

Interpolação em imagens

Prof. Luiz Otavio Murta Jr.

Informática Biomédica

Depto. de Computação e Matemática (FFCLRP/USP)

Principais Tópicos

- Introdução
- Método de interpolação por vizinhos próximos
- Método de interpolação linear
- Método de interpolação por convolução
- Método de interpolação “Spline”
- Interpolação em duas dimensões

Introdução

Interpolação é o processo de estimar valores intermediários de uma função ou sinal discreto amostrado em posições no espaço contínuo.

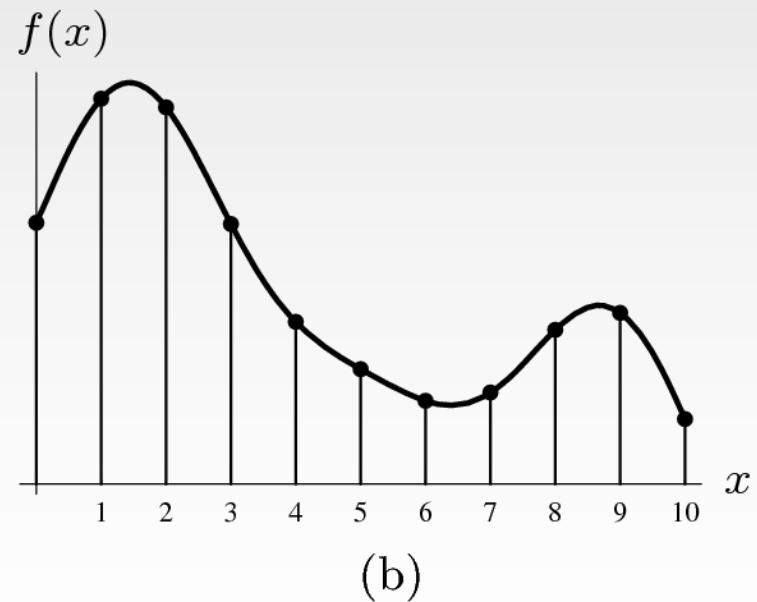
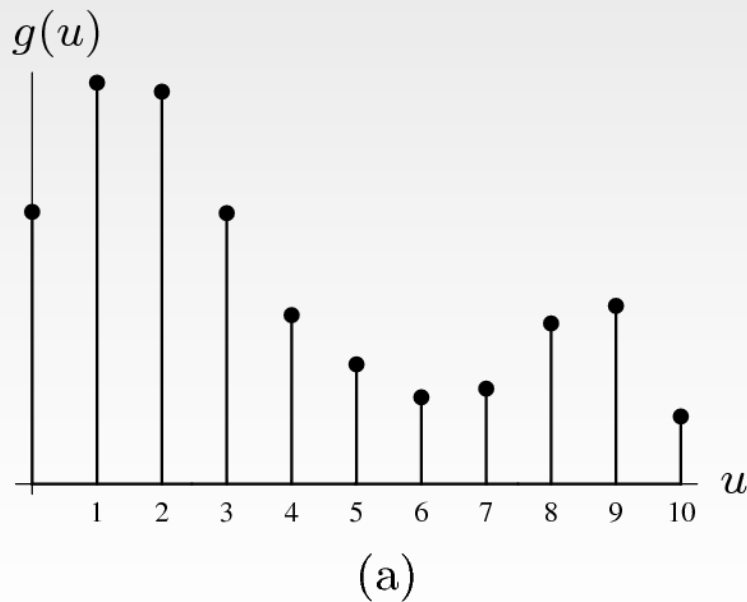
O objetivo concreto é obter uma estimativa ótima para valores de uma imagem em qualquer posição do espaço bidimensional de imagem:

$$I(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Na prática, a função interpolada deve preservar o máximo de detalhes possíveis sem causar artefatos.

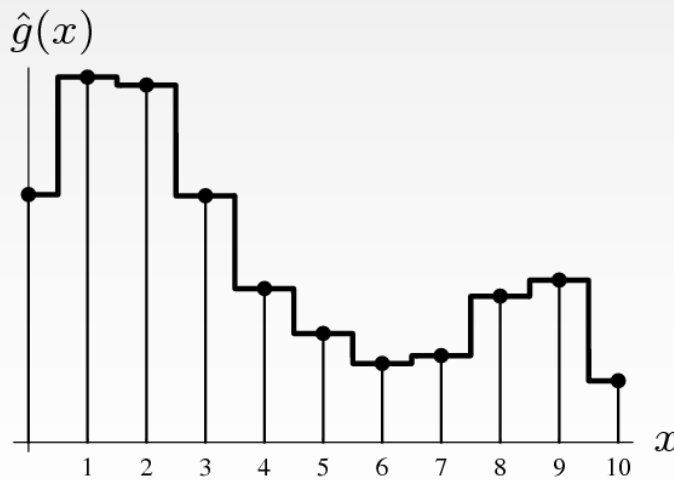
Introdução

Interpolação é o processo de estimar valores intermediários de uma função ou sinal discreto amostrado em posições no espaço contínuo.

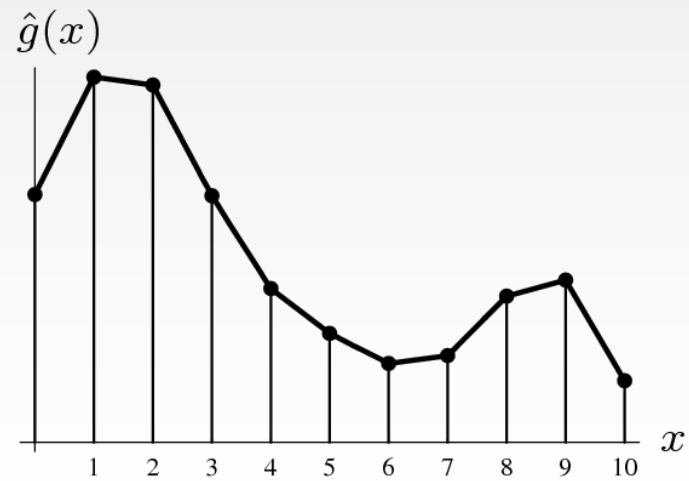


Interpolação por vizinhos próximos

O método de interpolação mais simples possível é o operado pelo arredondamento da coordenada x pelo inteiro mais próximo u_0 e usa a amostra em $g(u_0)$ como estimativa de $g(x)$.



(a)



(b)

Interpolação linear

Outro método de interpolação simples é a interpolação linear.

Aqui o valor estimado é a soma ponderada dos dois pontos mais próximos $g(u_0)$ e $g(u_0+1)$, sendo $u_0 = [x]$.

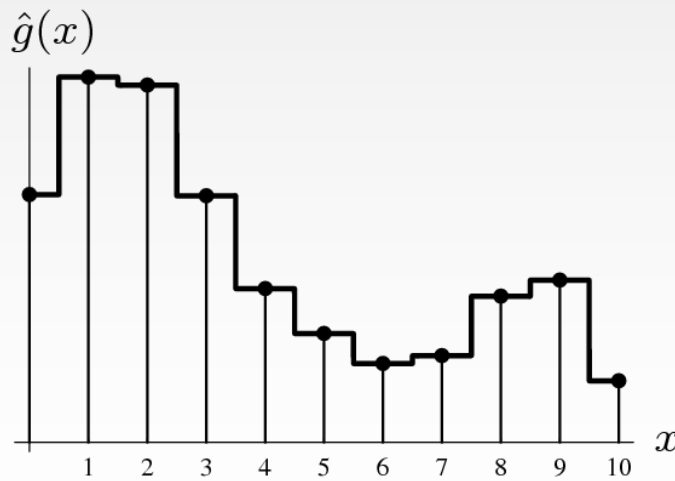
O peso de cada ponto é proporcional à proximidade da posição contínua x .

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= g(u_0) + (x - u_0) \cdot (g(u_0 + 1) - g(u_0)) \\ &= g(u_0) \cdot (1 - (x - u_0)) + g(u_0 + 1) \cdot (x - u_0)\end{aligned}$$

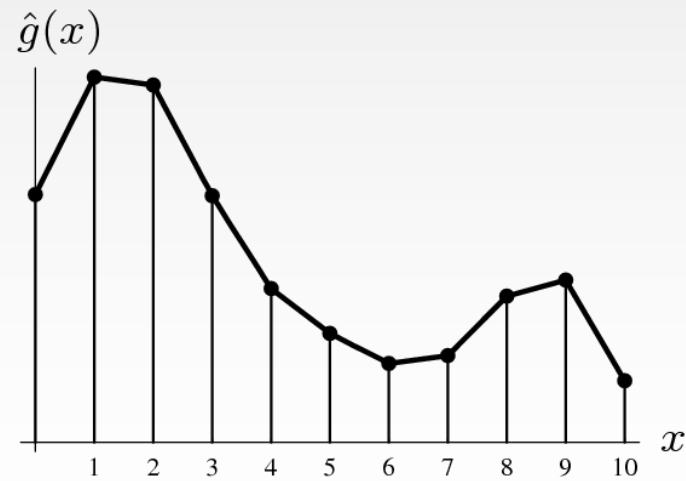
Interpolação linear

O peso de cada ponto é proporcional à proximidade da posição contínua x .

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= g(u_0) + (x - u_0) \cdot (g(u_0 + 1) - g(u_0)) \\ &= g(u_0) \cdot (1 - (x - u_0)) + g(u_0 + 1) \cdot (x - u_0)\end{aligned}$$



(a)



(b)

Interpolação Ideal

A princípio, o problema de interpolação parece não ter uma solução definitiva, uma vez que dois pontos podem ser interpolado de uma infinidades de trajetórias.

Há uma solução intuitiva se pensarmos em termos de banda de freqüências limitada.

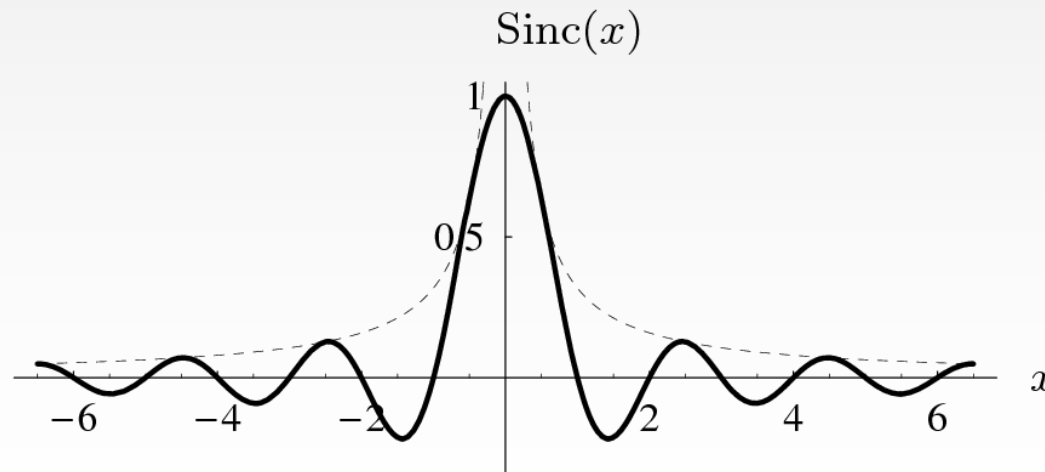
Não podendo conter sinais com freqüências maiores que metade da freqüência de amostragem.

Isto significa que o sinal reconstruído pode conter apenas um conjunto limitado de freqüências definidos pela lei de Nyquist.

Interpolação Ideal

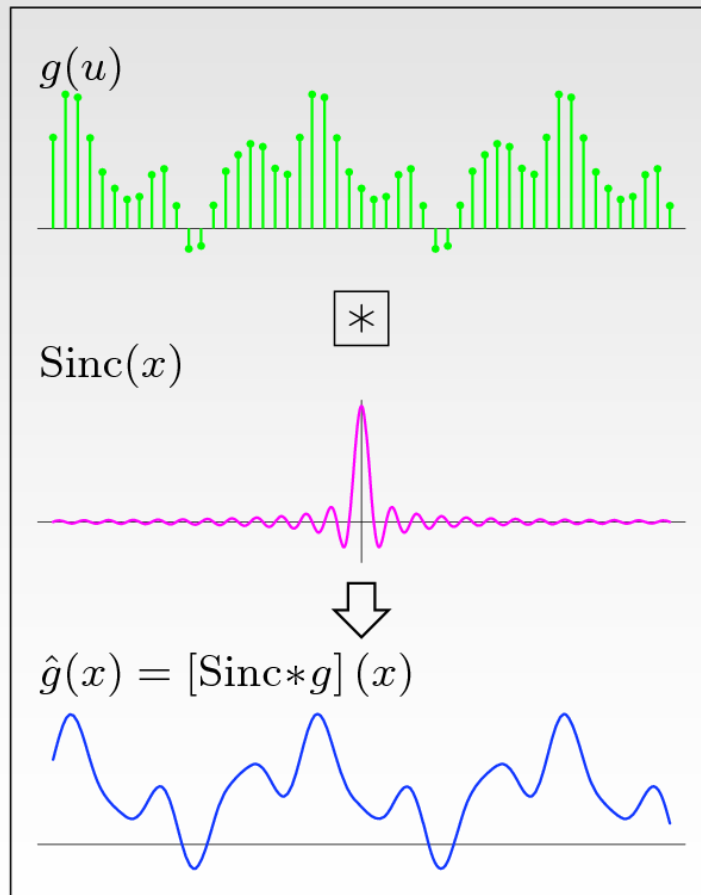
Se considerarmos a frequência amostral $\omega_s = 2\pi$, a máxima frequência será $\omega_{\max} = \omega_s / 2 = \pi$.

Para isolar as frequências devemos multiplicar o espectro pela janela quadrada o que é o filtro ideal em uma dimensão, cujo correspondente no espaço direto é a função Sinc:

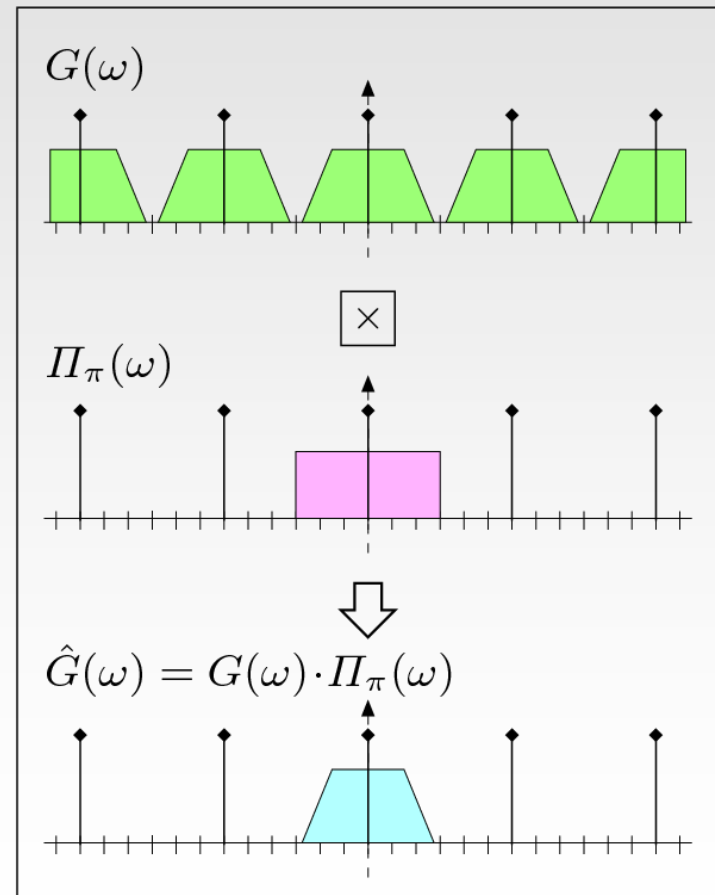


Interpolação Ideal

Espaço direto



Espaço de Frequências

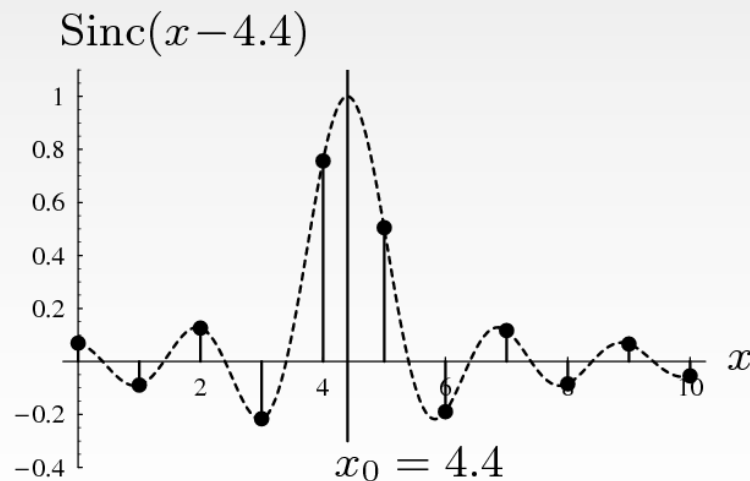


Interpolação Ideal

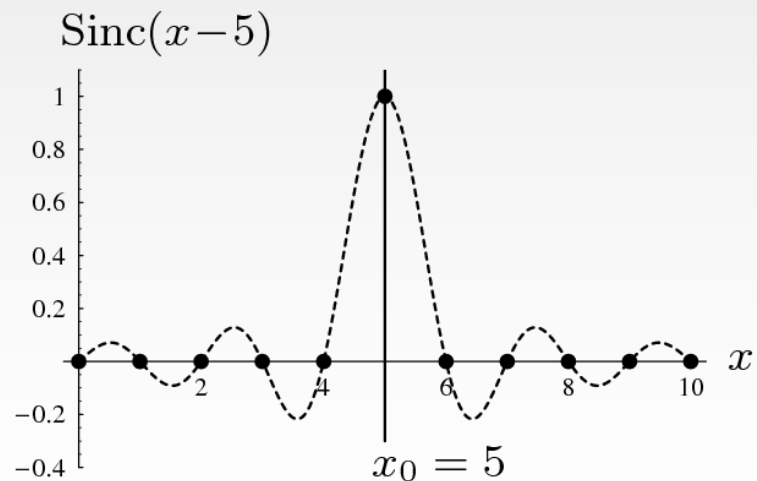
Calculo de valores interpolados:

$$\hat{g}(x_0) = [\text{Sinc} * g](x_0) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}(x_0 - u) \cdot g(u)$$

$$\hat{g}(x_0) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}(x_0 - u) \cdot g(u \bmod N)$$

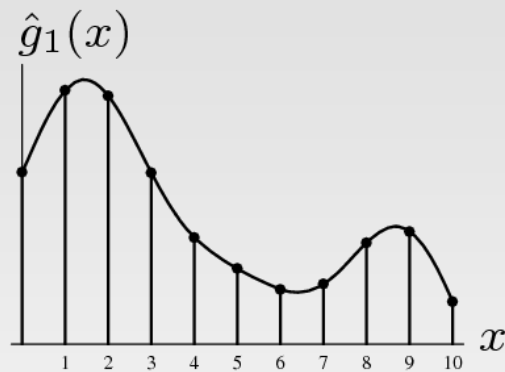


(a)

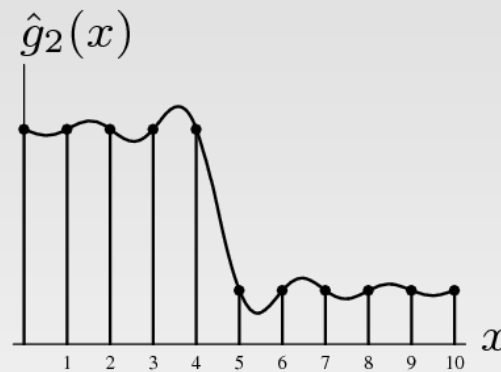


(b)

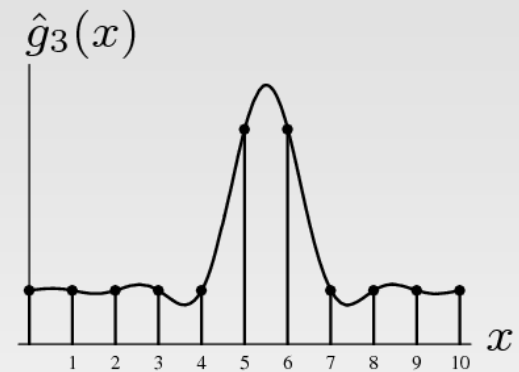
Interpolação Ideal



(a)



(b)



(c)

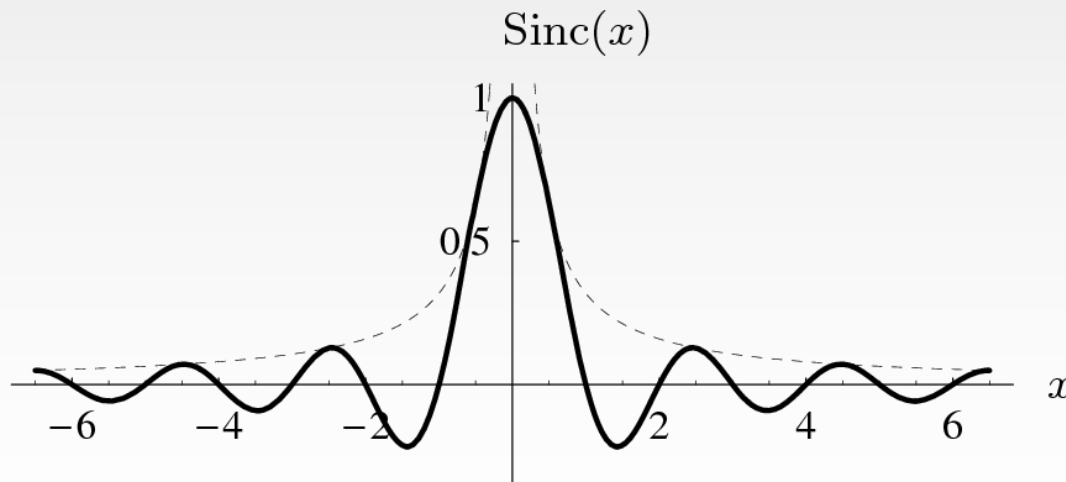
Se a função contínua possui o espaço de freqüências adequadamente limitado ($\omega_{\max} = \omega_s / 2$), ela pode ser exatamente reconstruída com interpolação ideal.

Porem, uma função contínua com componentes de alta freqüência, com transições rápidas como a figura acima (b, c), aparecem artefatos.

Interpolação Ideal

A interpolação ideal não é prática porquê:

1. Como vimos ela impõe artefato quando a função contínua não tem a banda limitada adequadamente.
2. A função Sinc tem extensão infinita, e em tese, seriam necessários todos os pontos para o calculo do valor interpolado.



Interpolação cúbica

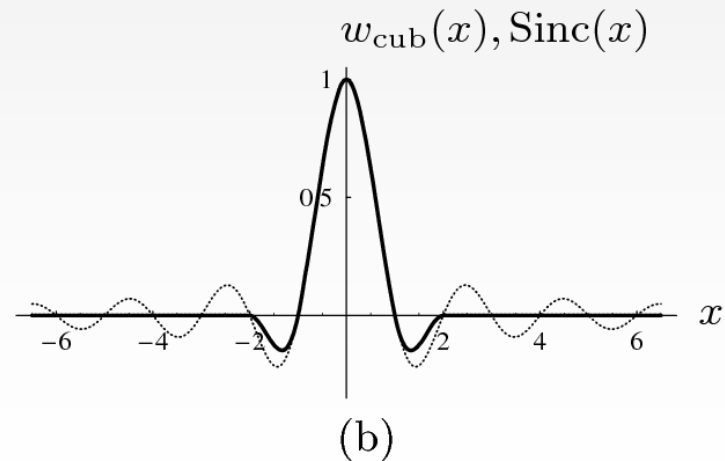
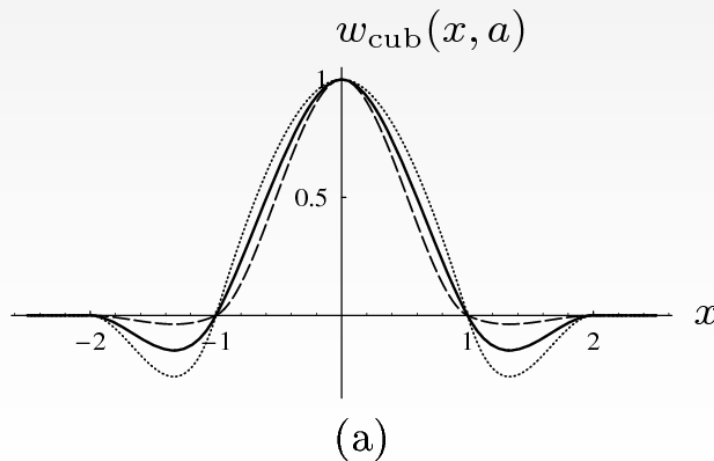
A Solução para os problemas da interpolação ideal é truncar a função Sinc, como uma aproximação dela mesma, uma vez que os lóbulos distantes da função tem influências cada vez menores.

A função Sinc truncada pode ser aproximada por uma função cúbica.

Interpolação cúbica

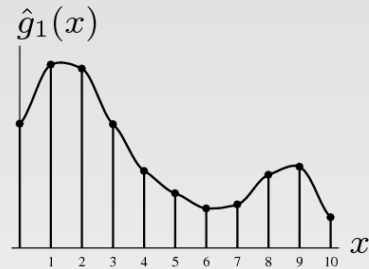
A função Sinc truncada pode ser aproximada por uma função cúbica.

$$w_{cub} = \begin{cases} (-a + 2) \cdot |x|^3 + (a - 3) \cdot |x|^2 + 1 & \text{para } 0 \leq |x| < 1 \\ -a|x|^3 + 5a|x|^2 - 8a|x| + 4a & \text{para } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{para } |x| \geq 2 \end{cases}$$

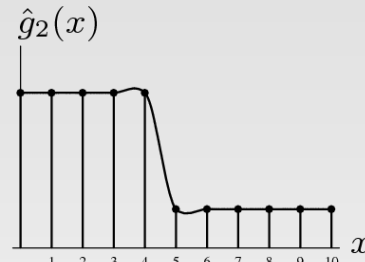


Interpolação cúbica

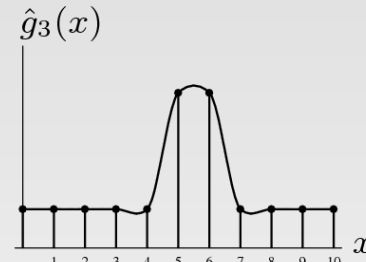
interpolação cúbica variando o parâmetro a .



