(1+|x|)^{-1} \in L^2$ concluímos que $|x|H\phi(x)(1+|x|)^{-1} \in L^1$. Como cada parcela em (B.1) pertence a L^1 então $H\phi \in L^1$.

■

Dado $\epsilon > 0$ consideremos $\phi_\epsilon(y) = y^{-1}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}$. Facilmente vemos que $\phi_\epsilon \in L^q$ para $1 < q \leq \infty$ e então

$$H_\epsilon f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(y) f(x-y)dy$$

está bem definida se $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. A proposição abaixo nos mostra algumas propriedades sobre o operador H_ϵ.

Proposição B.2.2 *Seguem as afirmações:*

(i) *H_ϵ é uniformemente limitado em L^2.*

(ii) *H_ϵ é do tipo fraco (1,1) uniformemente em ϵ.*

(iii) *H_ϵ é do tipo forte (p,p) uniformemente em ϵ para $1 < p < \infty$.*

(iv) *$H_\epsilon f$ converge para Hf na norma em L^p.*

Pelo item (iv) acima, sabemos que existe uma subsequência $\{H_{\epsilon_k} f\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} H_{\epsilon_k} f(x) = f(x)$ q.t.p. x. O próximo teorema afirma um resultado mais forte nesse sentido.

Teorema B.2.2 *Dada $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ então*

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(x) \quad q.t.p.\ x \in \mathbb{R}.$$

Definimos o operador maximal associado a $\{H_\epsilon\}$ por

$$H^*f(x) = \sup_{\epsilon>0} |H_\epsilon f(x)| \tag{B.2}$$

Pelo Teorema B.1.2 o resultado anterior decorre do seguinte teorema:

Teorema B.2.3 *H^* é forte (p,p), $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.*

Apêndice C

Cálculos Adicionais

C.1 Cálculos Adicionais

Nesta seção enunciaremos alguns resultados utilizados no texto.

Proposição C.1.1 *Seja* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções positivas definidas em* $(0,\infty)$ *tal que* $a_n(t) \leq a_{n+1}(t)$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n(t) = a(t)$ *para cada* t. *Se* $\sup_{t>0} a(t) < \infty$ *então* $\sup_{t>0} a(t) = \lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} a_n(t)$.

Demostração. Por hipótese temos que $a_n(t) \leq a(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sup_{t>0} a_n(t) \leq \sup_{t>0} a(t) < \infty$ segue que $\lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} a_n(t) \leq \sup_{t>0} a(t)$. Agora como $a_n(t) \leq \sup_{t>0} a_n(t) \leq \sup_{t>0} a(t) < \infty$ segue que
$a(t) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} a_n(t)$, donde $\sup_{t>0} a(t) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} a_n(t)$.

■

Lema C.1.1 *Seja* $a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$, $b_n > ... > b_1 > b_0 = 0$ *e* $0 < \theta \leq 1$. *Então*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \left(b_j - b_{j-1}\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\theta} \left(b_j^{\theta} - b_{j-1}^{\theta}\right)\right)^{1/\theta}. \tag{C.1}$$

Demostração. Vamos provar esse lema por indução. Se n=1 a desigualdade é trivial pois $a_1 b_1 \leq (a_1^{\theta} b_1^{\theta})^{1/\theta}$. Suponhamos que o resultado seja válido para n=N e provaremos para $n = N+1$. Defina $A = \sum_{j=1}^{N} a_j^\theta \left(b_j^\theta - b_{j-1}^\theta\right)$, $B = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(b_j - b_{j-1}\right)$, $A_1 = b_{N+1}^\theta - b_N^\theta$, $B_1 = b_{N+1} - b_N$ e

$$\phi(x) = (A + x^\theta B)^{1/\theta},$$

$$\psi(x) = A_1 + xB_1,$$

para $0 \leq x \leq a_N$. Nós queremos mostrar que $\psi(a_{N+1}) \leq \phi(a_{N+1})$ já que $0 < a_{N+1} < a_N$. Pela hipótese de indução sabemos que $\psi(0) \leq \phi(0)$. Além disso, $\psi(a_N) \leq \phi(a_N)$ pois basta substituir em A e B, b_N por b_{N+1}. Como $\phi'(x) = B\left(Ax^{-\theta} + B\right)^{(1/\theta)-1}$ é descrescente sobre $\mathbb{R}^+$ então ϕ é uma função côncava. Como ela domina ψ em 0 e a_N, segue que $\psi(x) \leq \phi(x)$ para $0 \leq x \leq a_N$ e assim $\psi(a_{N+1}) \leq \phi(a_{N+1})$.