(a)

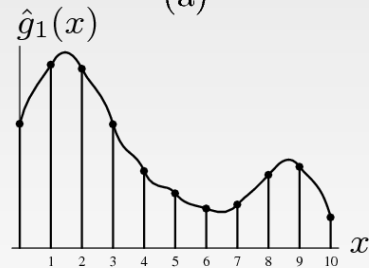


(b)

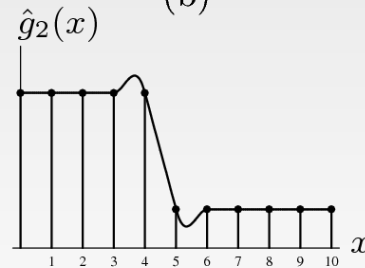


(c)

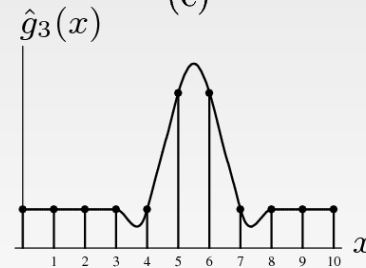
$a = 0,25$



(d)

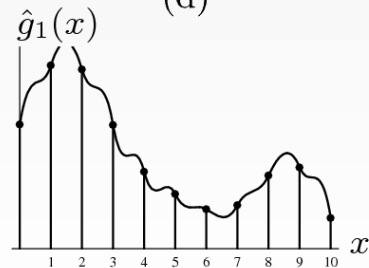


(e)

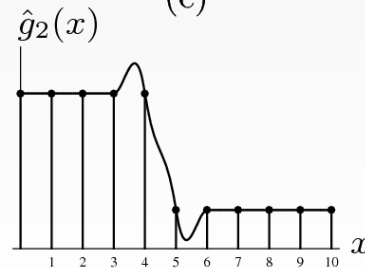


(f)

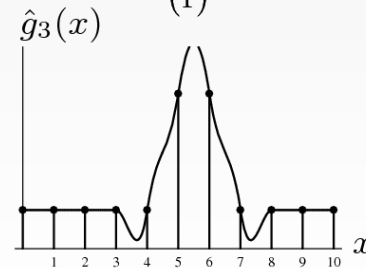
$a = 1$



(g)



(h)

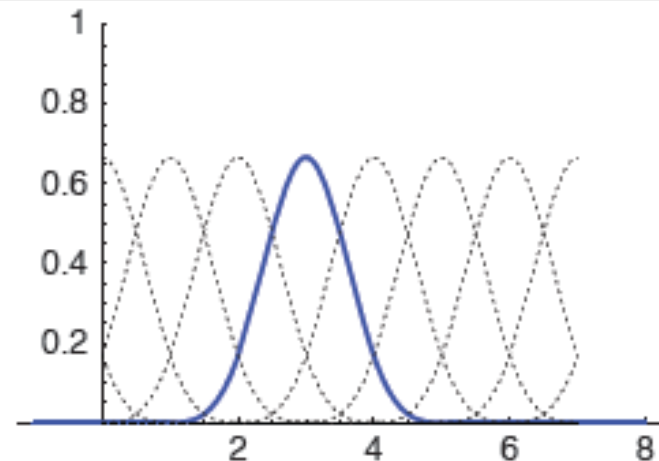
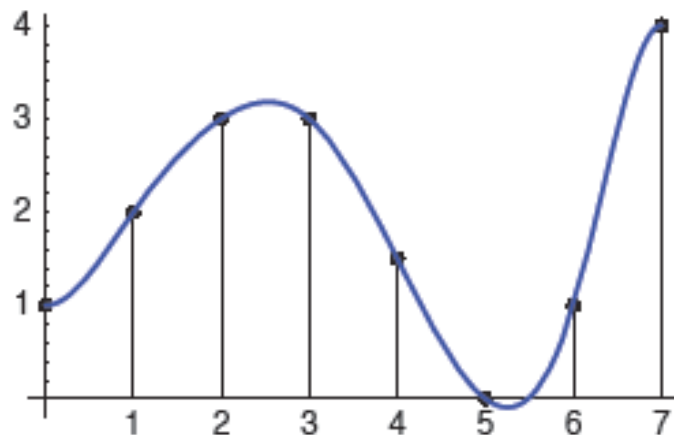


(i)

$a = 1,75$

Concepção:

- Splines são construídas como correspondências ótimas entre funções discretas e contínuas.



Definição: uma função $s(x)$ é uma spline polinomial de grau n com nós $\dots < x_k < x_{k+1} < \dots$. Se satisfazem as seguintes duas propriedades:

- **Polinômios por parte.**

$s(x)$ é um polinômio de grau n dentro de cada intervalo.

- **Função e derivadas contínuas.**

$s(x)$, $s'(x)$, $s''(x)$, ... são contínuas nos nós.

Graus de liberdade por segmentos:

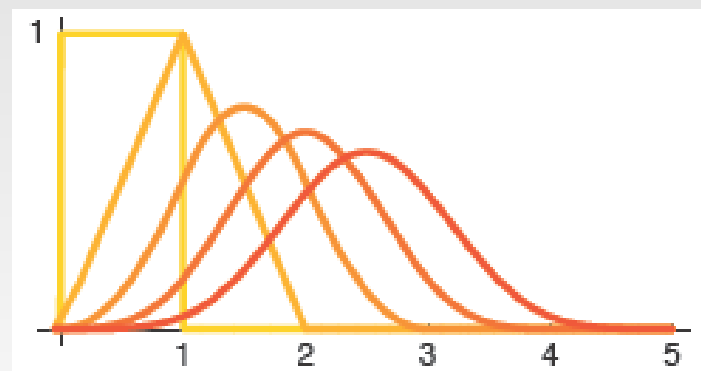
$n+1$	-	n	=	1
Coeficientes polinomiais		restrições		grau de liberdade

Base de funções

Expansão B-spline:

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x - k)$$

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

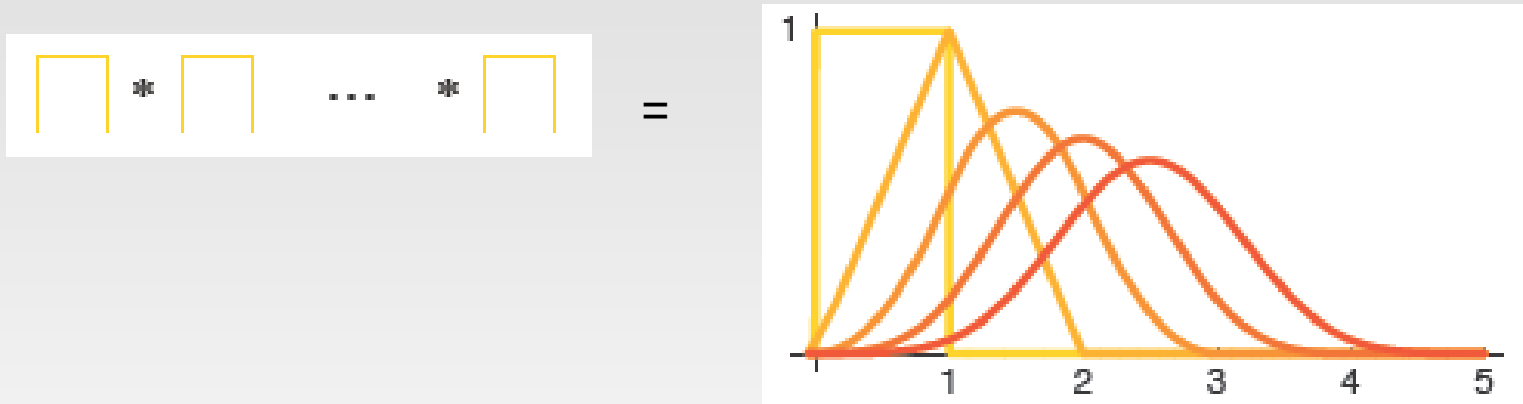


$$\beta^n(x) = \beta^0(x) * \beta^0(x) * \dots * \beta^0(x)$$

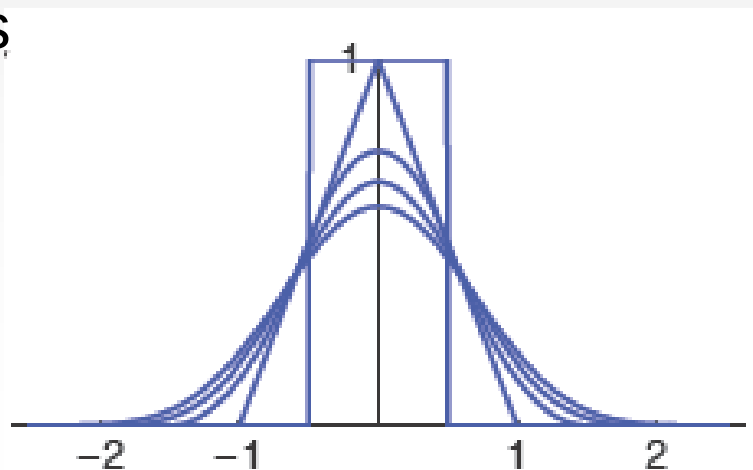
$n+1$ vezes

Base de funções

Convoluções



Bases de funções,
cada vez mais
extensas

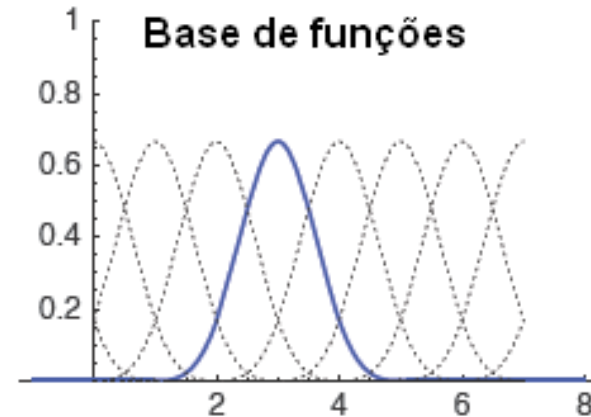
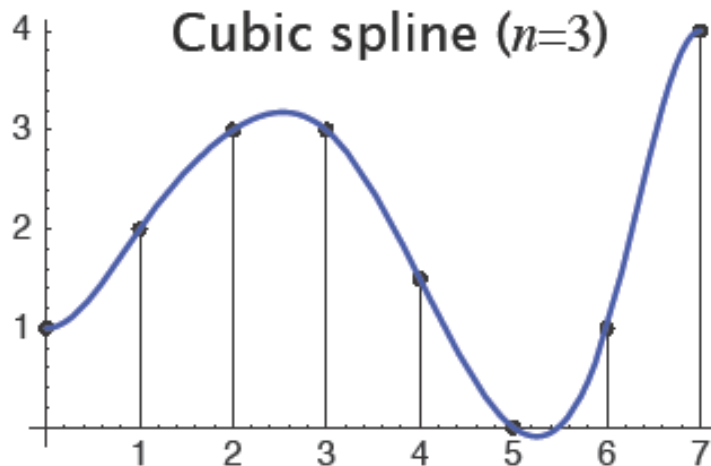


Extração dos coeficientes

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] \beta_+^n(x - k)$$

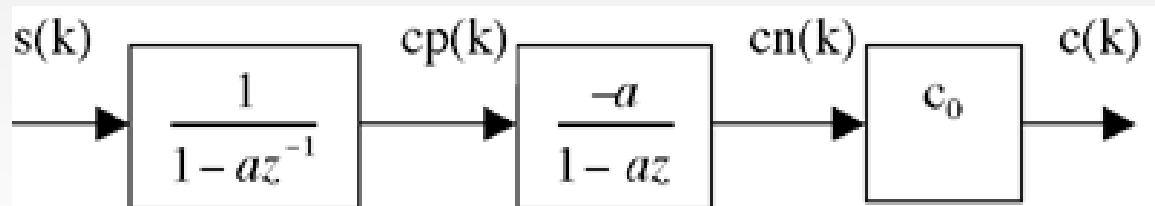
Função contínua
(interpolada)

coeficientes Bspline



Extração dos coeficientes

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2}, & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{(2 - |x|)^3}{6}, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases}$$



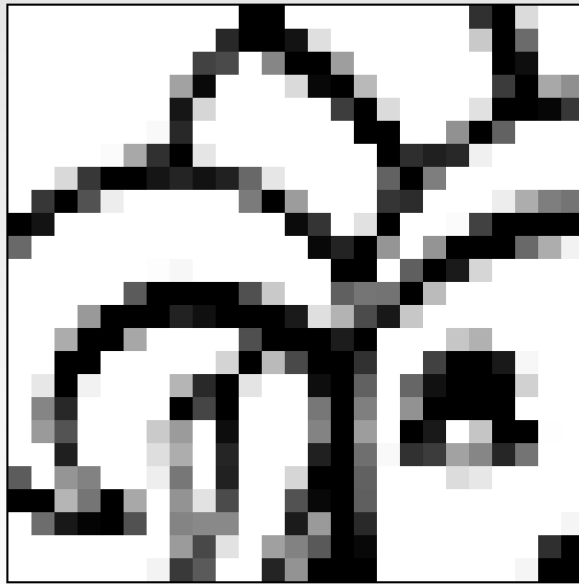
$$f(x, y) = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} c(k, l) \beta^3(x - k) \beta^3(y - l)$$

Interpolação em duas dimensões

vizinhos próximos e interpolação linear



(a)



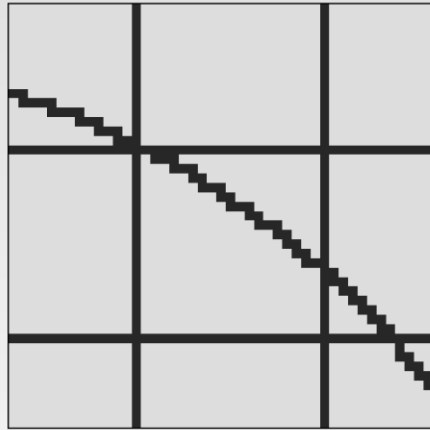
(b)



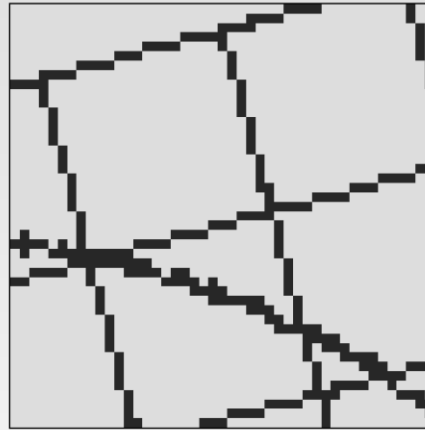
(c)

Interpolação em duas dimensões

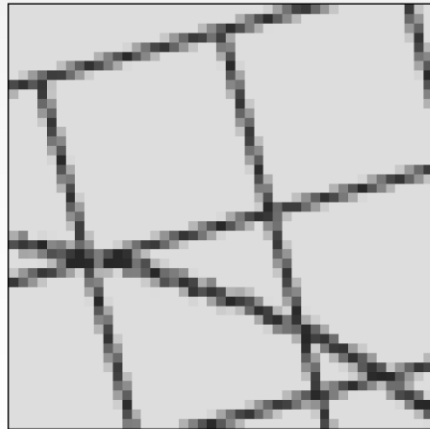
vizinhos próximos, interpolação bilinear e bicúbica



(a)



(b)



(c)

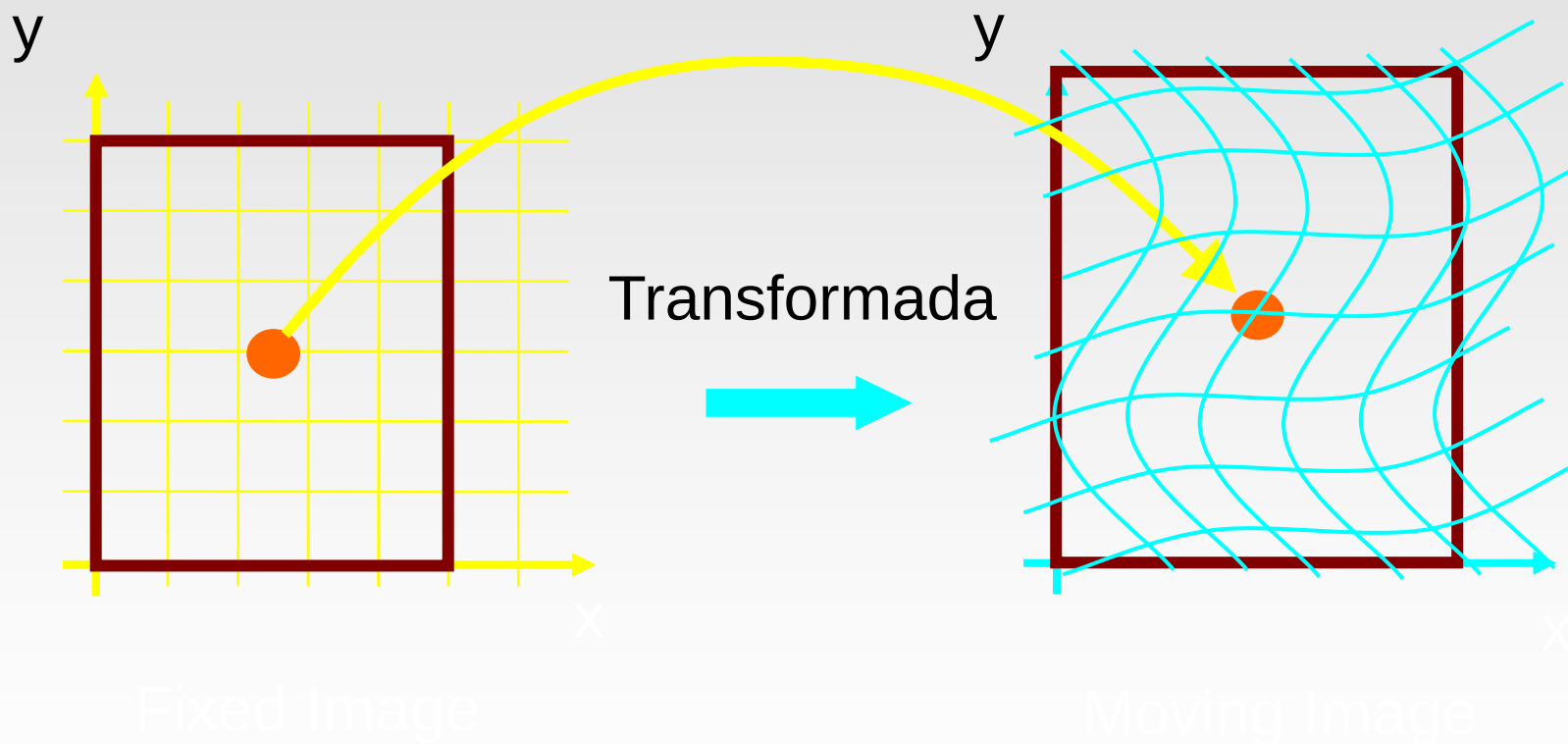


(d)

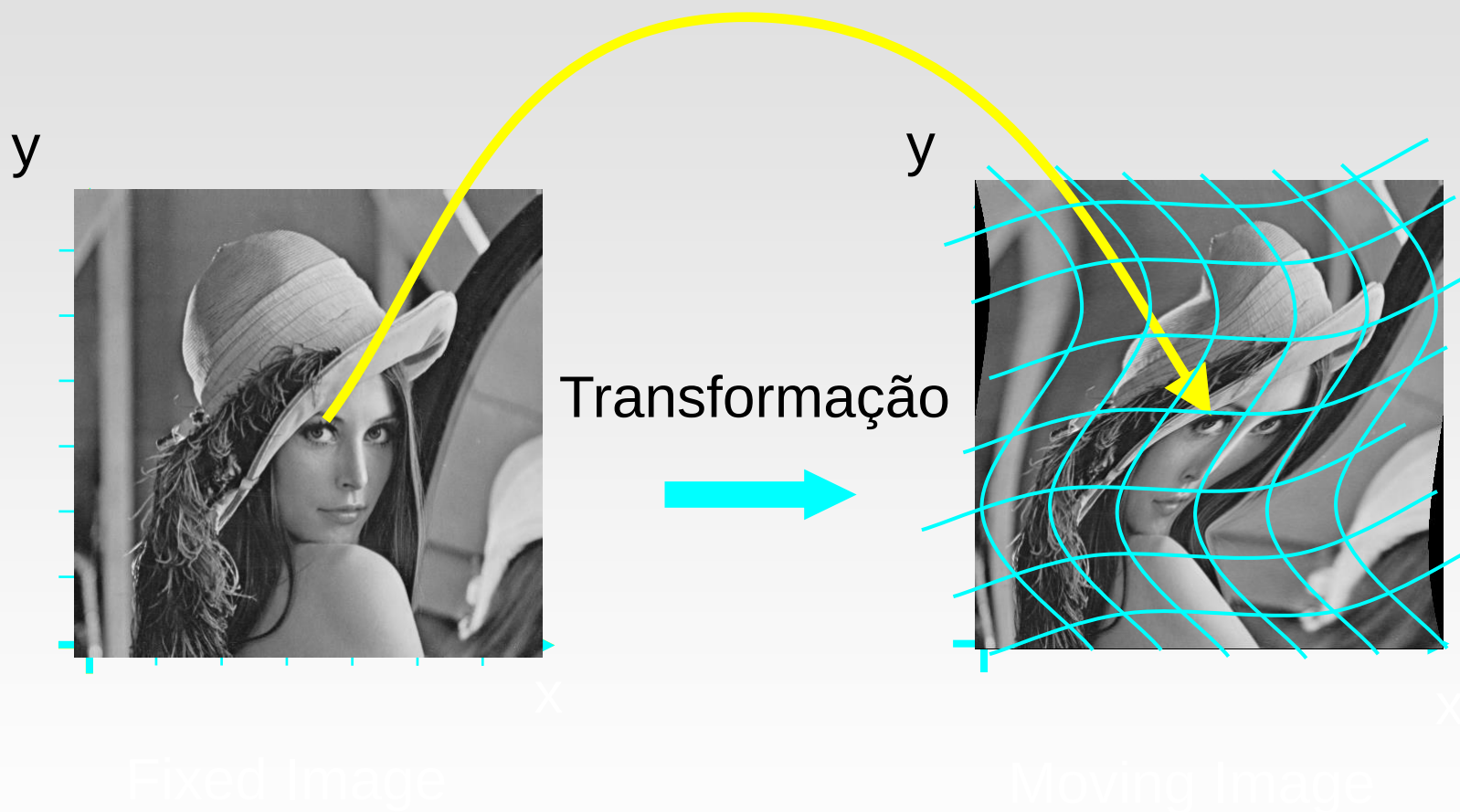
Transformação Deformável

BSplines

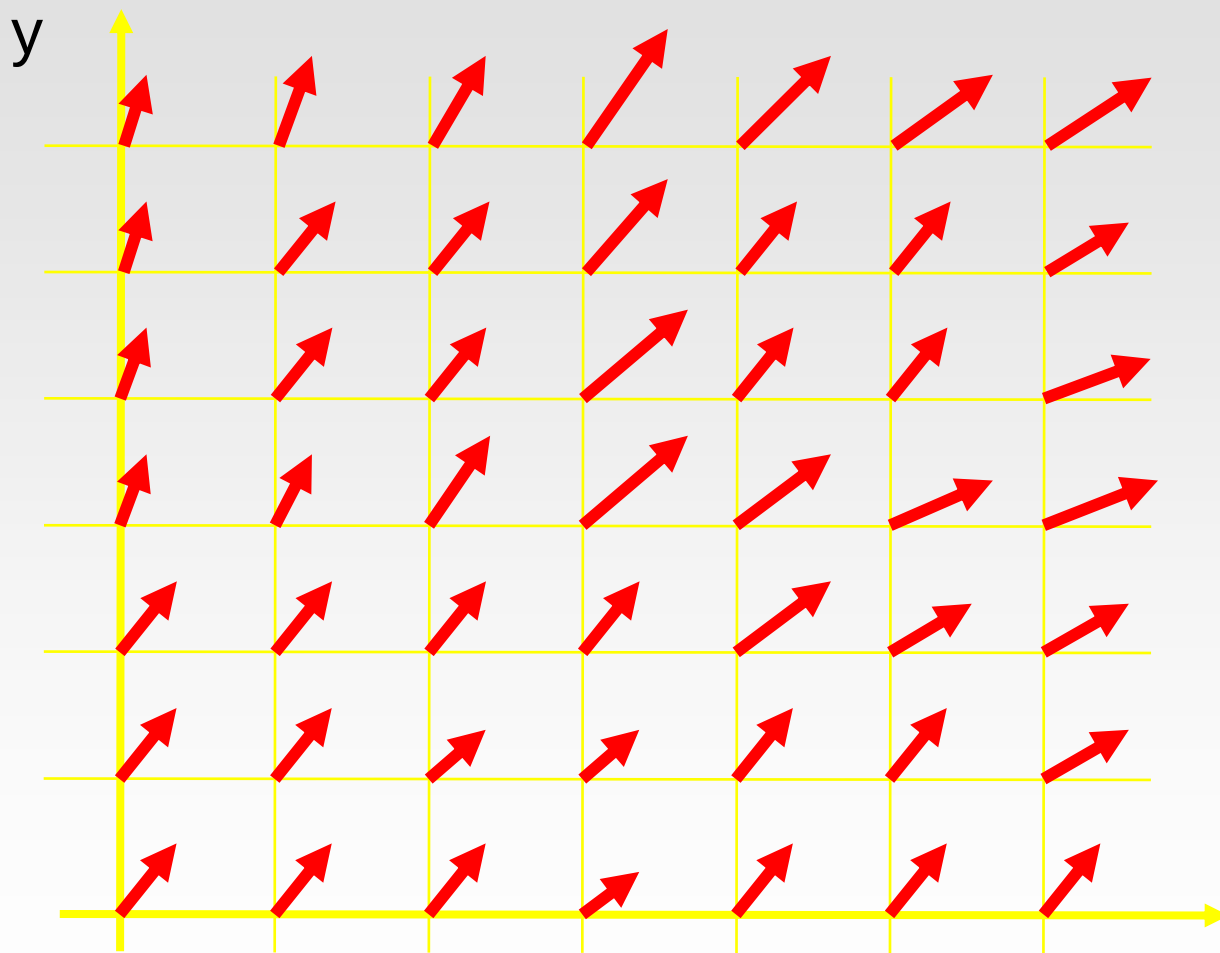
Transformação Deformável



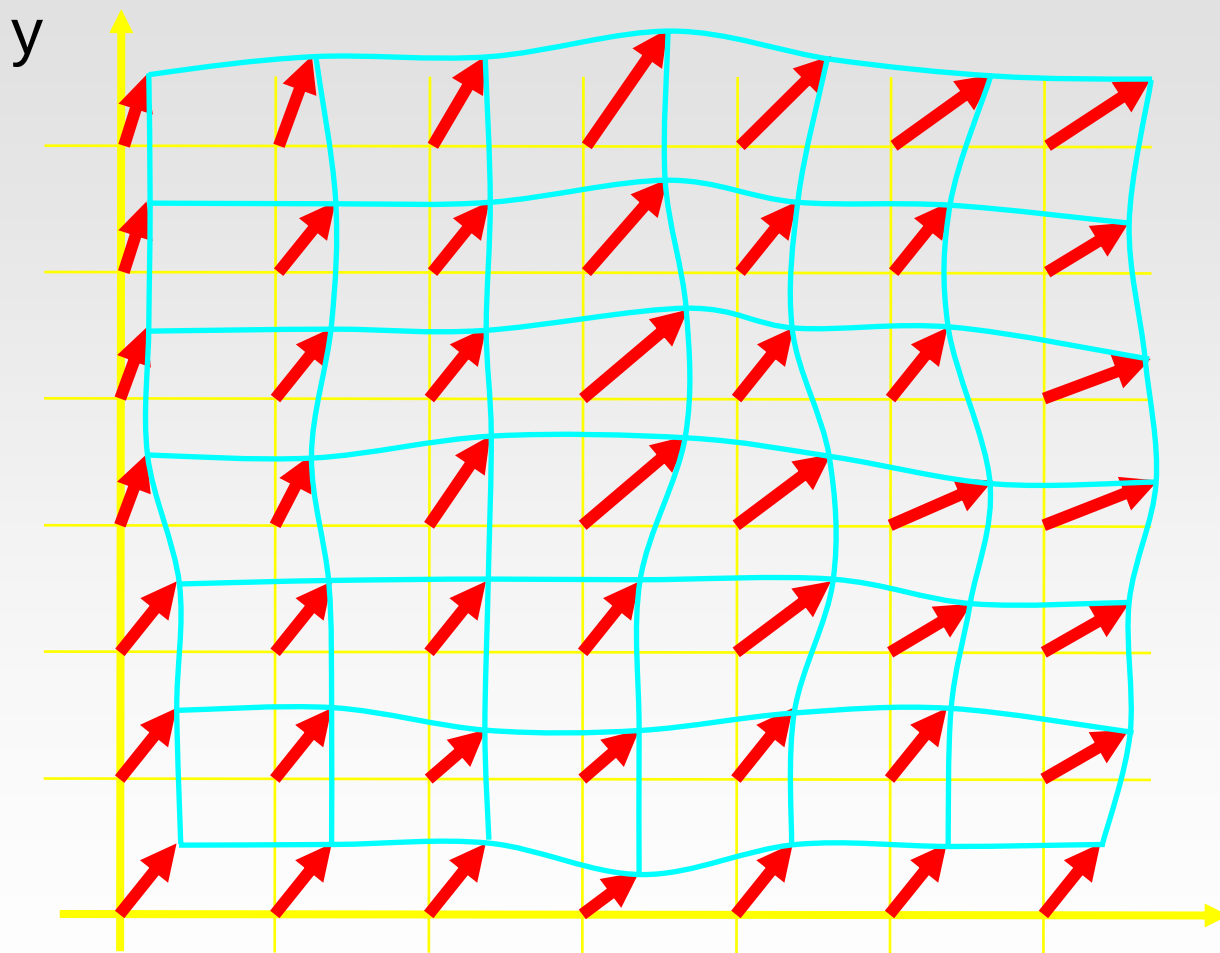
Transformação Deformável



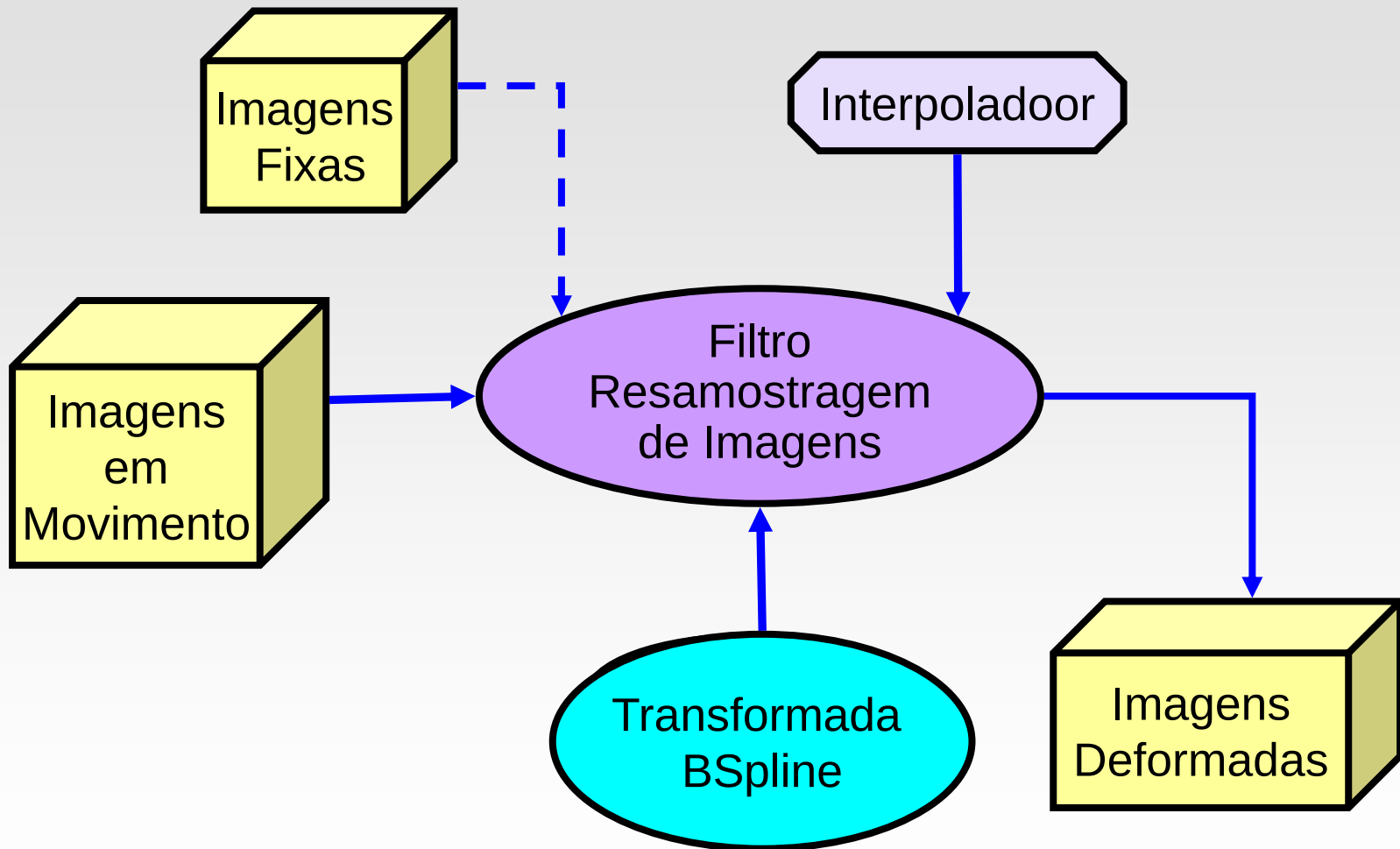
Transformação Deformável



Transformação Deformável



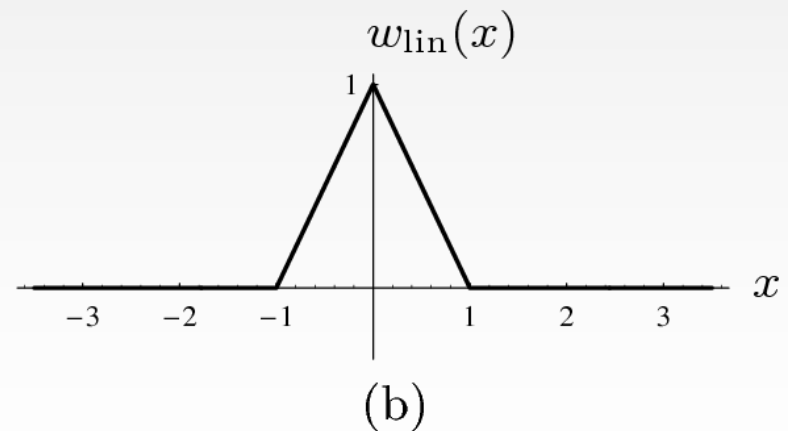
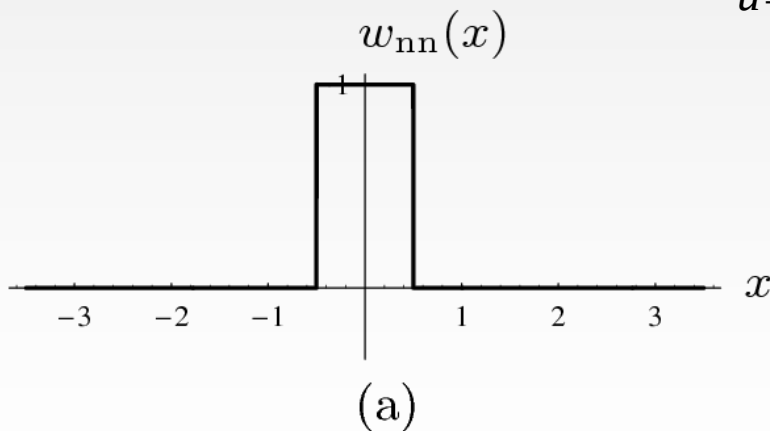
Reamostrando Imagens



Interpolação por convolução

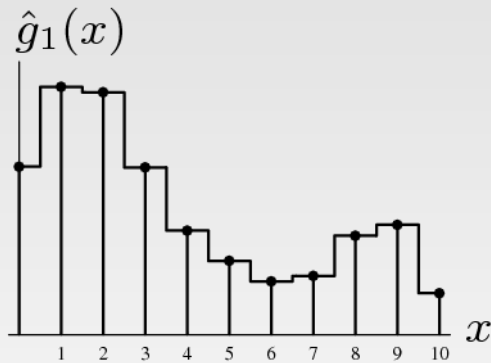
Em geral, podemos expressar uma interpolação como uma convolução de uma dada função discreta com uma função contínua que representa o núcleo da interpolação.

$$\hat{g}(x_0) = [w \otimes g](x_0) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} w(x_0 - u) \cdot g(u)$$

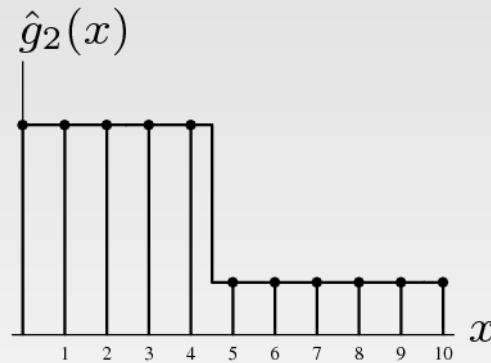


Interpolação por convolução

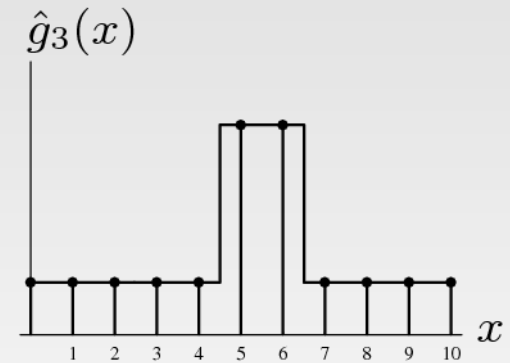
vizinhos próximos e interpolação linear



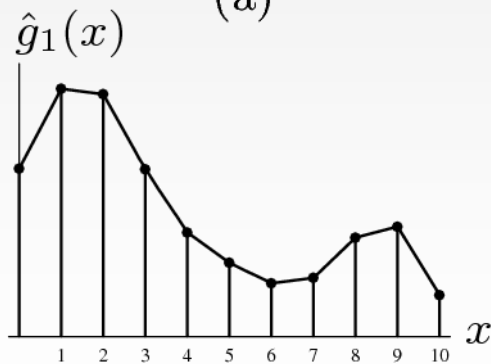
(a)



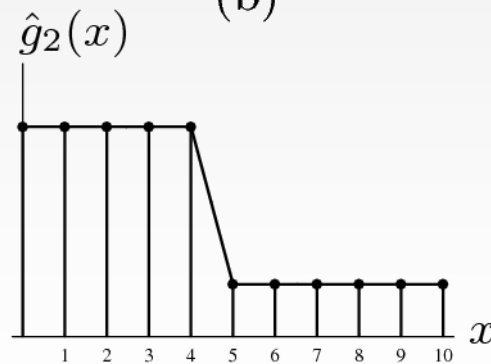
(b)



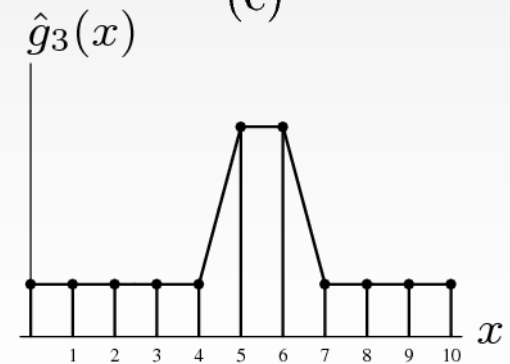
(c)



(d)



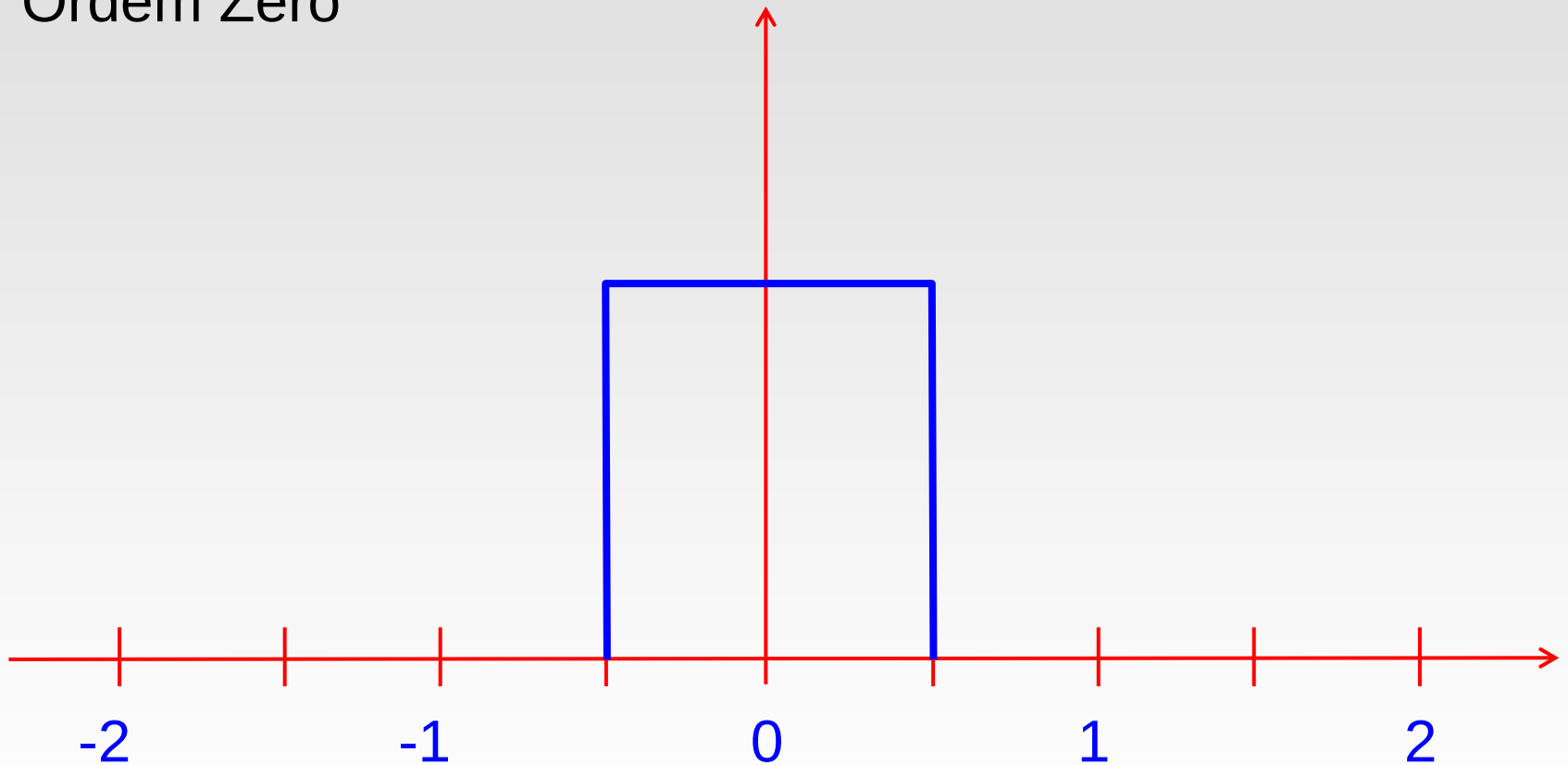
(e)



(f)

BSplines

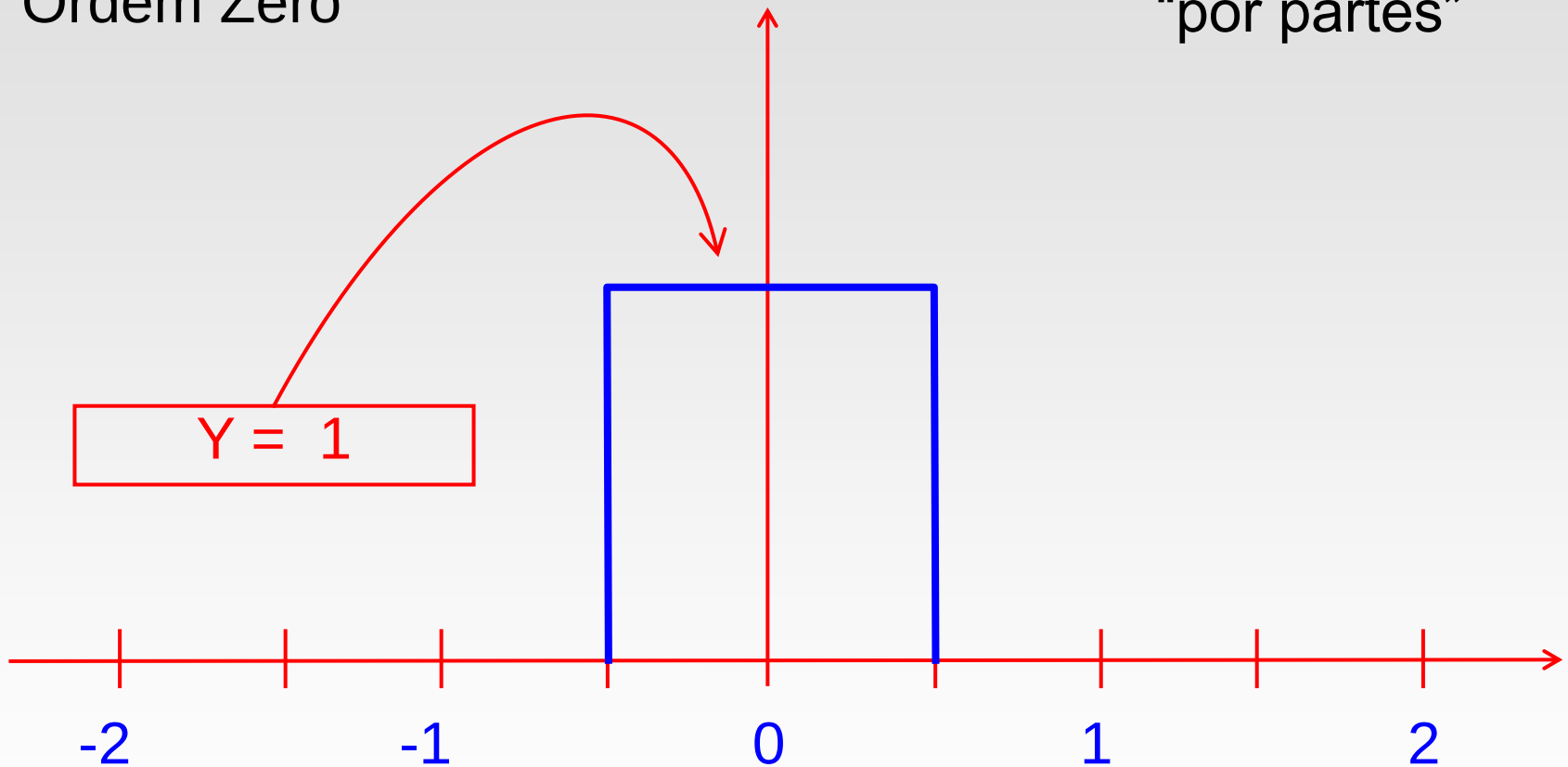
Ordem Zero



BSplines

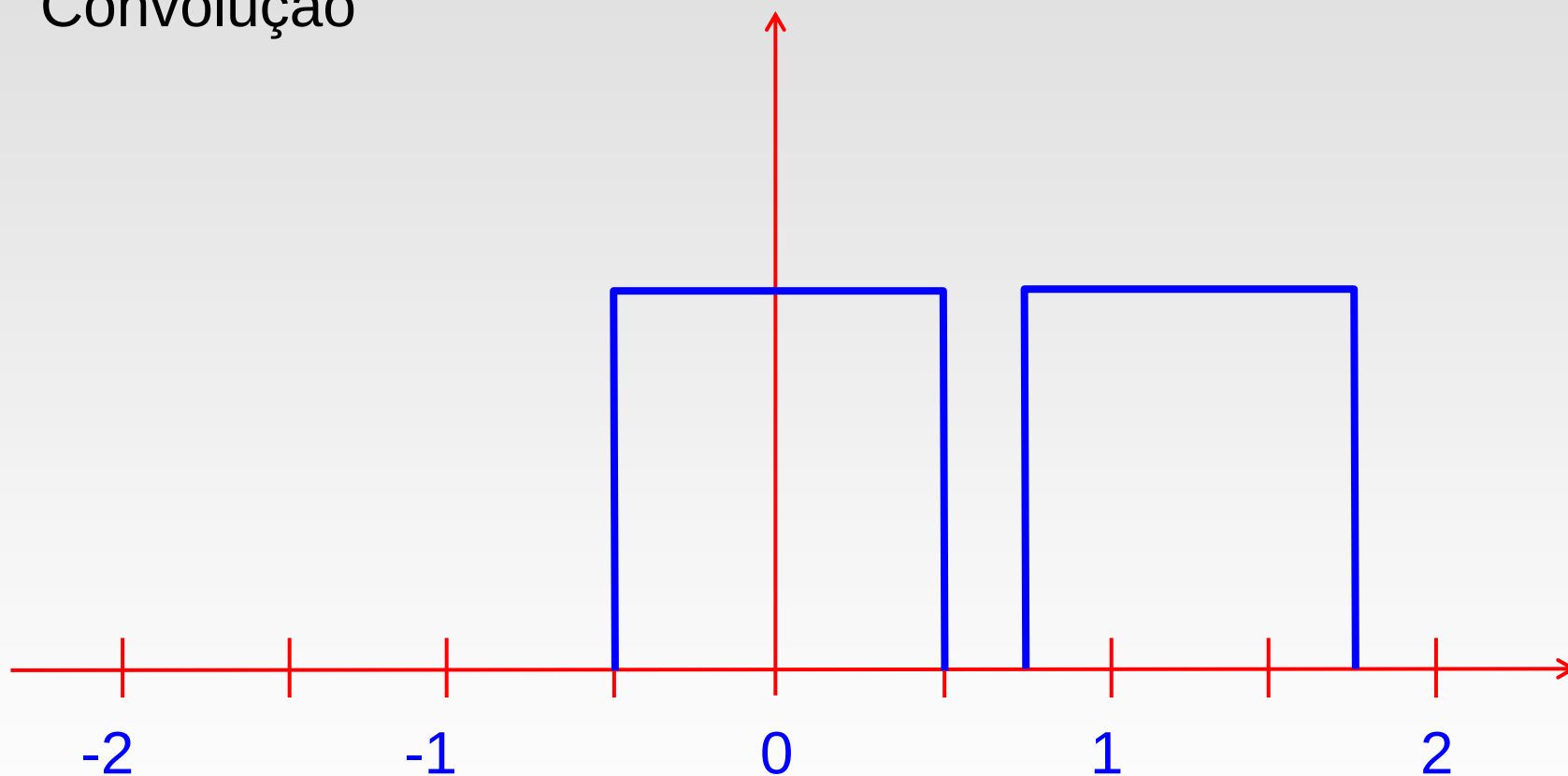
Ordem Zero

“por partes”