■

A demonstração da proposição seguinte pode ser encontrada em [17] p.79.

Proposição C.1.2 *(Desigualdade de Jensen) Seja μ uma medida finita sobre um espaço X, f uma função μ-integrável e ϕ uma função convexa cujo domínio inclui a imagem de f. Então:*

$$\phi\left(\int_X f(u)d\mu(u)/\mu(X)\right) \leq \int_X \phi(f(u))d\mu(u)/\mu(X) \tag{C.2}$$

C.2 Alguns Detalhes do Teorema 3.6.1

Inicialmente vamos estimar as integrais em (3.22) e (3.23). Seja $0 < t < n$ e consideremos

$$\int_0^\infty \frac{r^{t-1}}{(1+r)^m}dr = \int_0^1 \frac{r^{t-1}}{(1+r)^m}dr + \int_1^\infty \frac{r^{t-1}}{(1+r)^m}dr.$$

Então temos que

$$\int_1^\infty \frac{r^{t-1}}{(1+r)^m}dr \leq \int_1^\infty r^{t-1-m}dr = -\frac{1}{t-m} \quad \text{para} \quad t < m,$$

e

$$\int_0^1 \frac{r^{t-1}}{(1+r)^m}dr \leq \int_0^1 r^{t-1}dr = \frac{1}{t},$$

já que $t > 0$. Assim podemos escolher m como o menor inteiro postivo maior que t, denotado por [m], tal que $0 < t < m$. Disto segue que

$$\int_0^\infty \frac{r^{t-1}}{(1+r)^m}dr < \infty.$$

Analogamente,

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-t-1}}{(1+r)^m}dr = \int_0^1 \frac{r^{n-t-1}}{(1+r)^m}dr + \int_1^\infty \frac{r^{n-t-1}}{(1+r)^m}dr,$$

com

$$\int_0^1 \frac{r^{n-t-1}}{(1+r)^j}dr \leq \int_0^1 r^{n-t-1}dr = \frac{1}{n-t},$$

já que $t < n$. Além disso,

$$\int_1^\infty \frac{r^{n-t-1}}{(1+r)^j}dr \leq \int_1^\infty r^{n-t-j-1}dr = -\frac{1}{n-t-j}$$

para $n-t < j$. Logo, podemos escolher j como o menor inteiro positivo maior que $n-t$, denotado por $[j]$, tal que $0 < t-n < j$. Disto segue que

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-t-1}}{(1+r)^m}dr < \infty.$$

Vamos agora mostrar que as integrais dadas em (3.24) e (3.25) estão bem definidas. De fato,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leq \|P\|_{L^1(S^{n-1})}\, p_{m,0}(\hat{\phi}) \int_0^\infty r^{t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^m}dr < \infty \tag{C.3}$$

e

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \leq \|P\|_{L^1(S^{n-1})}\, p_{j,0}(\phi) \int_0^\infty r^{n-t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^j}dr < \infty, \tag{C.4}$$

posto que

$$\int_0^\infty r^{t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^m}dr = \int_0^1 r^{t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^m}dr + \int_1^\infty r^{t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^m}dr$$

com

$$\int_1^\infty r^{t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^m}dr = \int_0^\infty \frac{e^{rt}r}{(1+e^r)^m}dr \leq \int_0^\infty e^{r(t-m)}rdr = \frac{1}{(t-m)^2} < \infty,$$

desde que m=[m], como anteriormente. Além disso,

$$\int_0^1 r^{t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^m}dr \leq \int_0^\infty xe^{-xt}dx = \frac{1}{t^2} < \infty$$

já que $t > 0$. Analogamente,

$$\int_0^\infty r^{n-t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^j}dr = \int_0^1 r^{n-t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^j}dr + \int_1^\infty r^{n-t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^j}dr,$$

com

$$\int_1^\infty r^{n-t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^j}dr = \int_0^\infty \frac{e^{r(n-t)}r}{(1+e^r)^j}dr \leq \int_0^\infty e^{r(n-t-j)}rdr = \frac{1}{(n-t-j)^2} < \infty,$$

desde que $n-t < j$ e neste caso escolhemos $j = [j]$. Desta forma,

$$\int_0^1 r^{n-t-1}\frac{\ln r}{(1+r)^j}dr \leq \int_0^\infty e^{-x(n-t)}xdx = \frac{1}{(n-t)^2} < \infty,$$

posto que $t < n$.