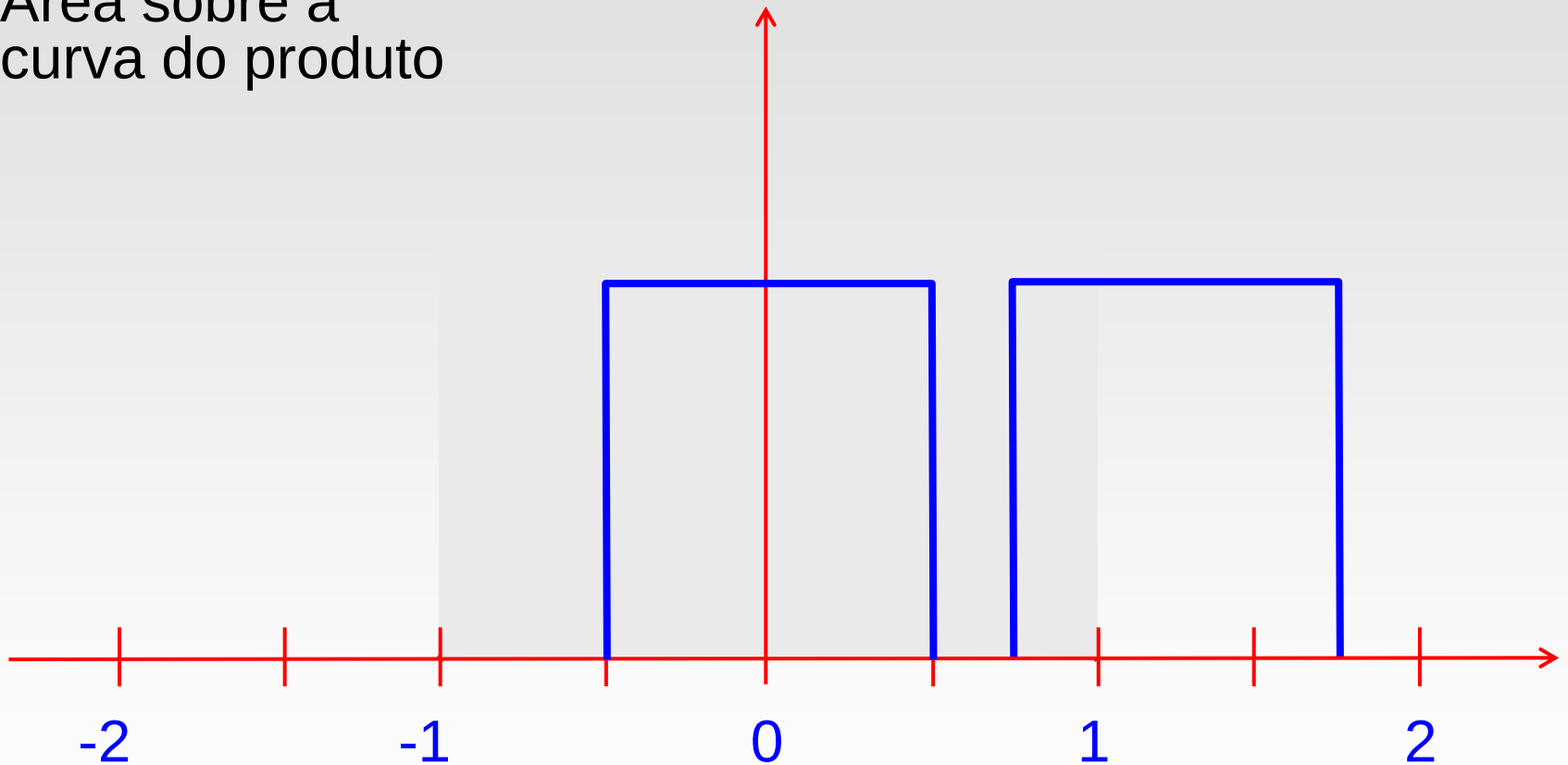
BSplines

Convolução

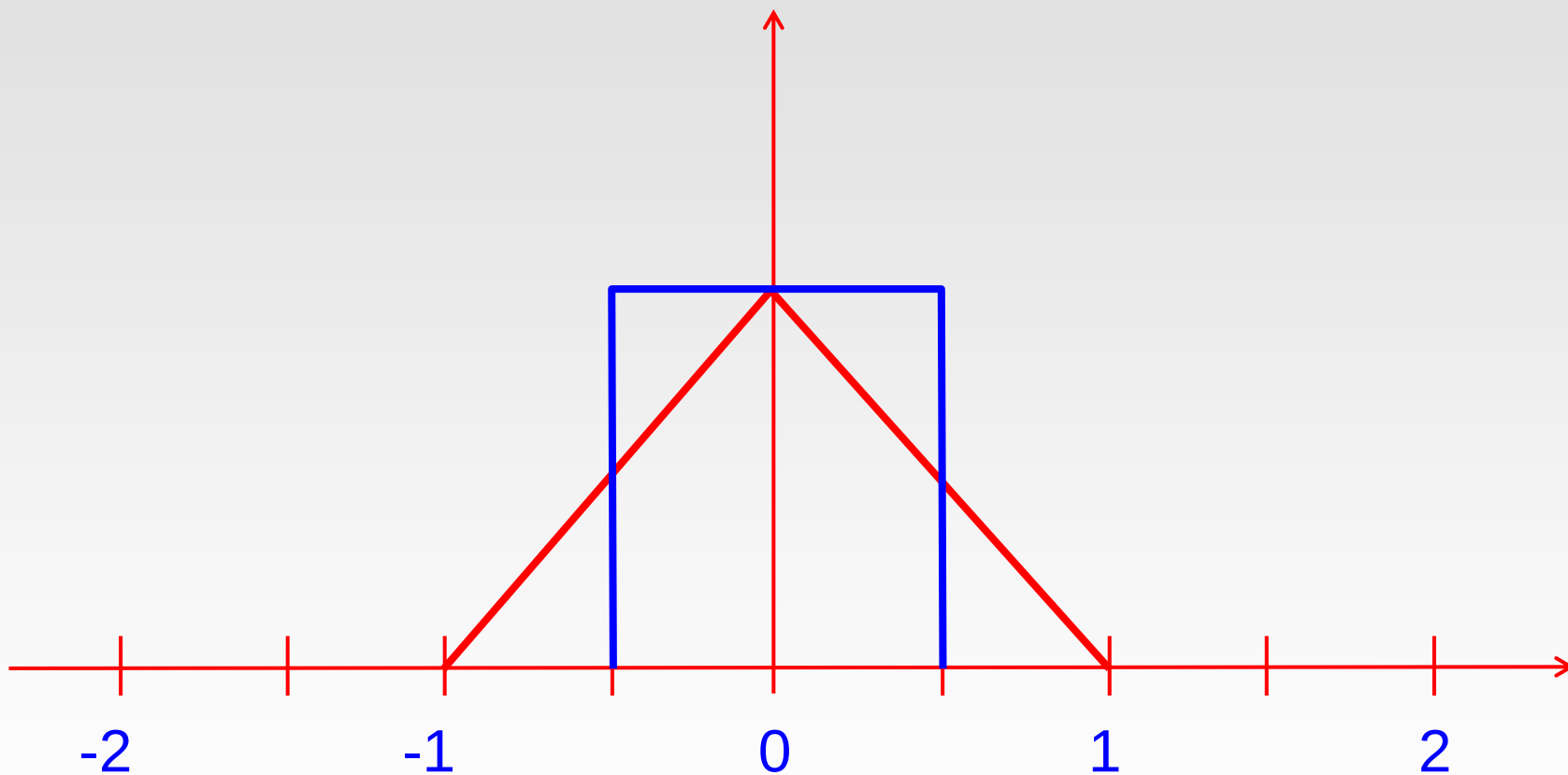


BSplines

Area sobre a
curva do produto

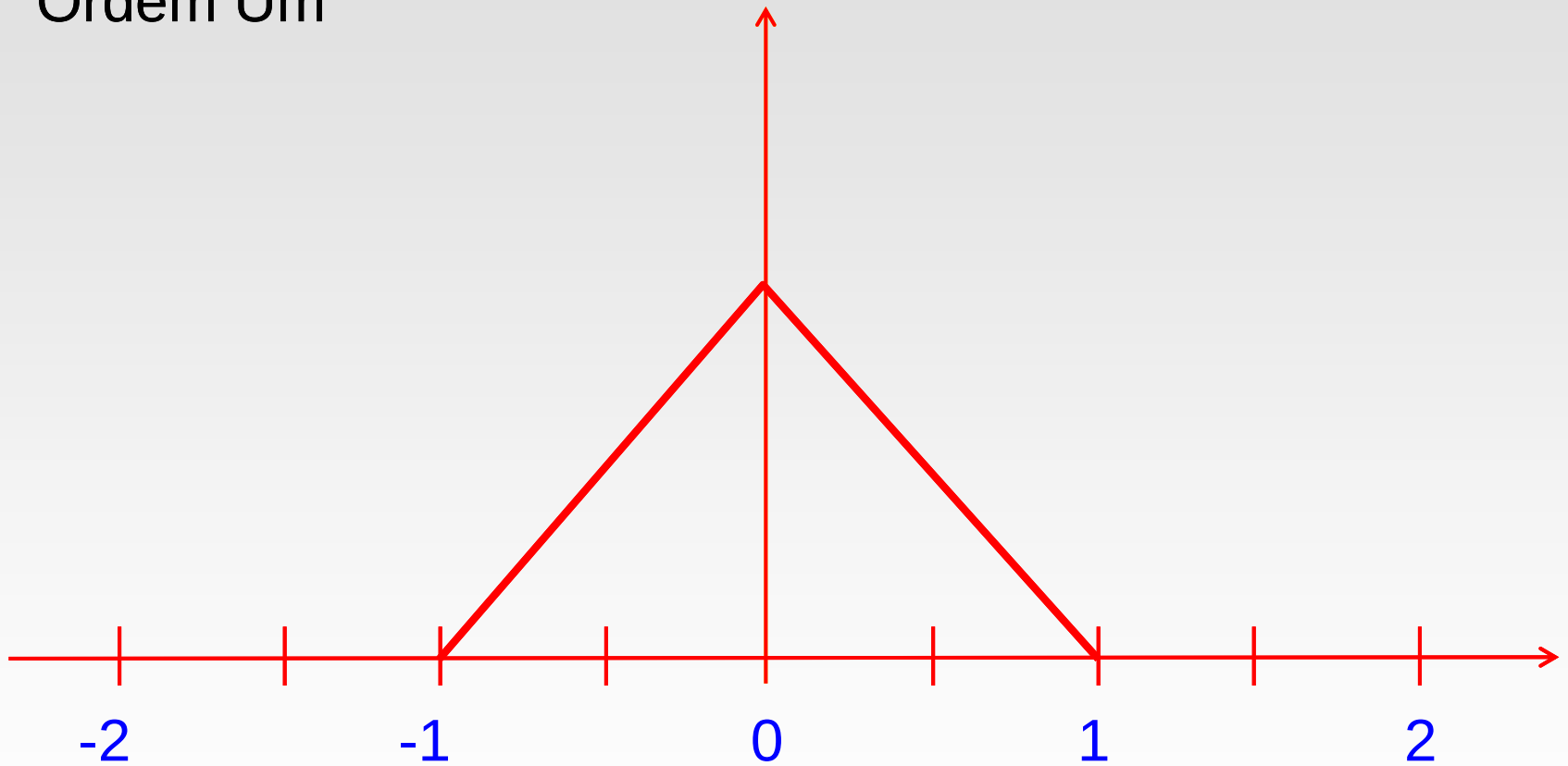


BSplines



BSplines

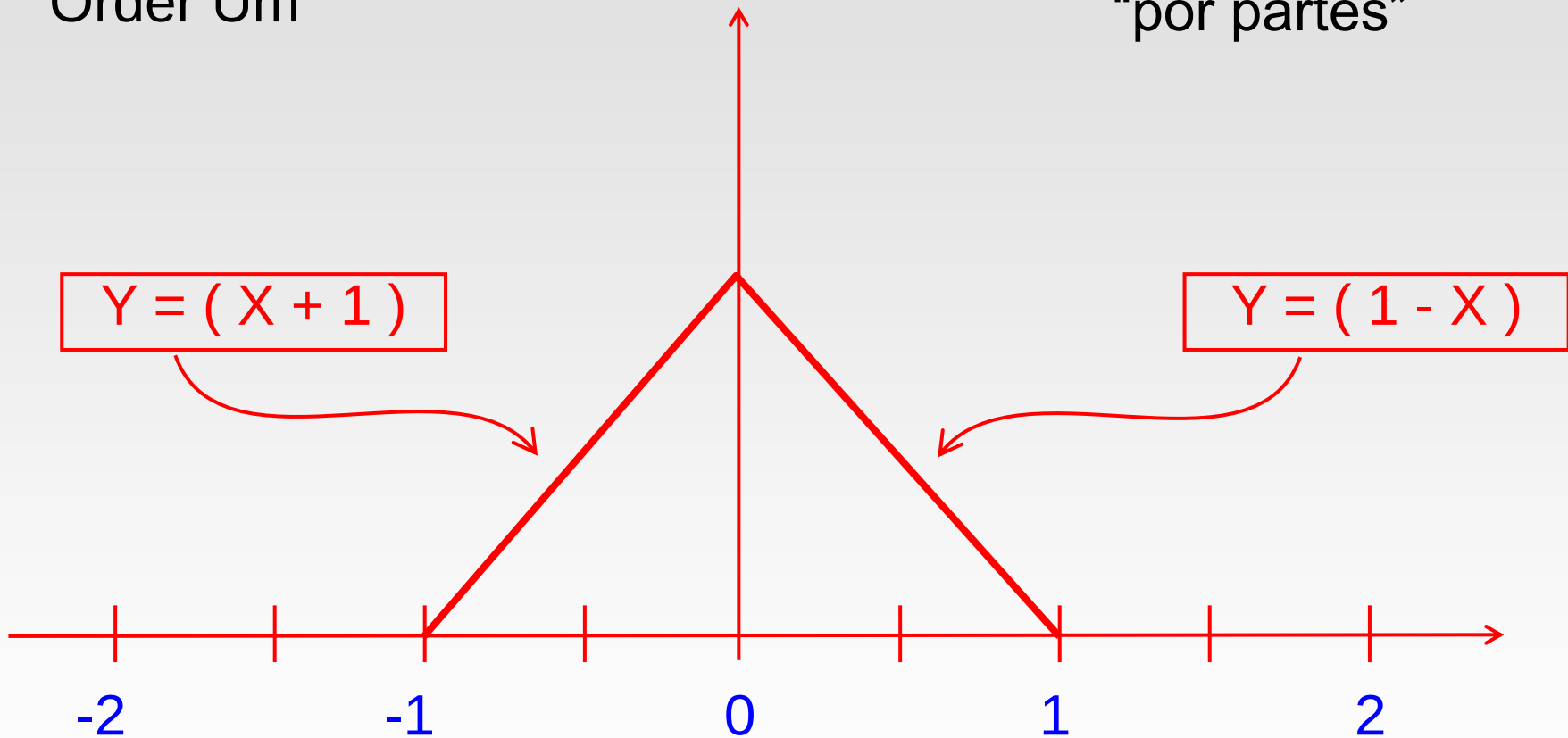
Ordem Um



BSplines

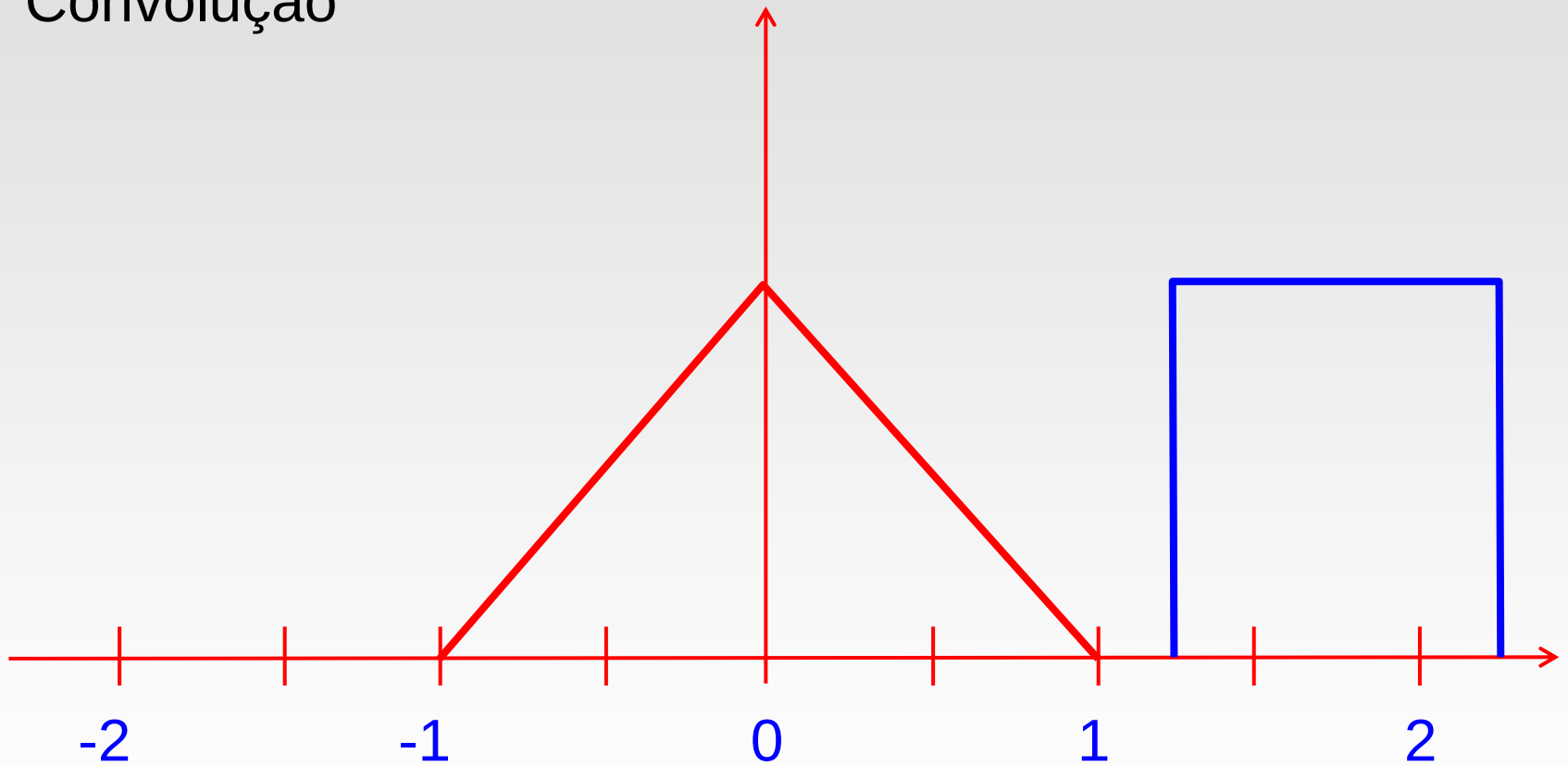
Order Um

“por partes”



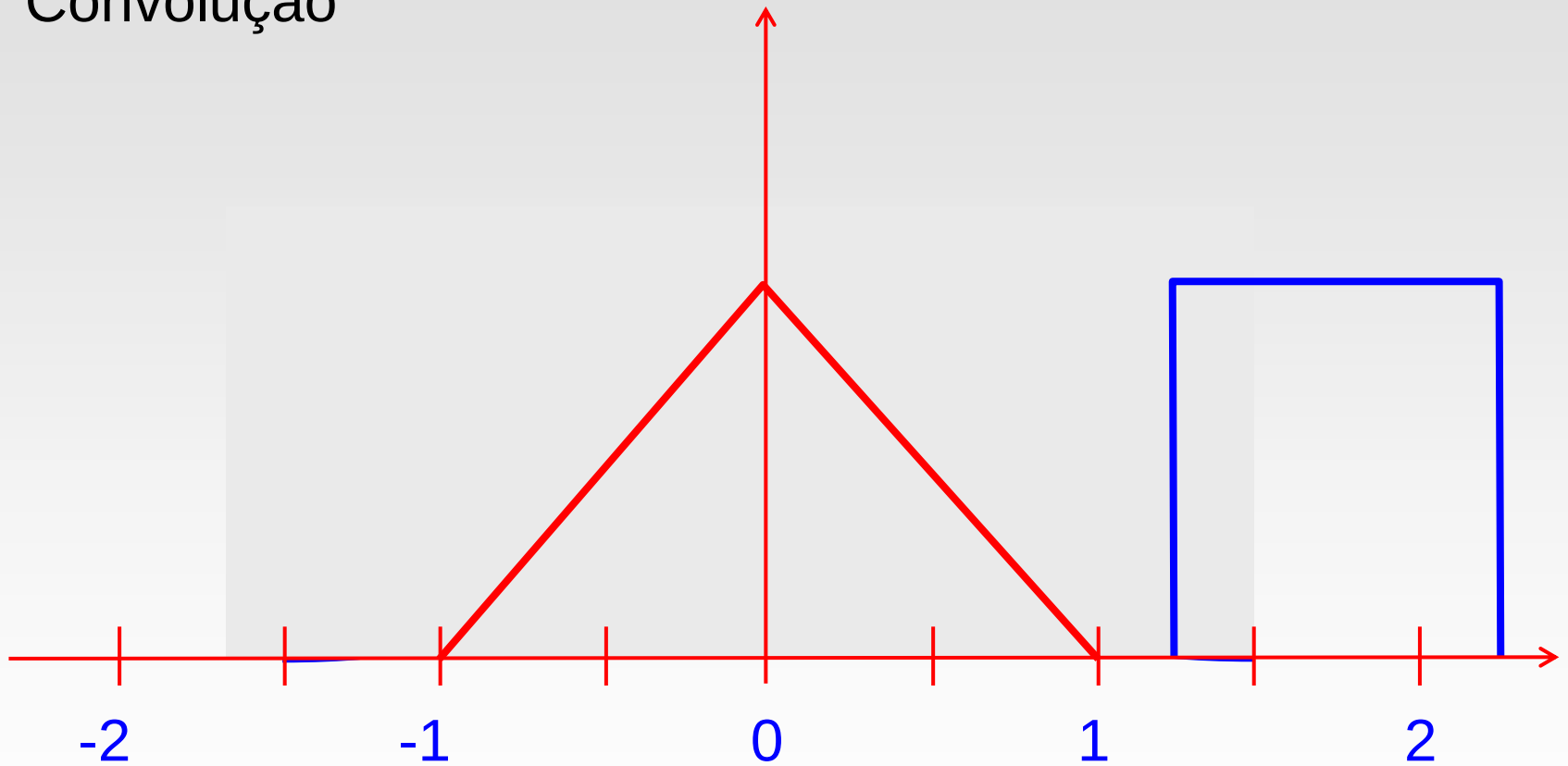
BSplines

Convolução



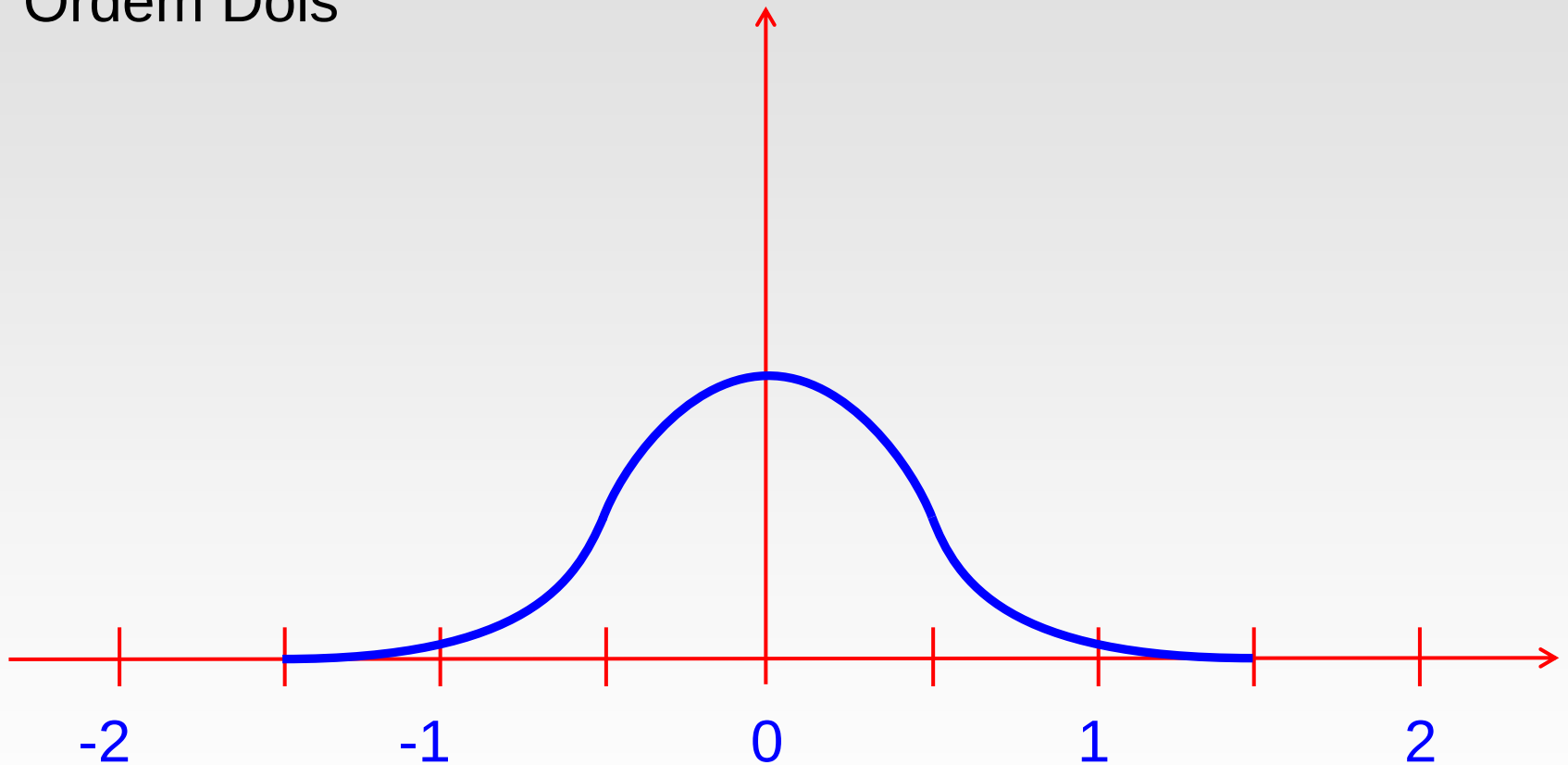
BSplines

Convolução



BSplines

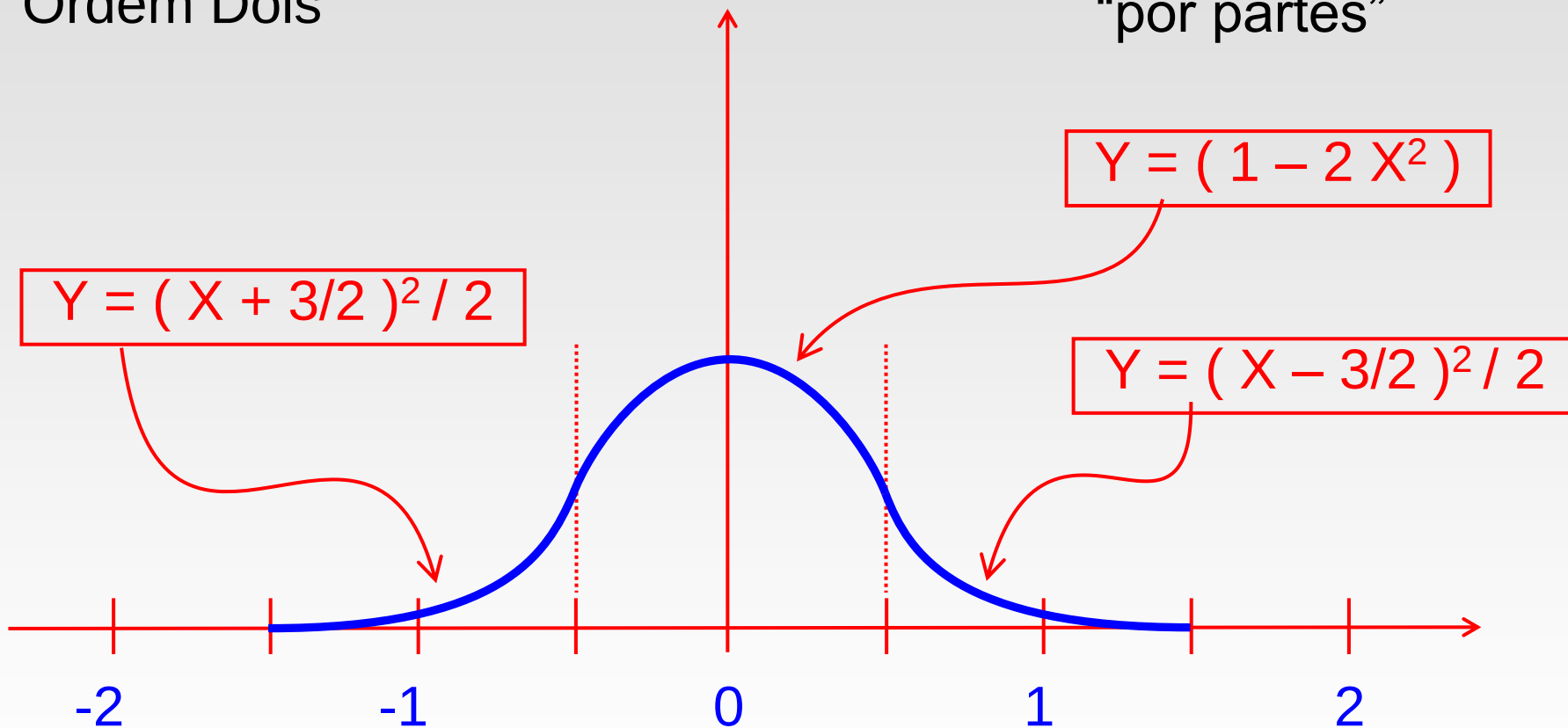
Ordem Dois



BSplines

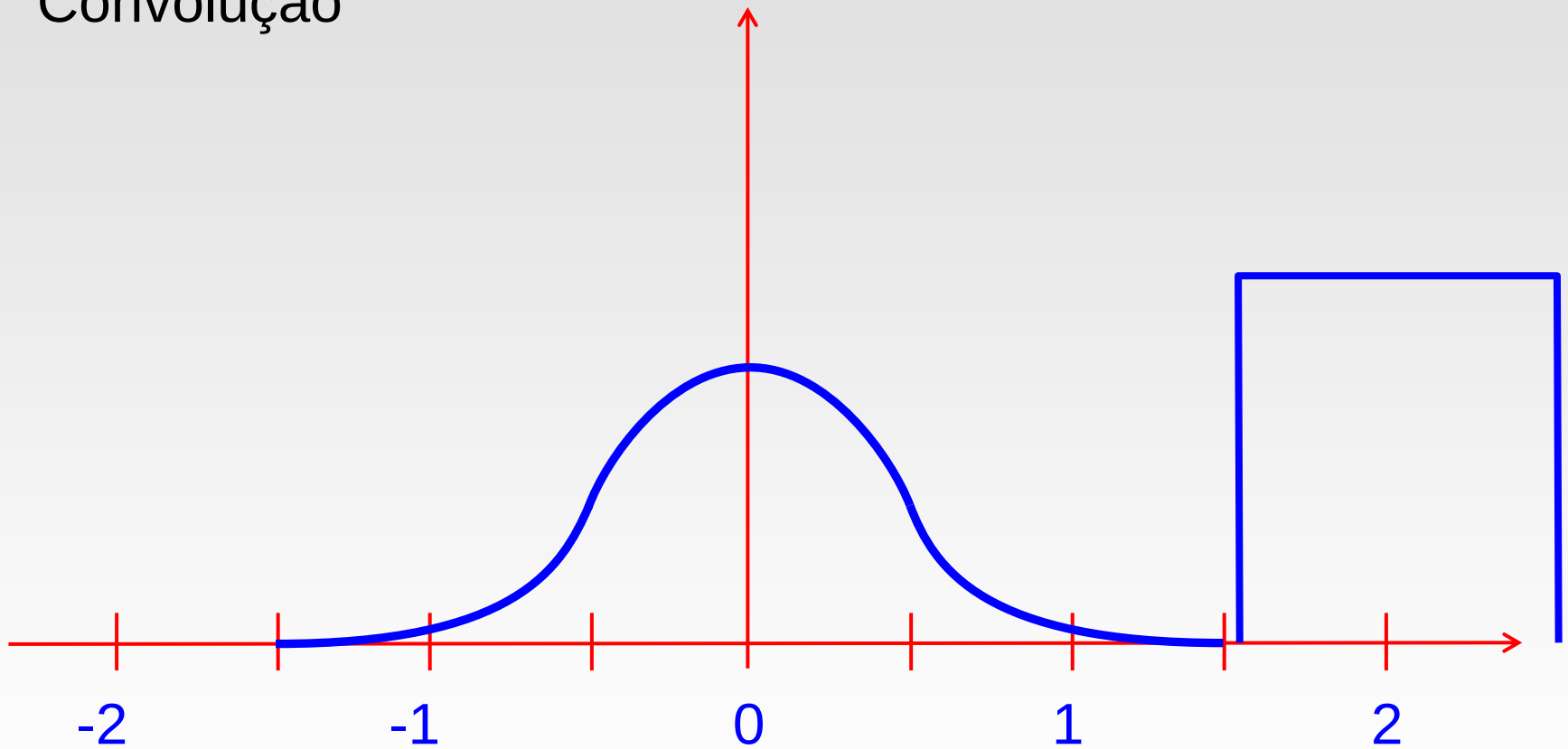
Ordem Dois

“por partes”



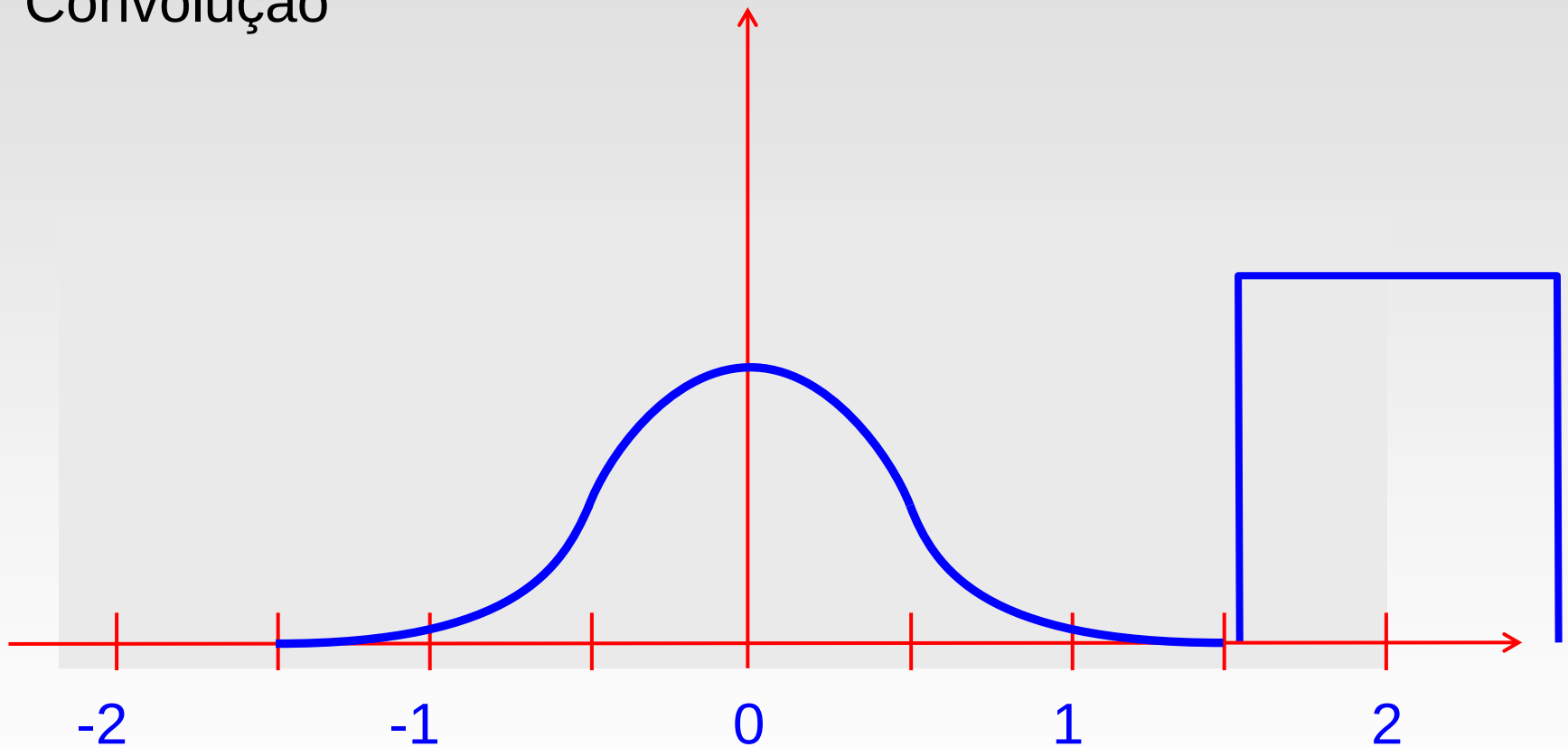
BSplines

Convolução



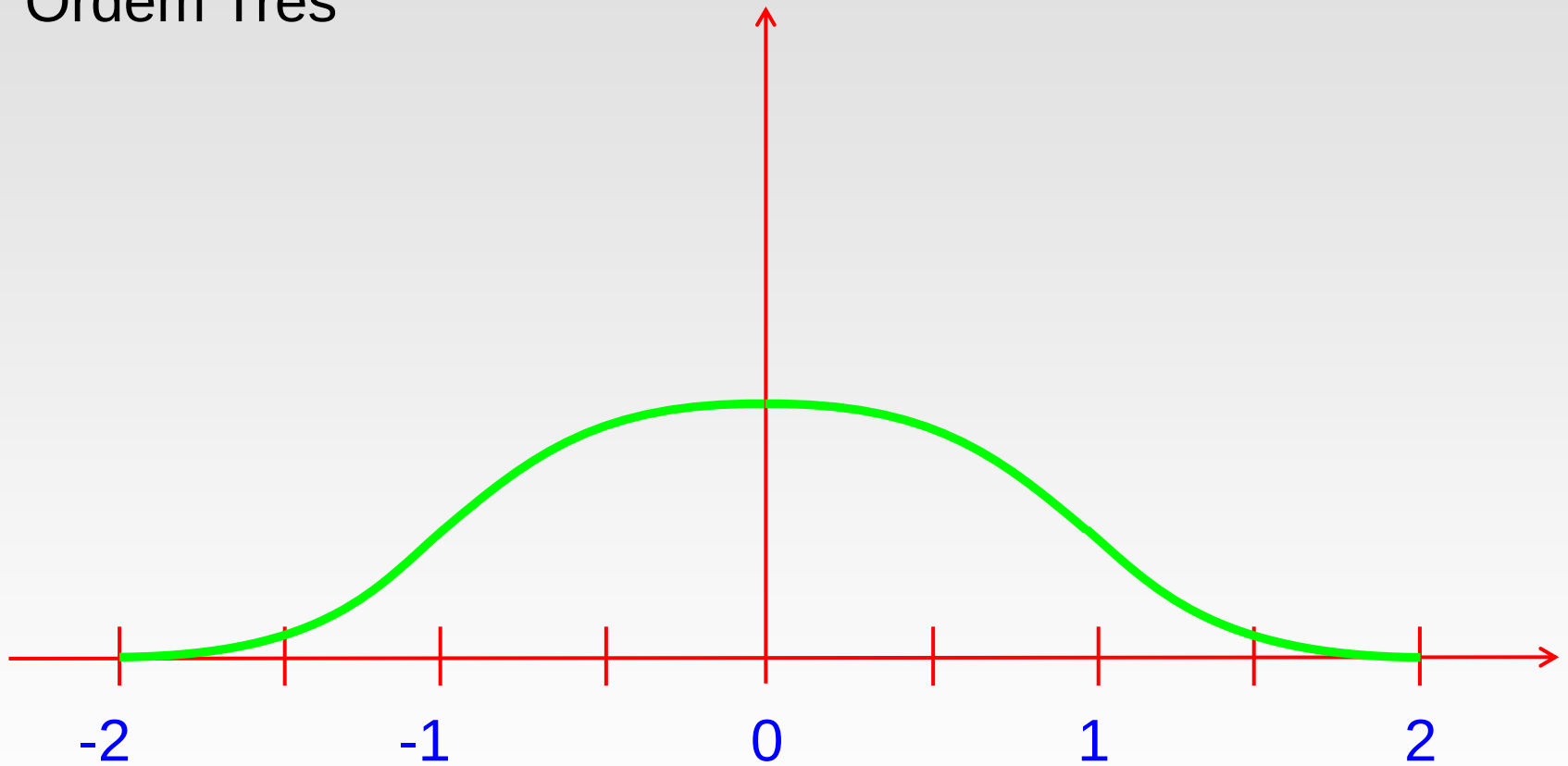
BSplines

Convolução



BSplines

Ordem Três



BSplines

Ordem Três

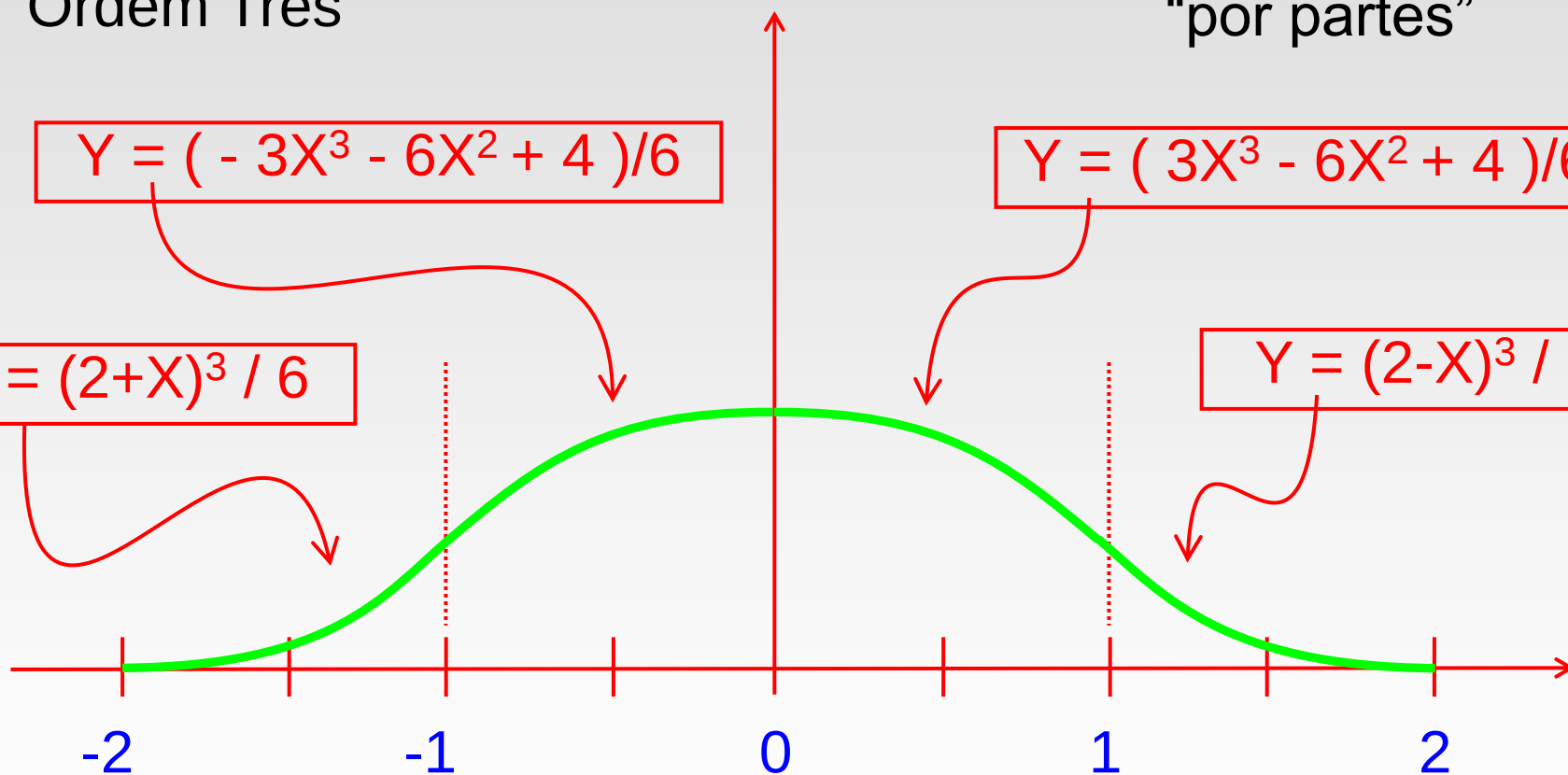
“por partes”