Para finalizarmos, necessitamos justicar que podemos derivar sobre a integração em (3.20) e (3.21). Para isso, vamos utilizaremos o seguinte resultado

Teorema C.2.1 *Suponhamos* $h : X \times [a,b] \to \mathbb{C}(-\infty < a < b < \infty)$ *e* $h(x,\cdot) : X \to C$ *é integrável para cada* $t \in [a,b]$*. Seja* $F(t) = \int_X h(x,t)d\mu(x)$*:*
(i) *Suponhamos que exista* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|h(x,t)| \leq g(x)$ *para todo x,t. Se* $\lim_{t\to t_0} h(x,t) = h(x,t_0)$ *para cada* x *então* $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$*. Em particular, se* $h(x,\cdot)$ *é contínua para cada* x *então* F *é contínua.*
(ii)*Suponhamos que* $\frac{\partial h}{\partial t}$ *exista e* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ *para todo* x,t*. Então* F *é diferenciável e* $F'(t) = \int_X \left(\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)d\mu(x)\right)$*.*

A demonstração é basicamente uma aplicação do teorema da convergência dominada. Para maiores detalhes, a prova pode ser encontrada em [6]. Vamos considerar $X = S^{n-1}\times(0,\infty)$ e $h(x',r,t) = P(x')r^{t-1+is}\hat{\phi}(rx')$ que é integrável para $t \in (0,n)$ e $s \in \mathbb{R}$. Agora, sabemos que $\partial h/\partial t = P(x')(\ln r) r^{t-1+is}\hat{\phi}(rx')$ e assim como $0 < t < n$ então $|\partial h/\partial t| \leq P(x')(\ln r) r^{n-1}\hat{\phi}(rx')$ que é integrável em X. Pela parte (ii) do teorema acima segue a igualdade em (3.24). Analogamente temos as igualdades em (3.25), (3.26) e (3.27)

Referências Bibliográficas

[1] BOURGAIN, J.; BREZIS, H. *New estimates for the laplacian, the div-curl, and related Hodge systems.* Comptes Rendus Mathematique, Paris, v. 308, n. 7, p. 539-543, 2004.

[2] CALDERÓN, A. P.; ZYGMUND, A. *On existence of certain singular integrals.* Acta Mathematica, v. 88, p. 85-139, 1952.

[3] COTLAR, M. *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert.* Cursos y seminarios de Matemática, Universidad de Buenos Aires, Fasc. 2.

[4] DUOANDIKOETXEA, J. *Fourier analysis.* American Mathematical Society, 2001.

[5] EVANS, L. C.*Partial differential equations.* American Mathematical Society, 1999.

[6] FOLLAND, G. B. *Real analysis, modern techniques and their applications.* Wiley-Interscience Publication, United States of American, 1984.

[7] HÖRMANDER, L. *Estimates for translation invariant operators on L^p spaces.* Acta Mathematica, v. 104, p. 93-139, 1960.

[8] HOUNIE, J. G. *Teoria elementar das distribuições.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[9] HUNT, R. A. *An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces.* Bulletin American Mathematical Society, v. 70, n. 6, p. 803-807, 1964.

[10] LANZANI, L.; STEIN, E. M. *A note on div curl inequalities.* Mathematical Research Letters, v. 12, n. 1, p. 57-61, 2005.

[11] LIMA, E. L. *Curso de análise.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, v. 2, 1981.

[12] LORENTZ, G. G. *Some new function spaces.* Annal of Mathematic, v. 51, n. 1, p. 37-55, 1950.

[13] LORENTZ, G. G. *On the theory of spaces* Λ. Pacific Journal of Mathematic, v. 1, n. 3, p. 411-429, 1951.

[14] RUDIN, W. *Real and complex analysis.* MacGraw-Hill, 1970.

[15] SCHAFTINGEN, J. V. *Estimates for* L^1 *vector fiels.* Comptes Rendus Mathematique, v. 338, v. 1, p. 23-26, 2004.

[16] STEIN, E. M. *Harmonic analysis.* Princeton University Press, New Jersey, 1993.

[17] STEIN, E. M.; WEISS, G. *Introduction to Fourier analysis on euclidian spaces.* Princeton University Press, New Jersey, 1975.

[18] TREVES, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, 1967.