$$Y = (-3X^3 - 6X^2 + 4)/6$$

$$Y = (3X^3 - 6X^2 + 4)/6$$

$$Y = (2+X)^3 / 6$$

$$Y = (2-X)^3 / 6$$

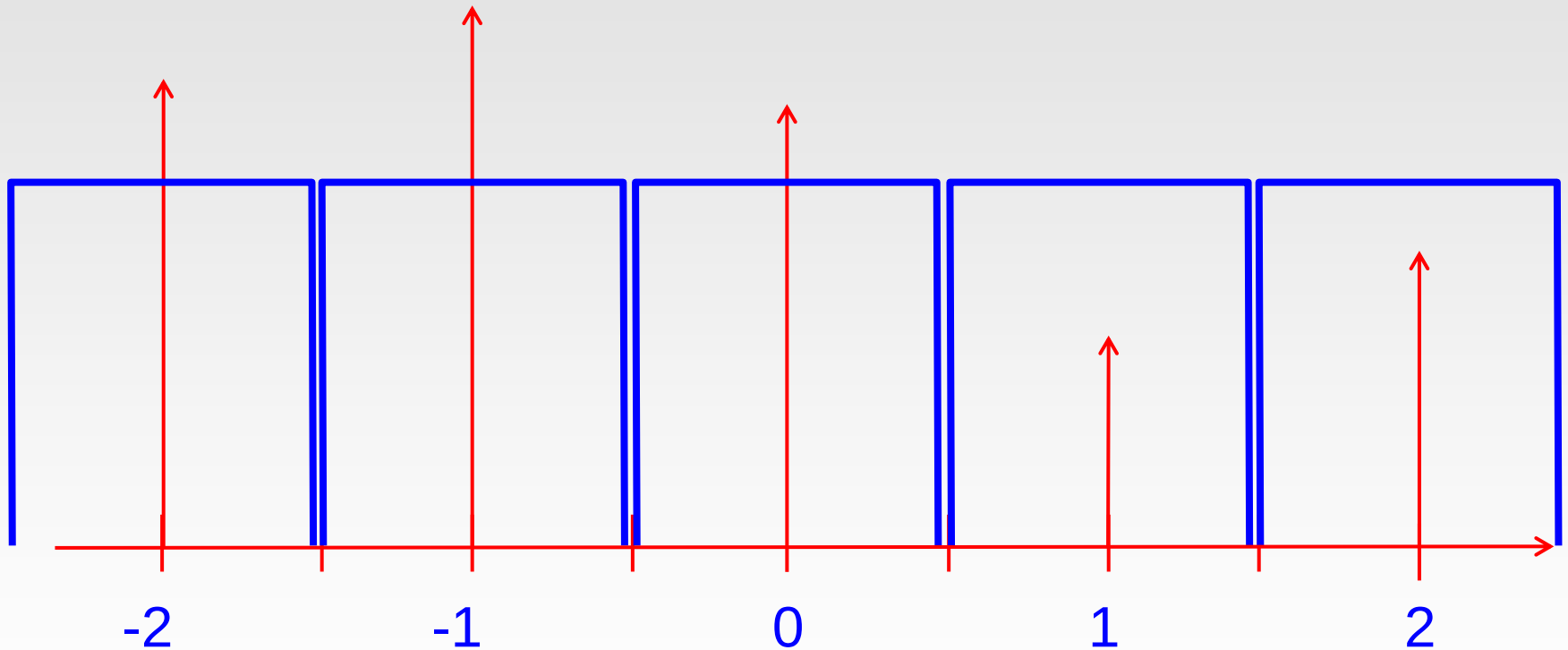


Interpolando com BSplines

Interpolação BSplines

Ordem Zero

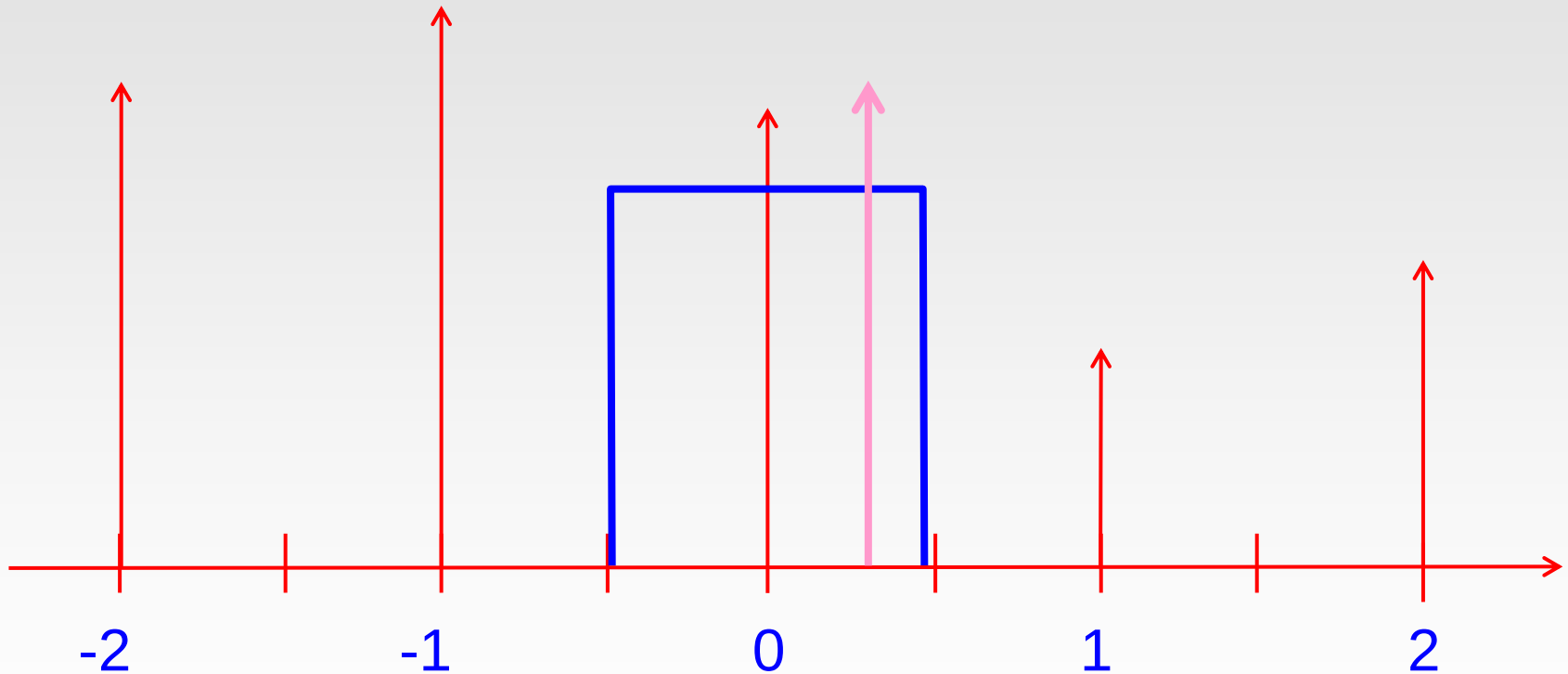
Vizinhos mais
Próximos



Interpolação BSplines

Ordem Zero

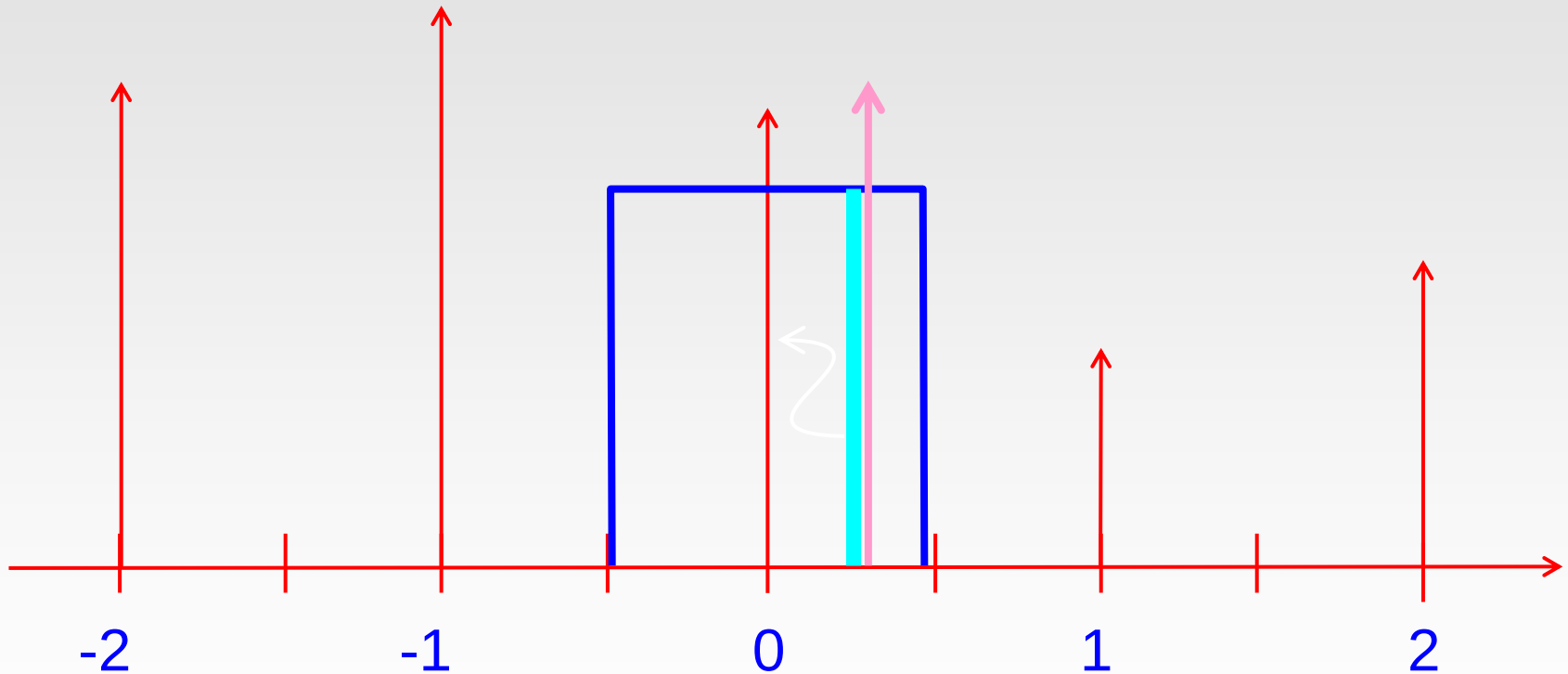
Vizinhos mais próximos



Interpolação BSplines

Ordem Zero

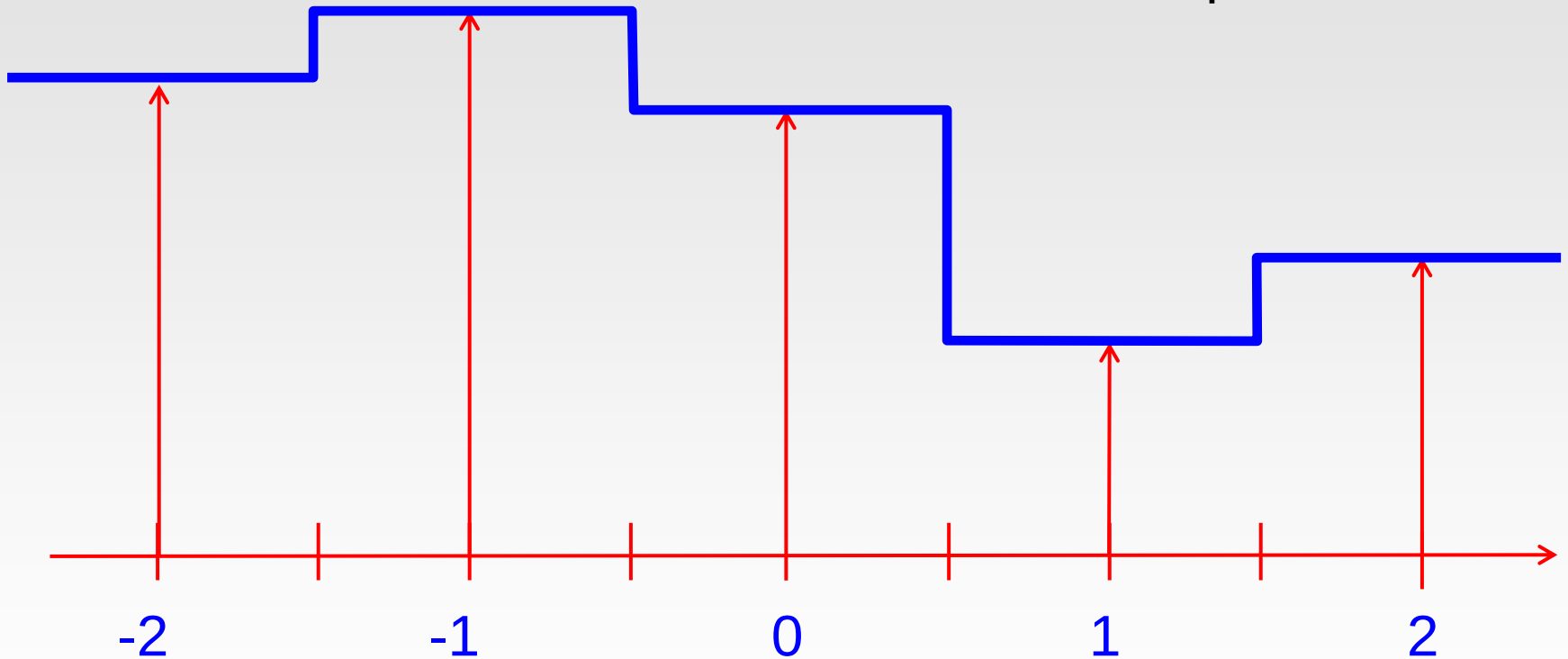
Vizinhos mais próximos



Interpolação BSplines

Ordem Zero

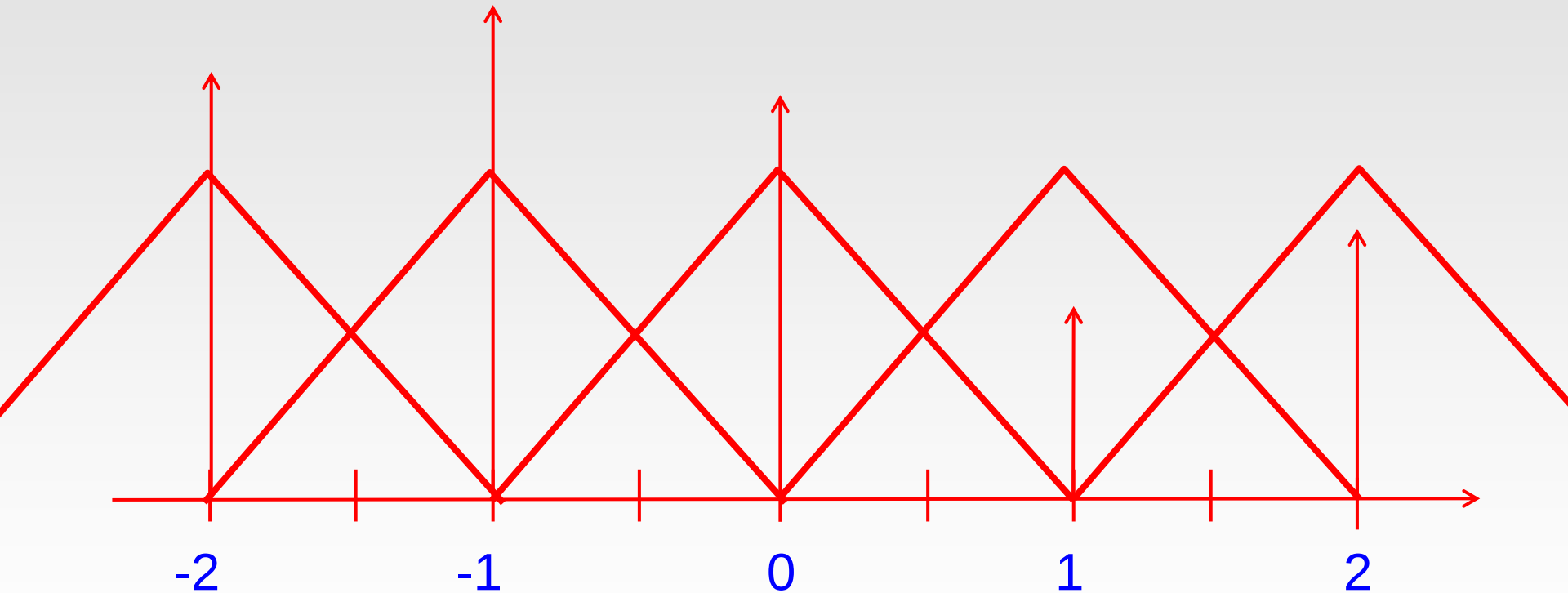
Vizinhos mais próximos



Interpolação BSplines

Primeira
Ordem

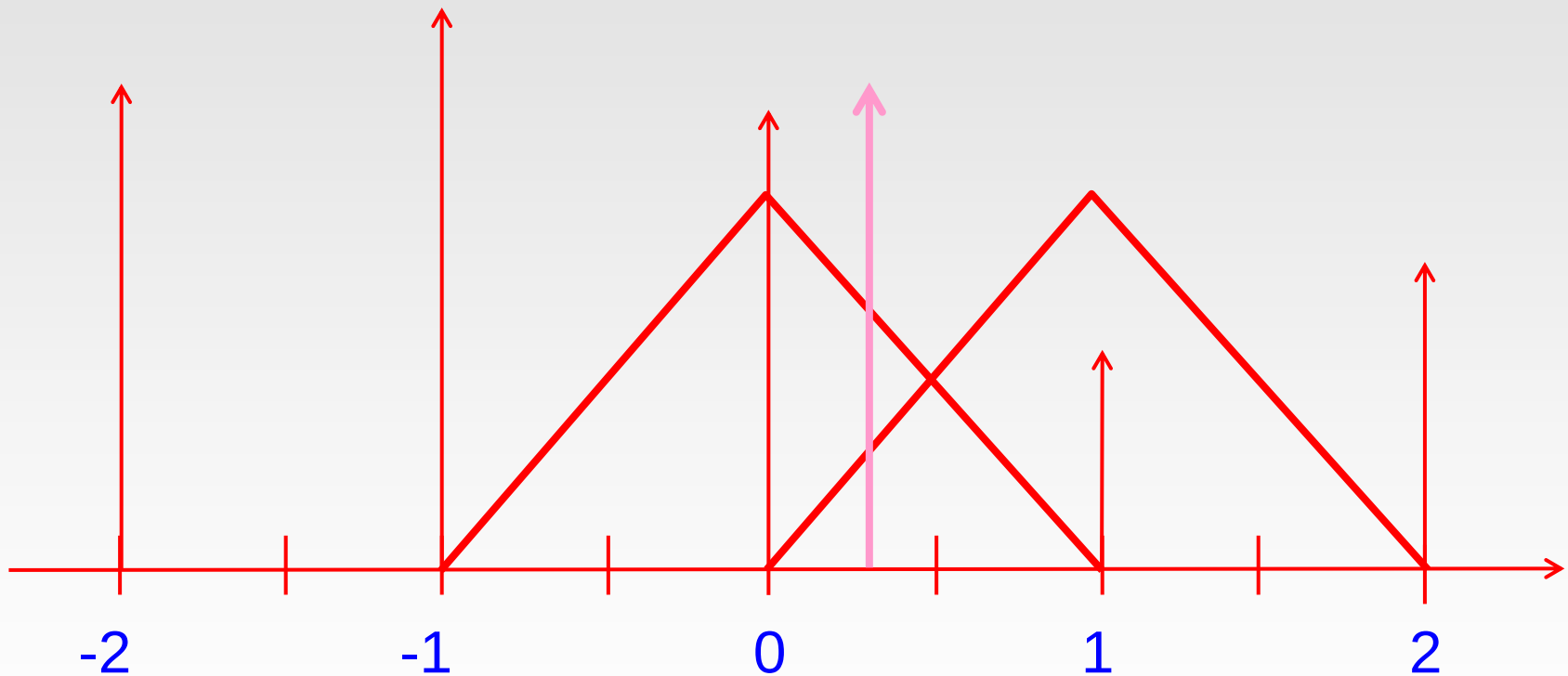
Interpolação Linear



Interpolação BSplines

Primeira
Ordem

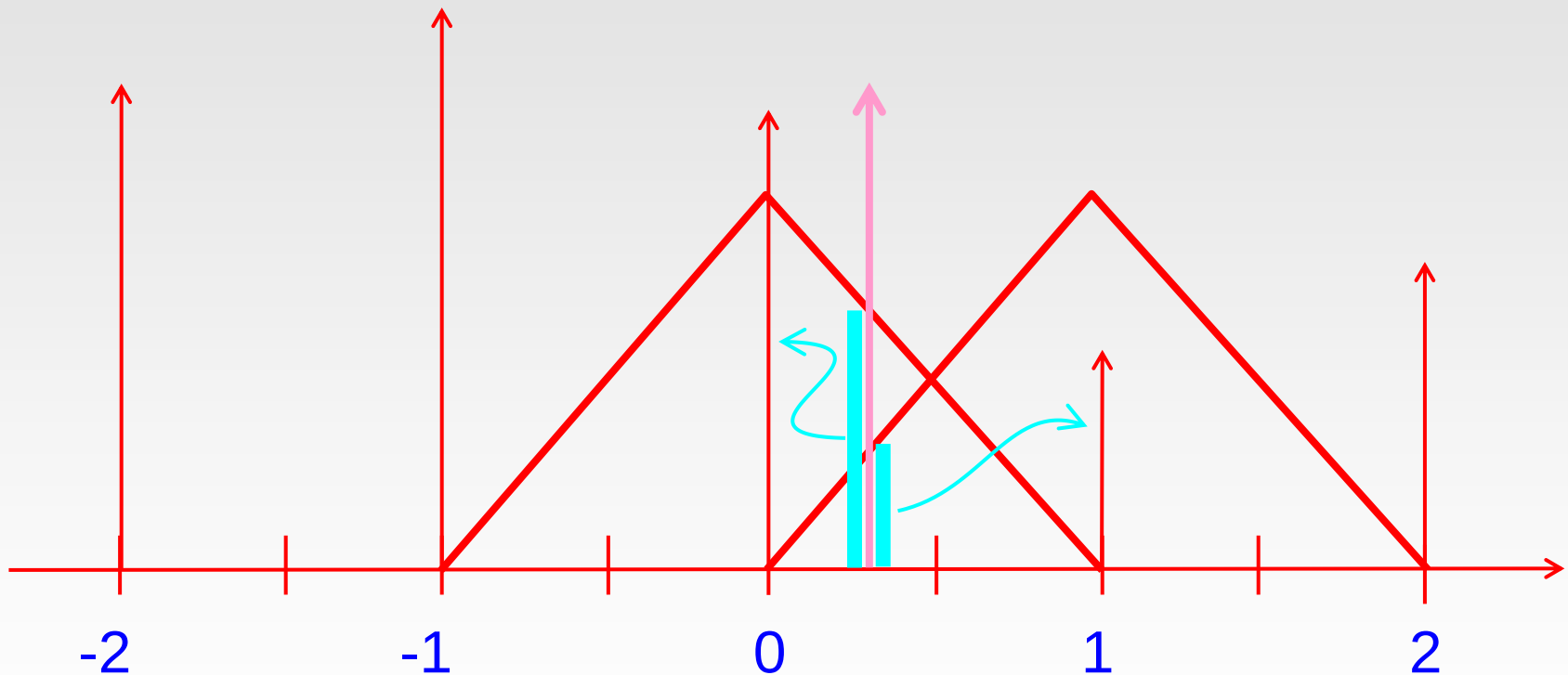
Interpolação Linear



Interpolação BSplines

Primeira
Ordem

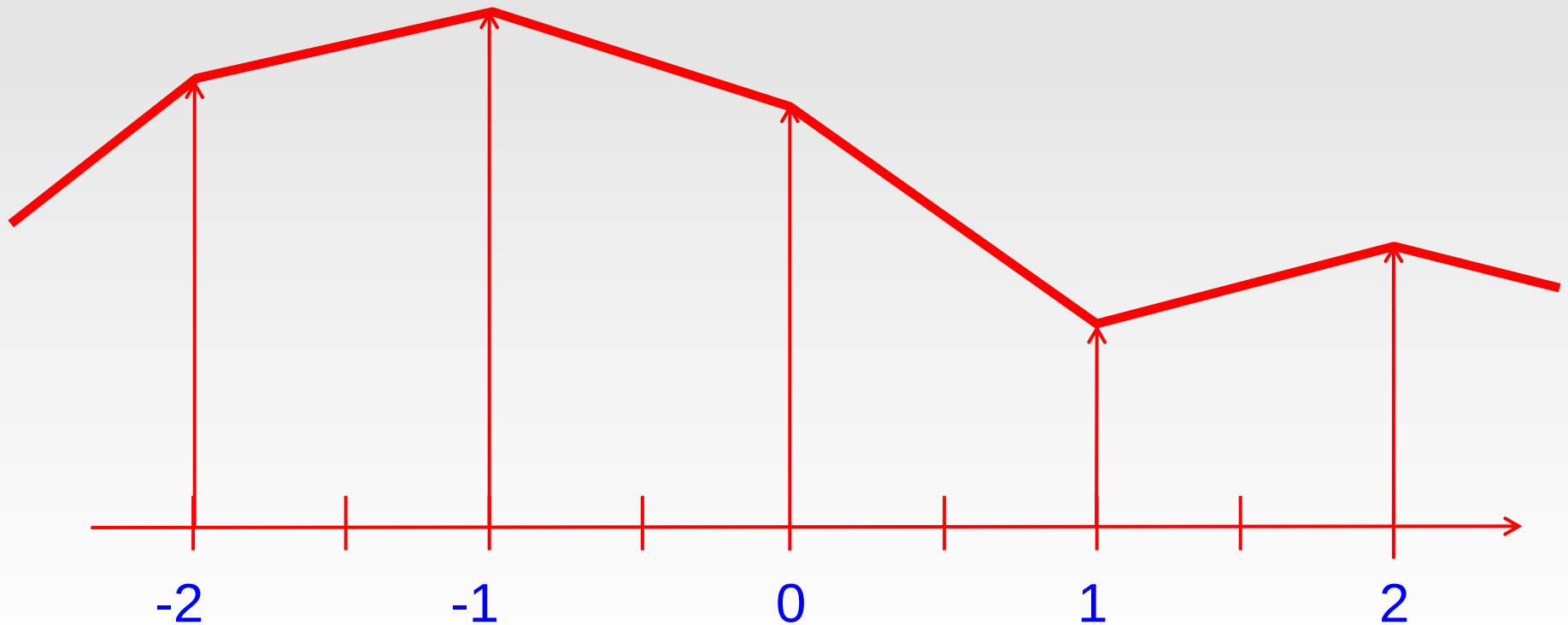
Interpolação Linear



Interpolação BSplines

Primeira
Ordem

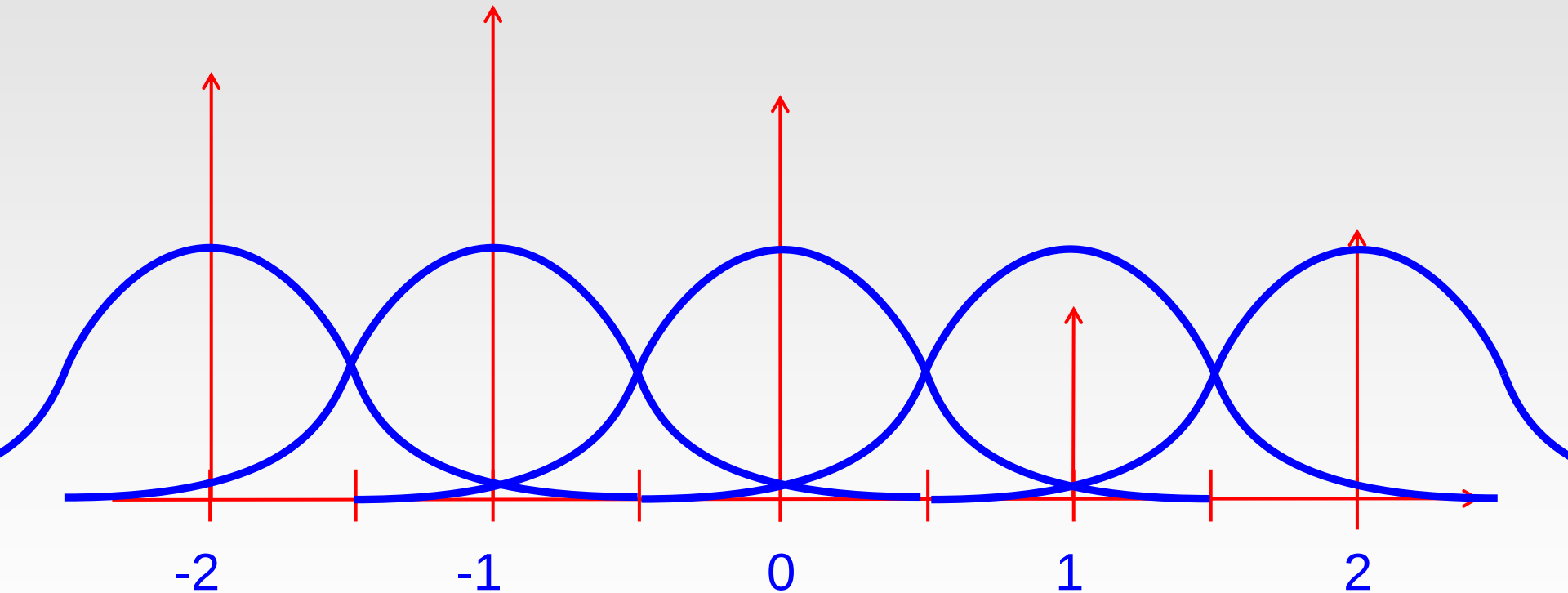
Interpolação Linear



Interpolação BSplines

Segunda Ordem

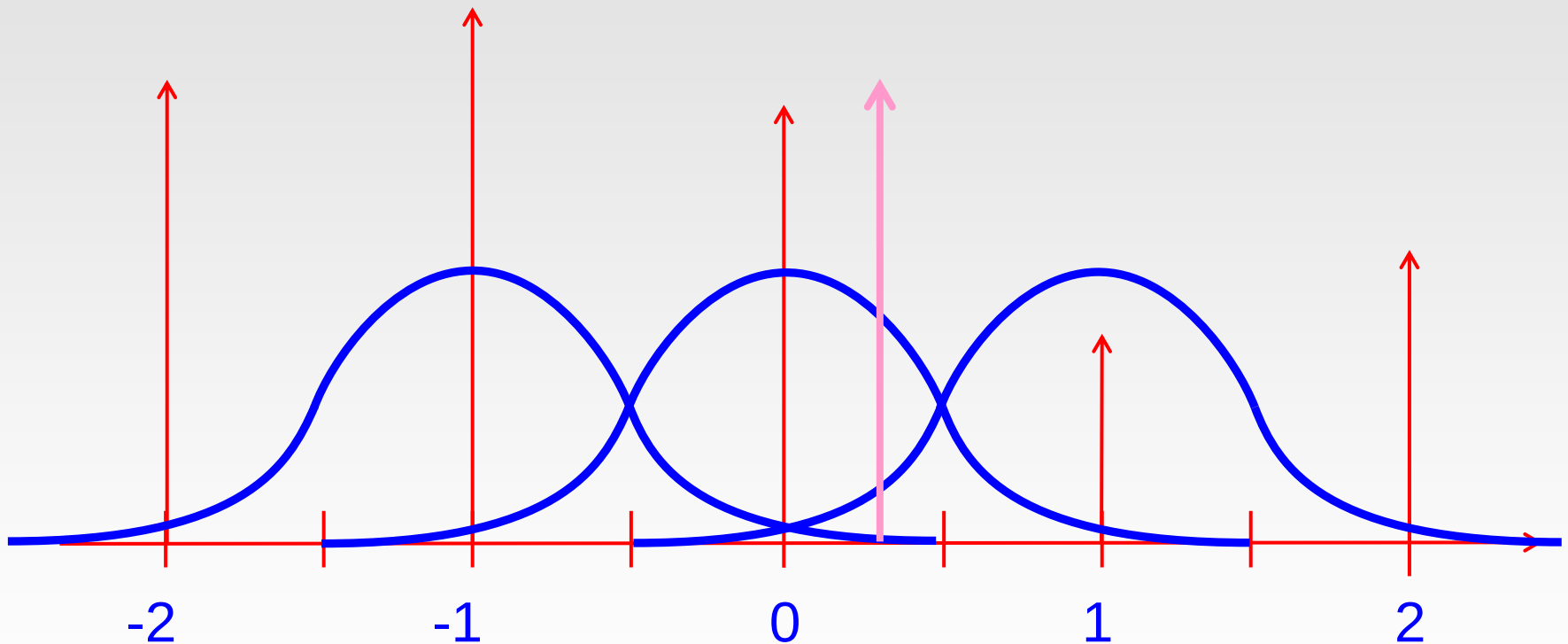
Interpolação
Quadrática



Interpolação BSplines

Segunda Ordem

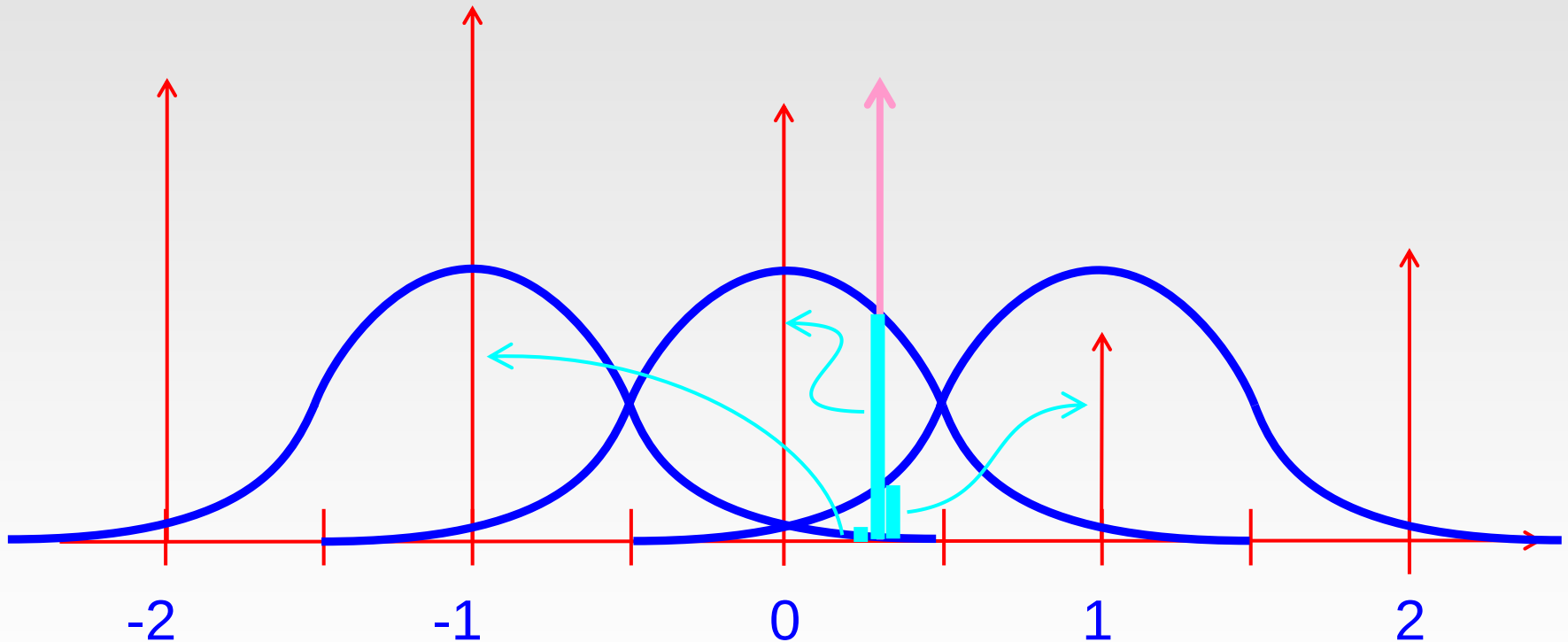
Interpolação
Quadrática



Interpolação BSplines

Segunda Ordem

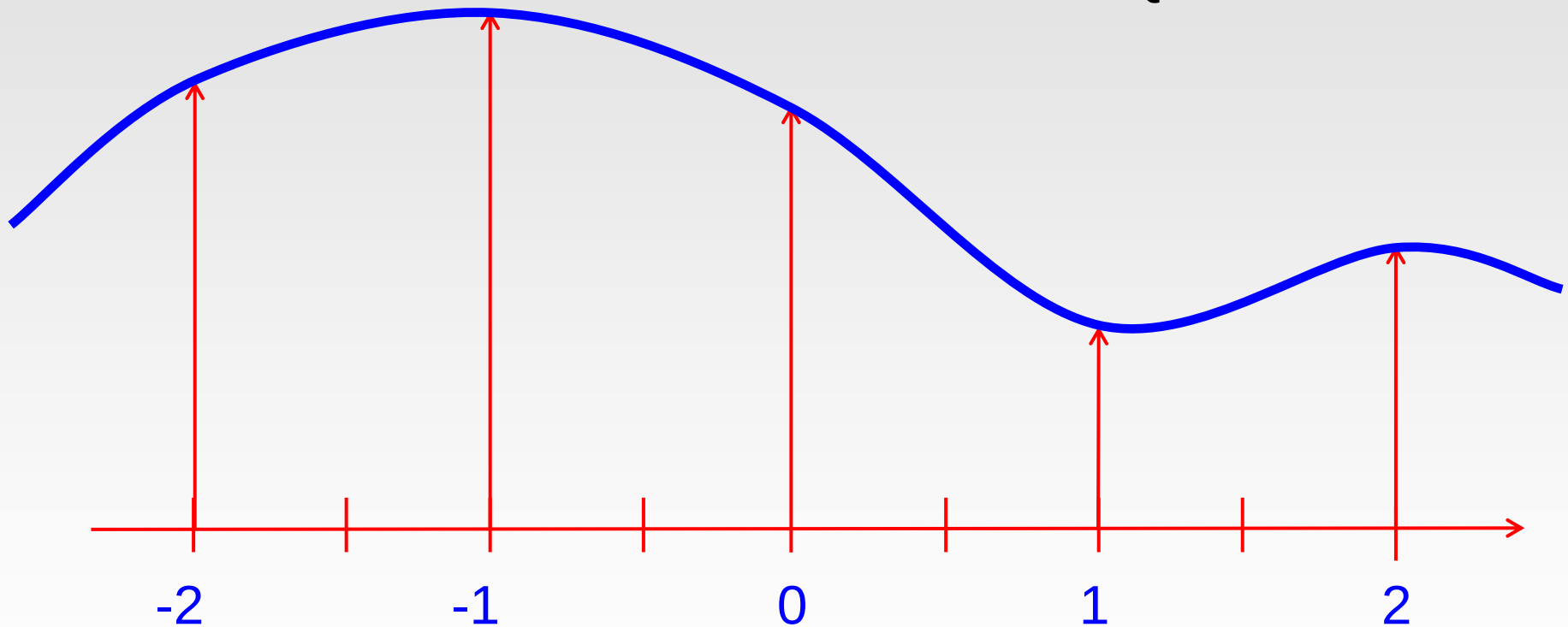
Interpolação
Quadrática



Interpolação BSplines

Segunda Ordem

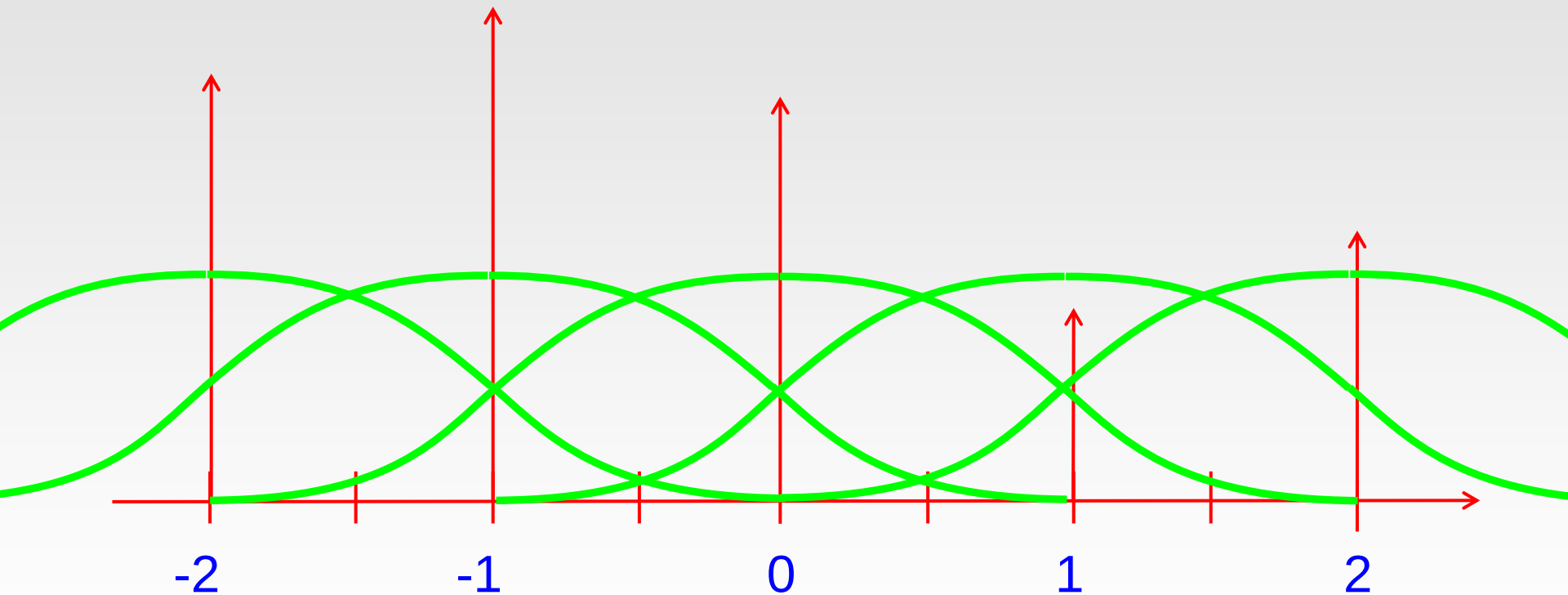
Interpolação
Quadrática



Interpolação BSplines

Terceira Ordem

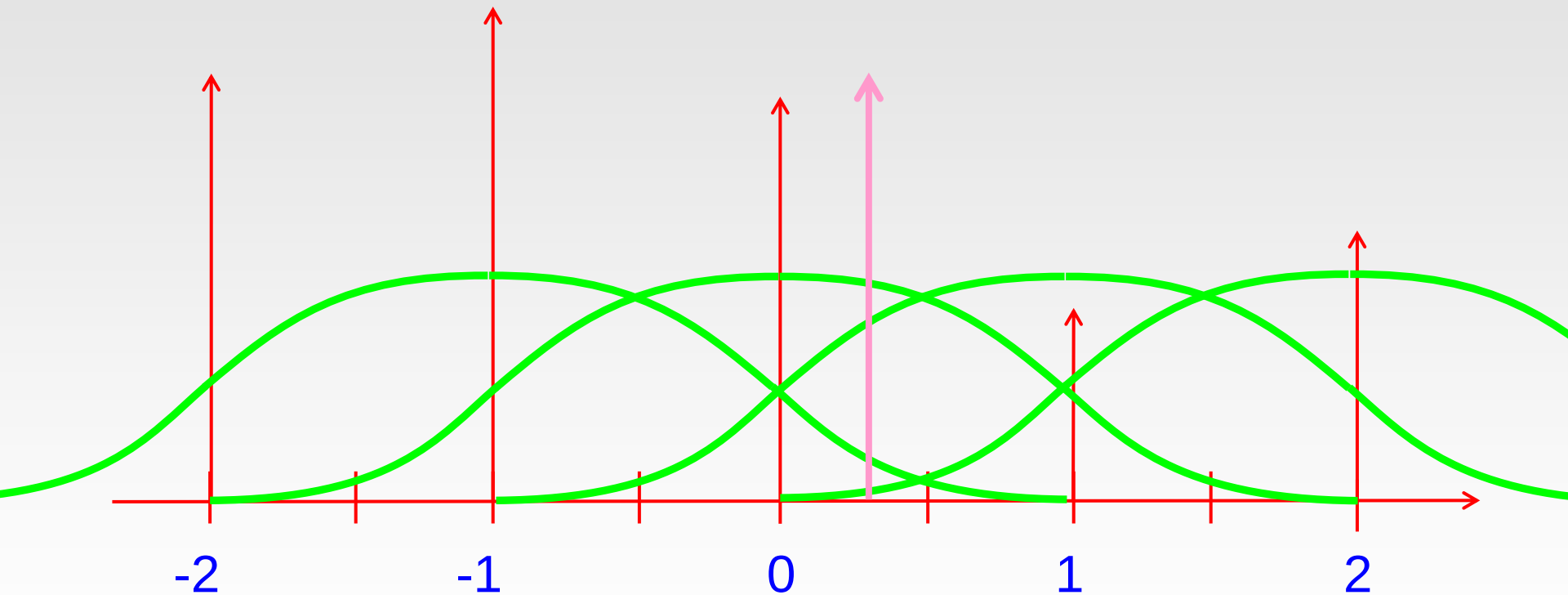
Interpolação Cúbica



Interpolação BSplines

Terceira Ordem

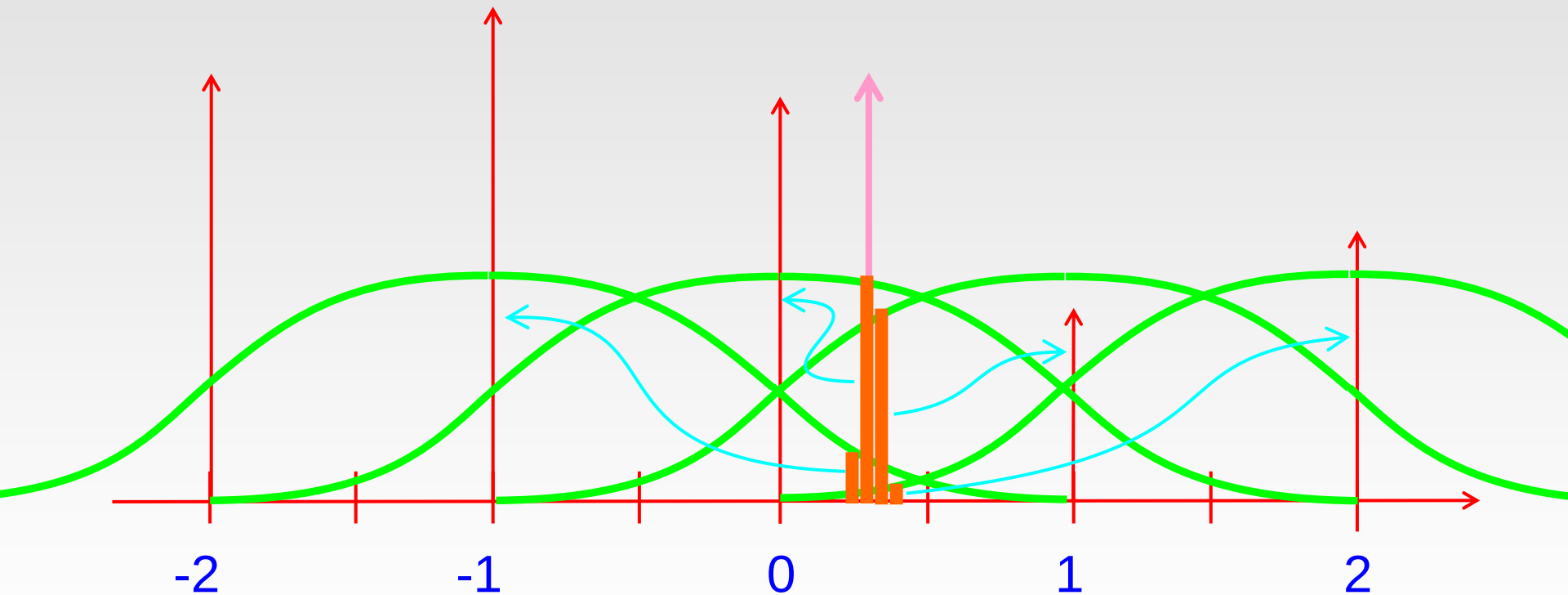
Interpolação Cúbica



Interpolação BSplines

Terceira Ordem

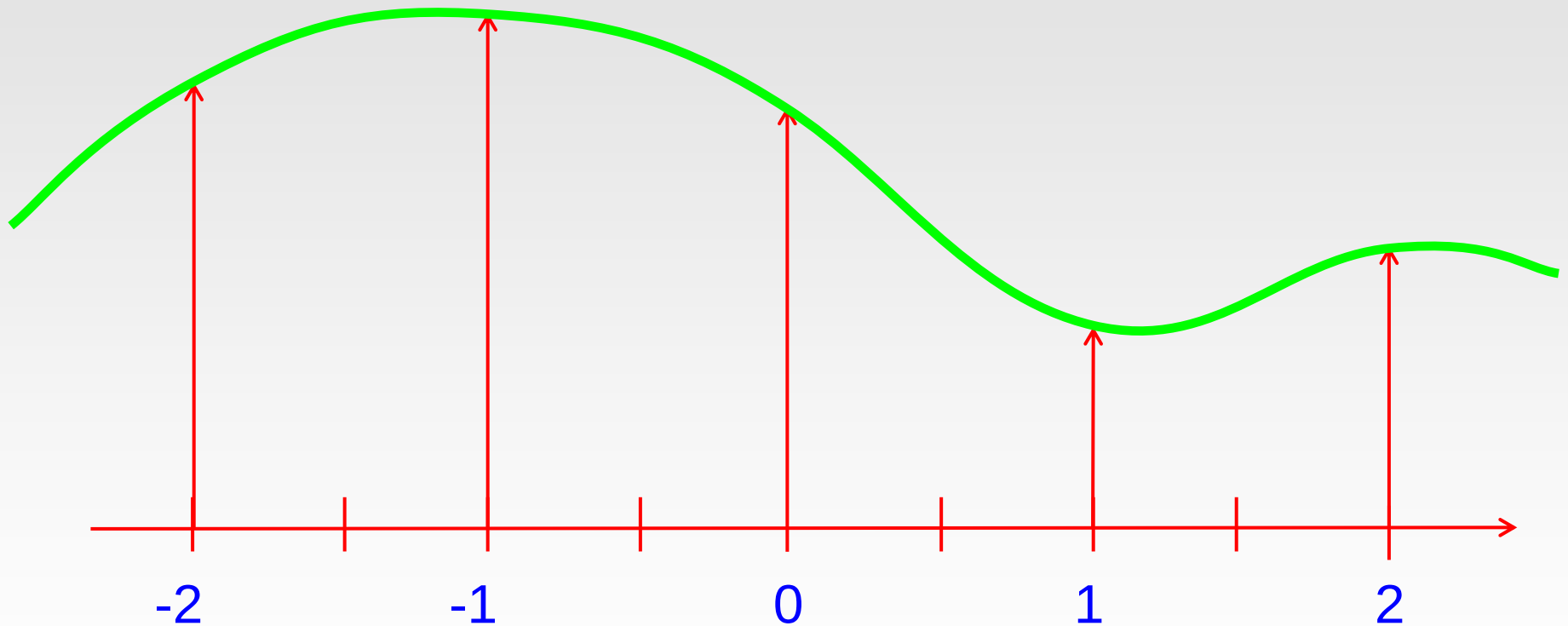
Interpolação Cúbica



Interpolação BSplines

Terceira Ordem

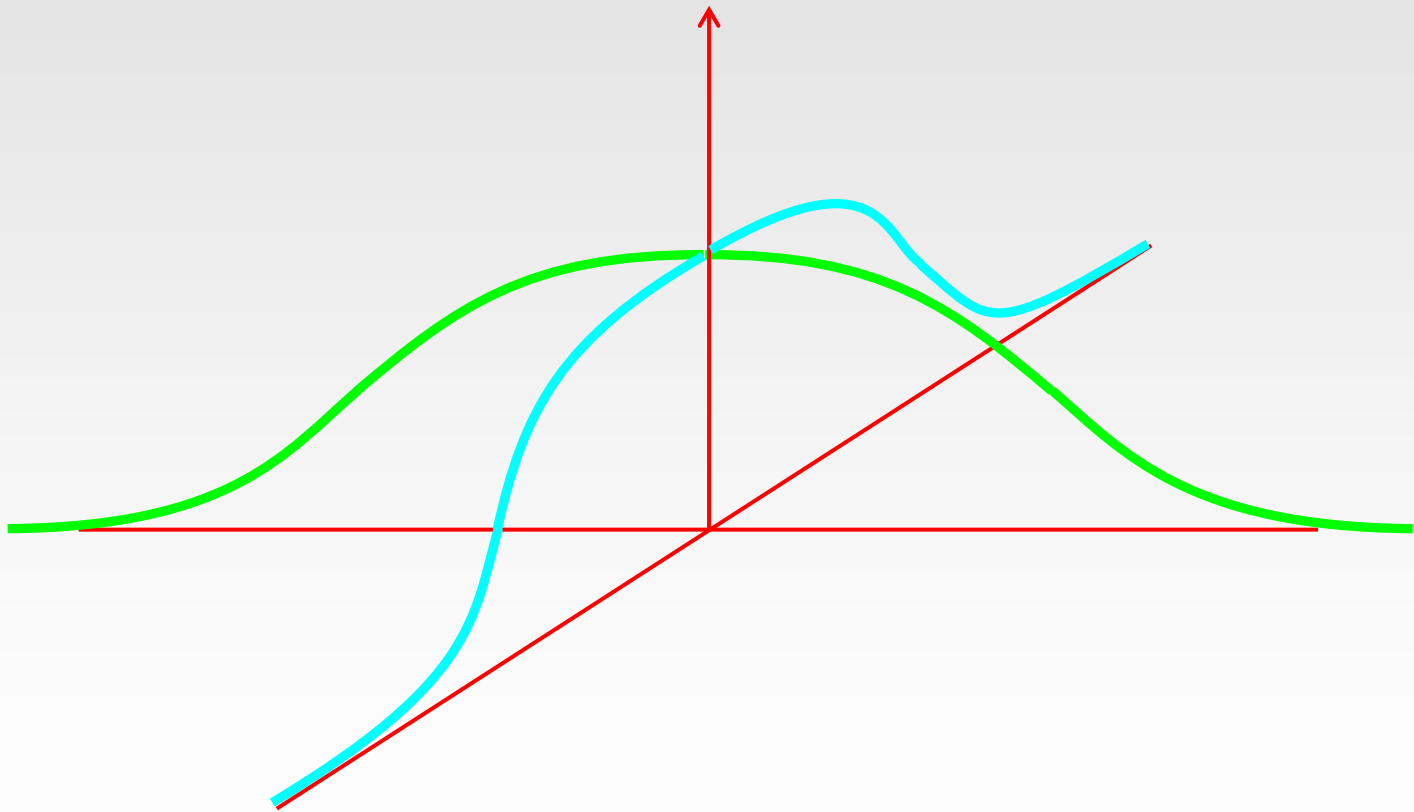
Interpolação Cúbica



BSplines Cúbicas em Duas Dimensões

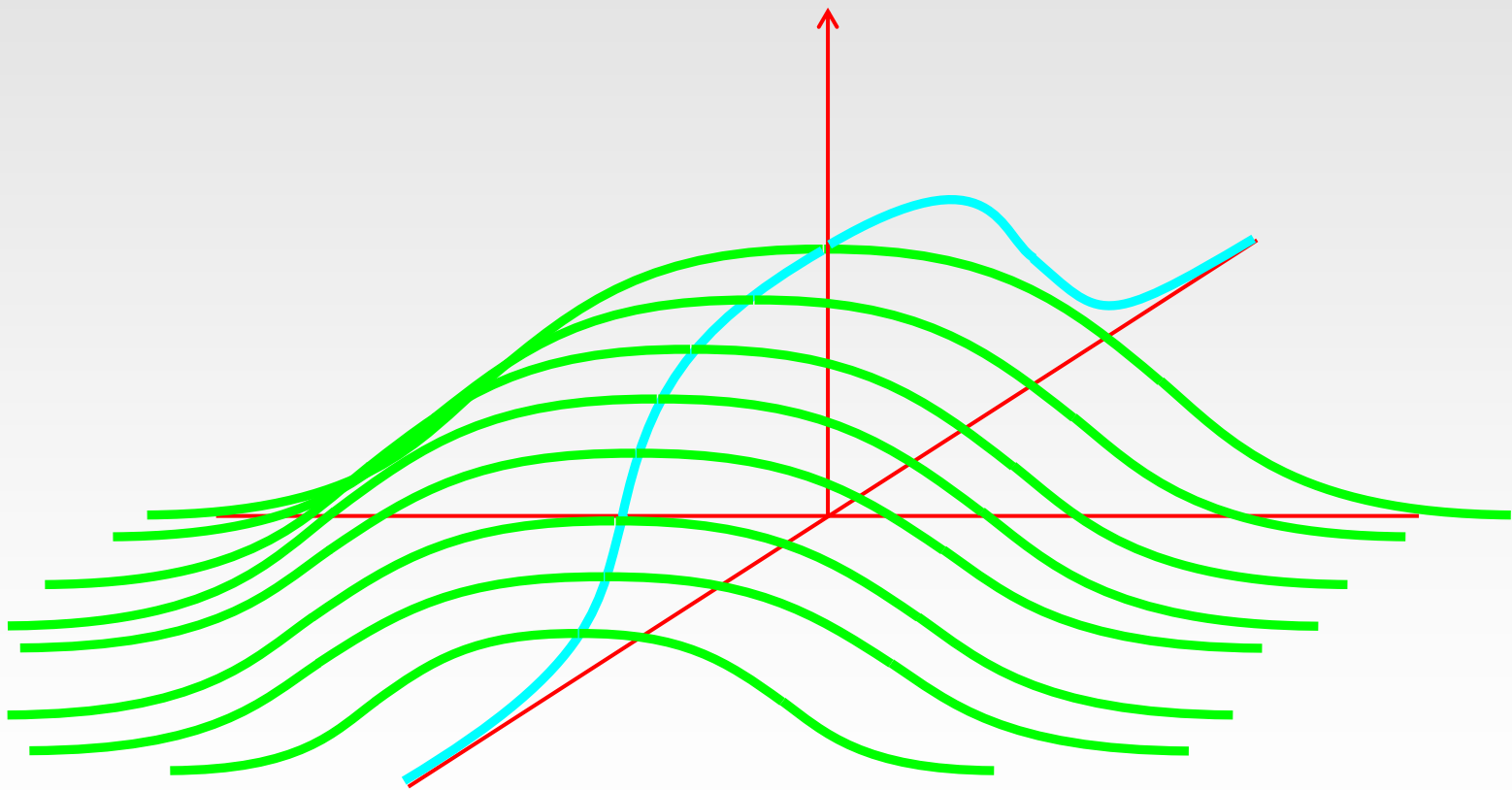
BSplines em 2D

Produto Tensor



BSplines em 2D

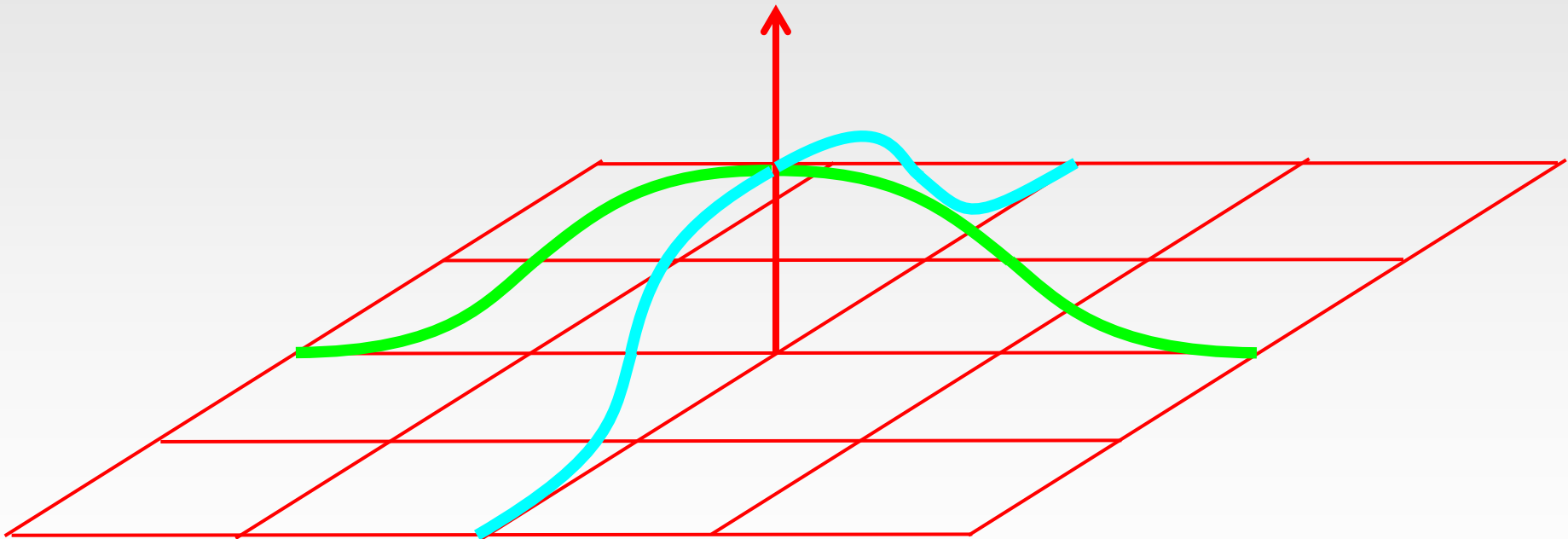
Produto Tensorial



BSplines em 2D

Produto Tensor

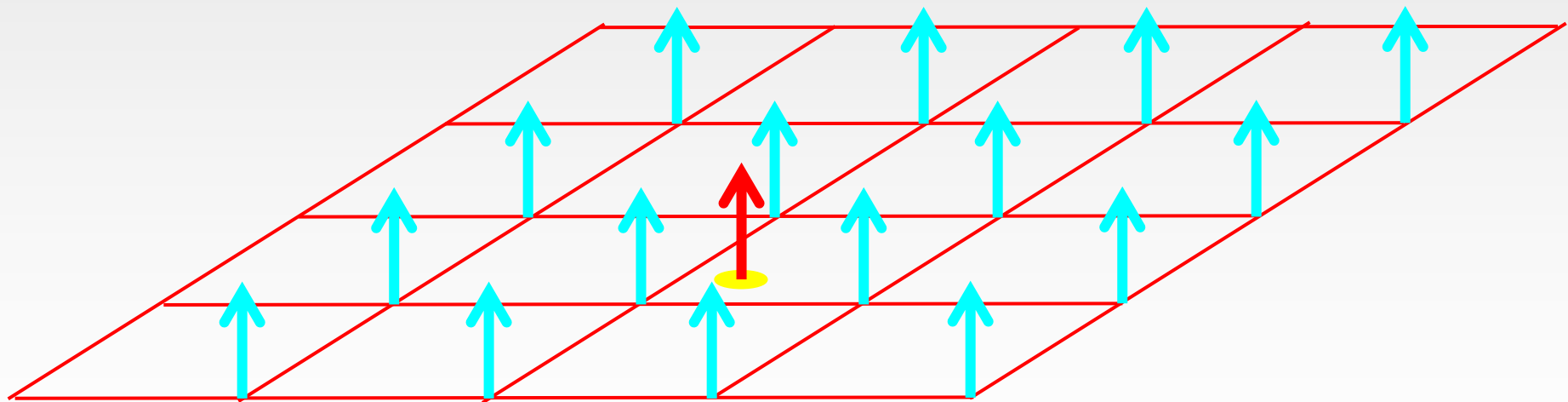
Separável



BSplines em 2D

Suporte

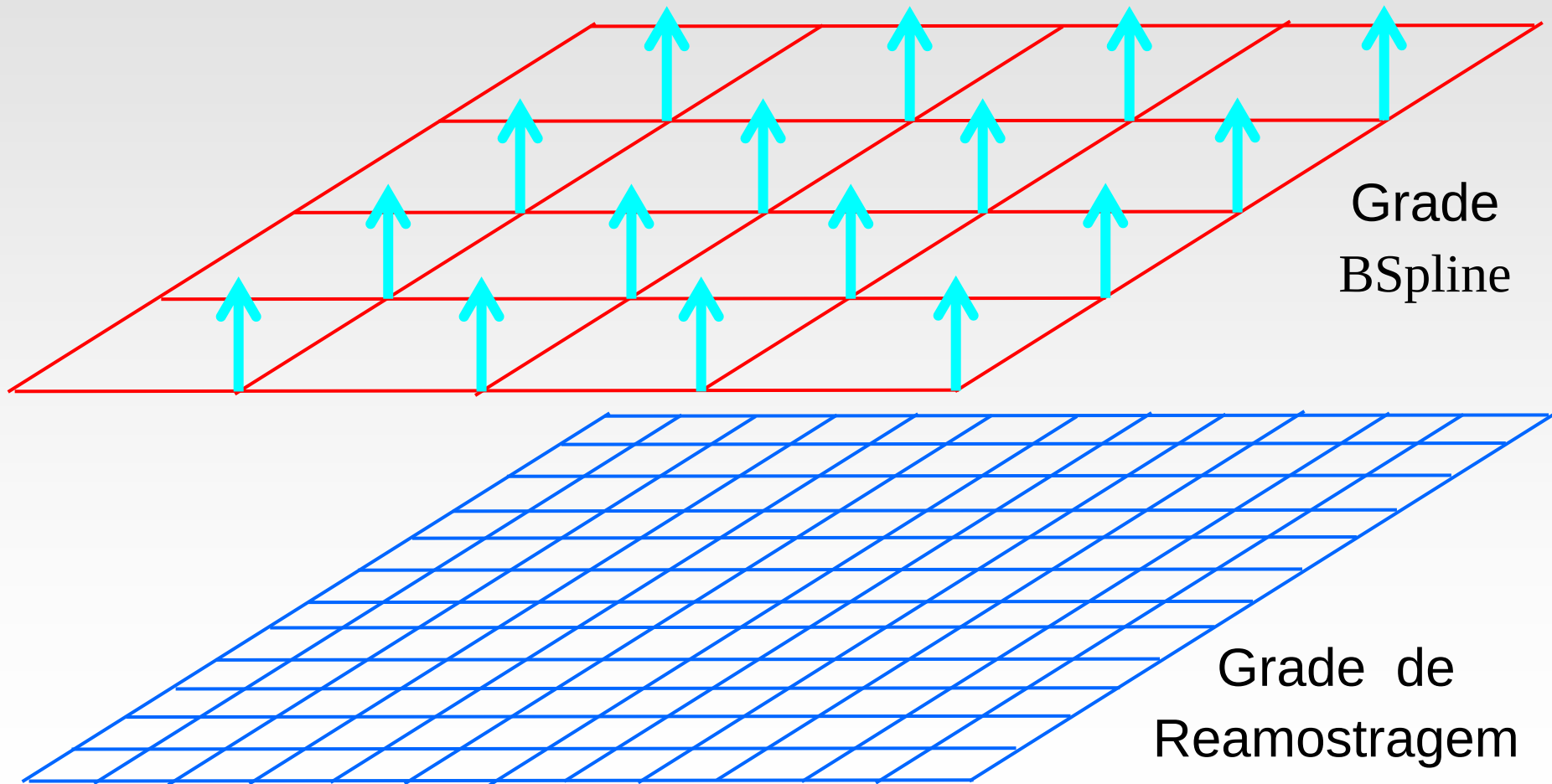
Nós na Região
de Influência



$$\# \text{Nós} = 4^N$$

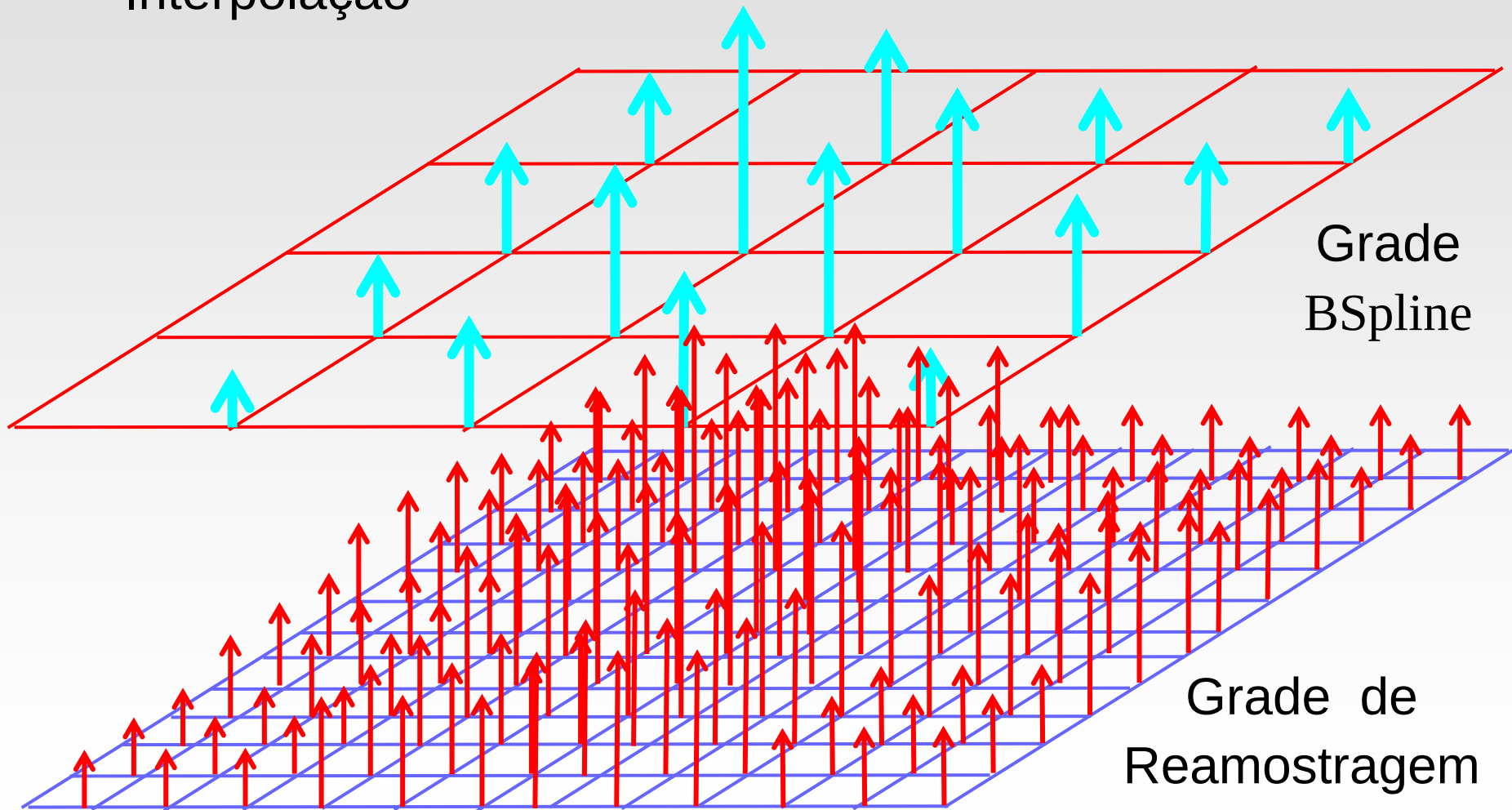
BSplines em 2D

Interpolação

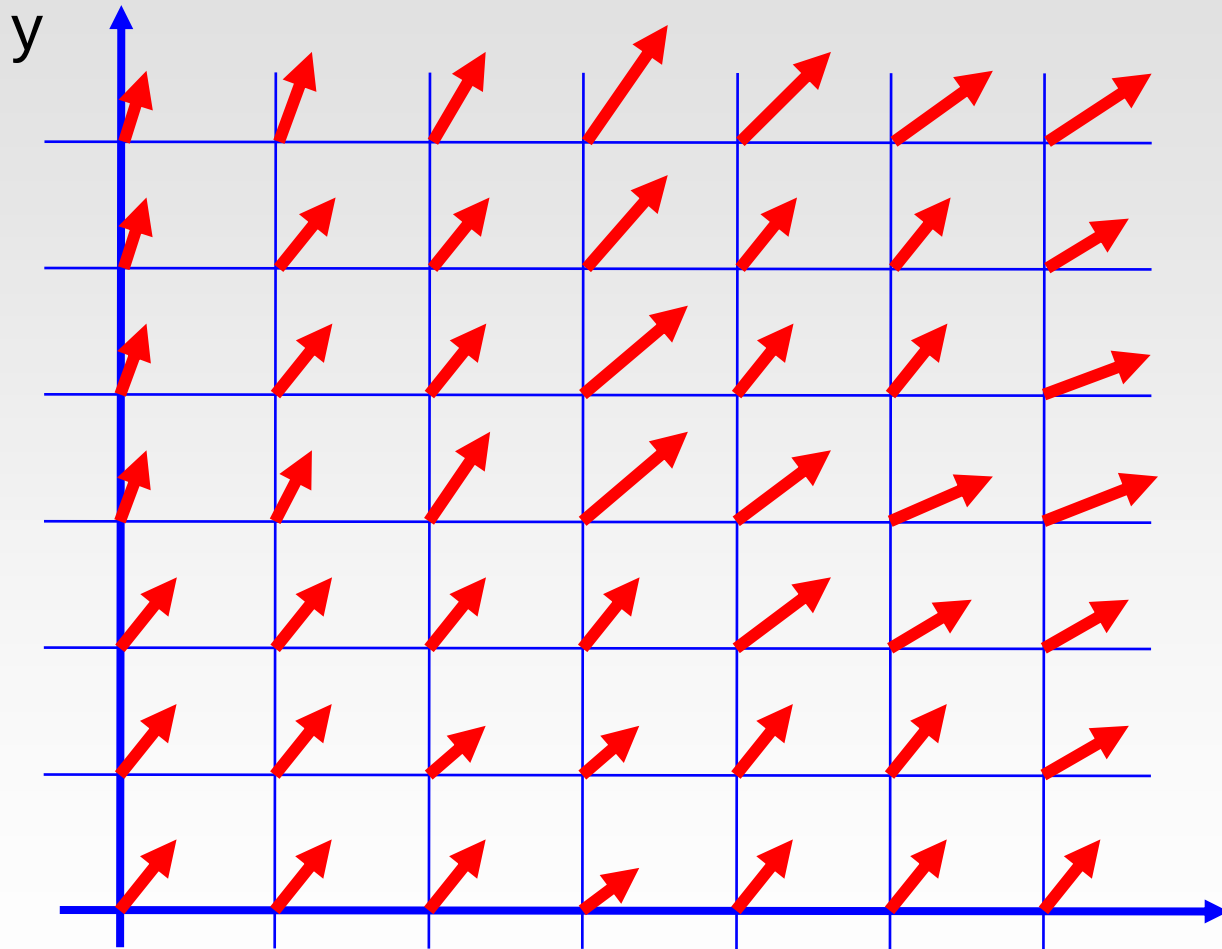


BSplines em 2D

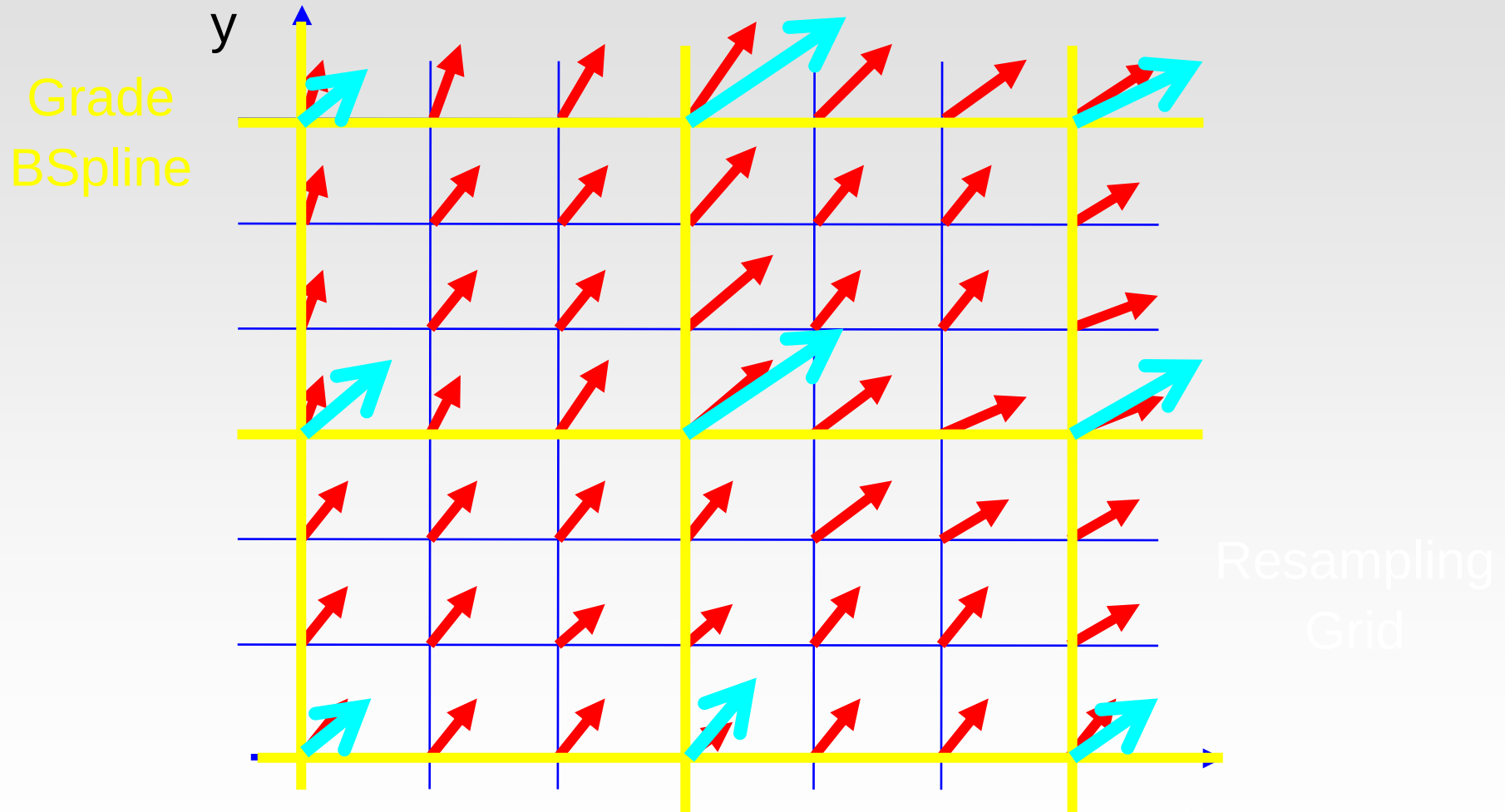
Interpolação



Grade Amostral



Grade BSpline



Grade BSplines & Grade Imagem



Grade BSplines & Grade Imagem

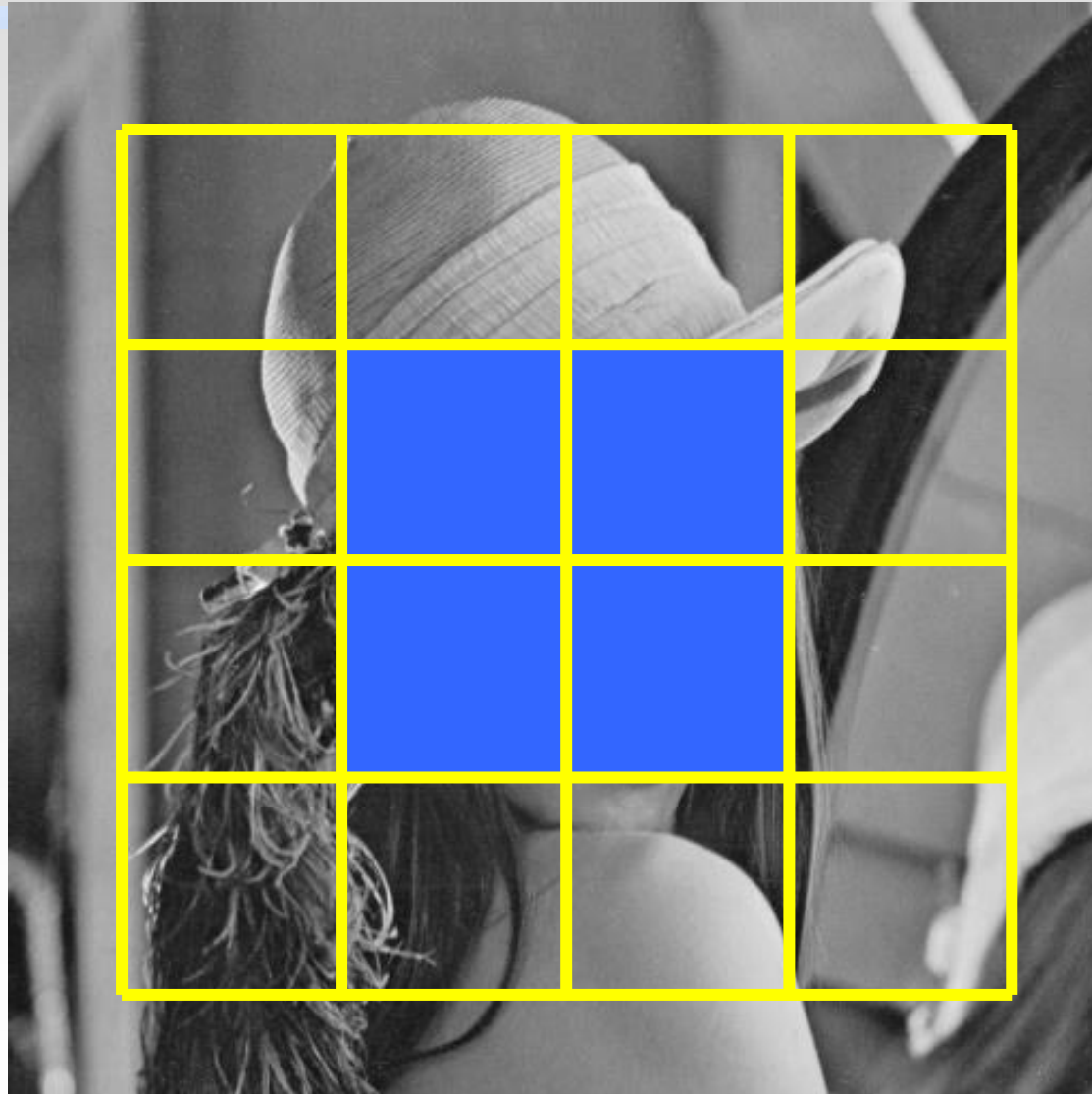
Grade
BSpline



Grade BSplines & Grade Imagem

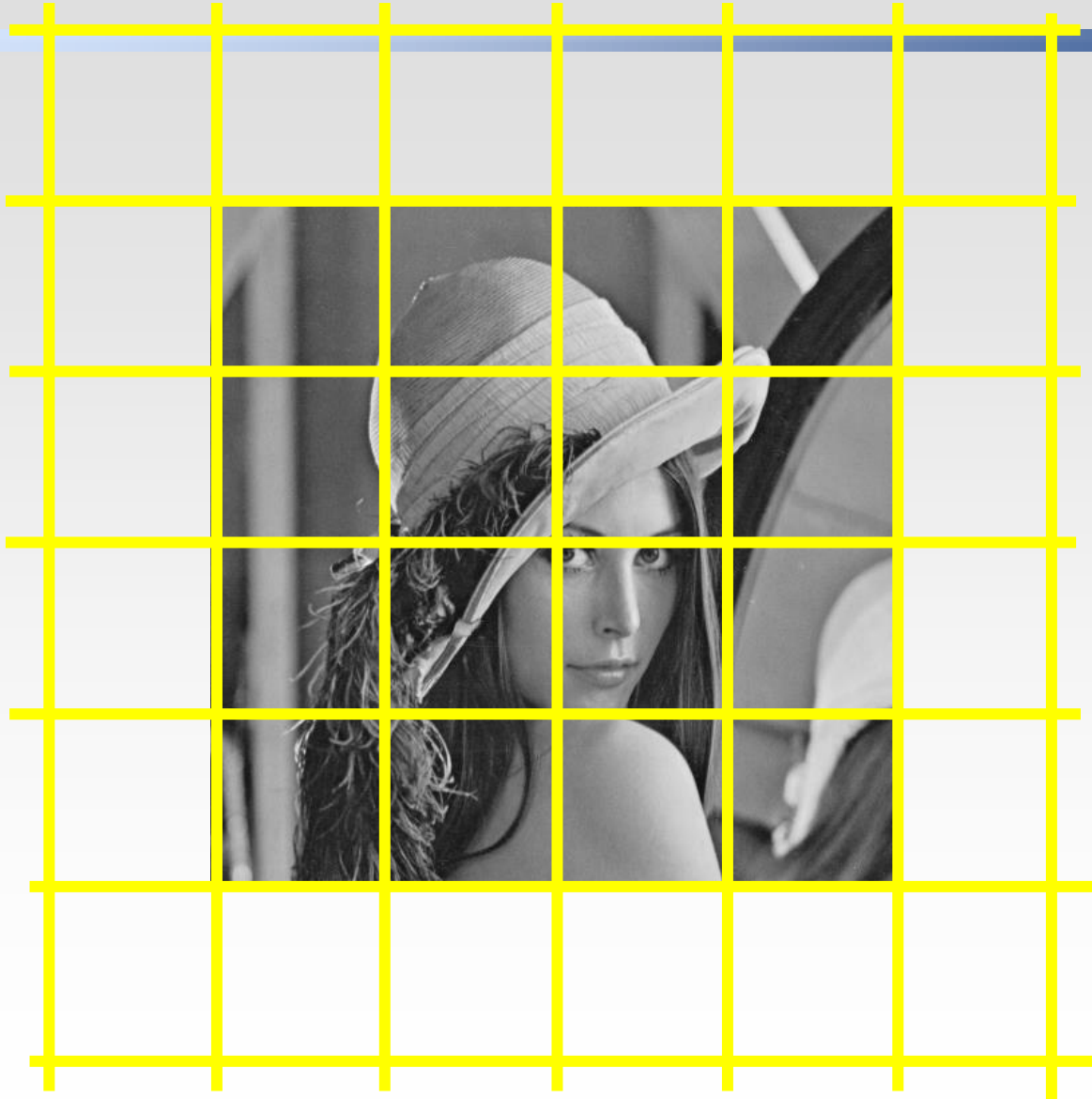
Grade
BSpline

Região
Válida



Grade BSplines & Grade Imagem

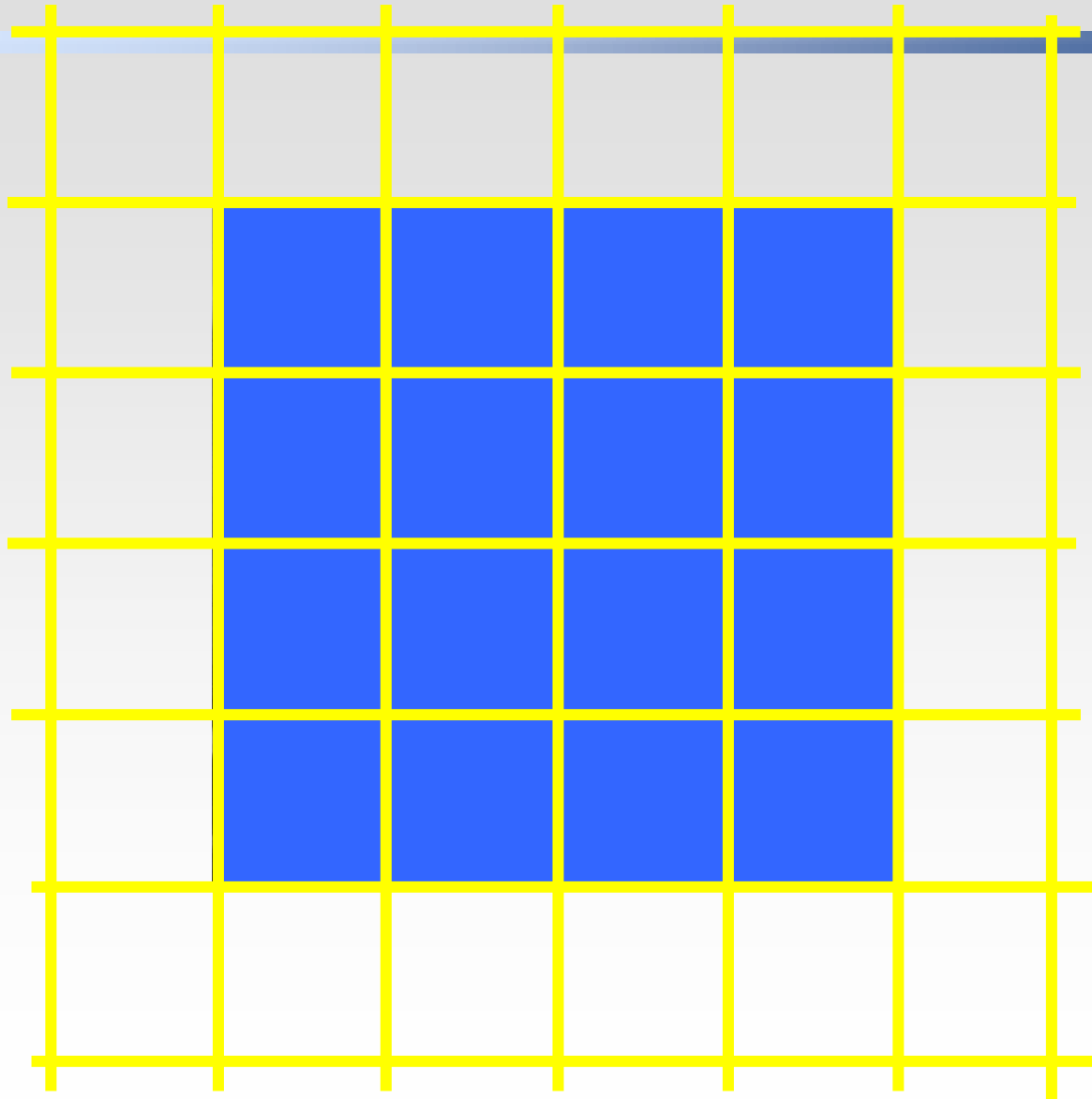
Grade
BSpline



Grade BSplines & Grade Imagem

Grade
BSpline

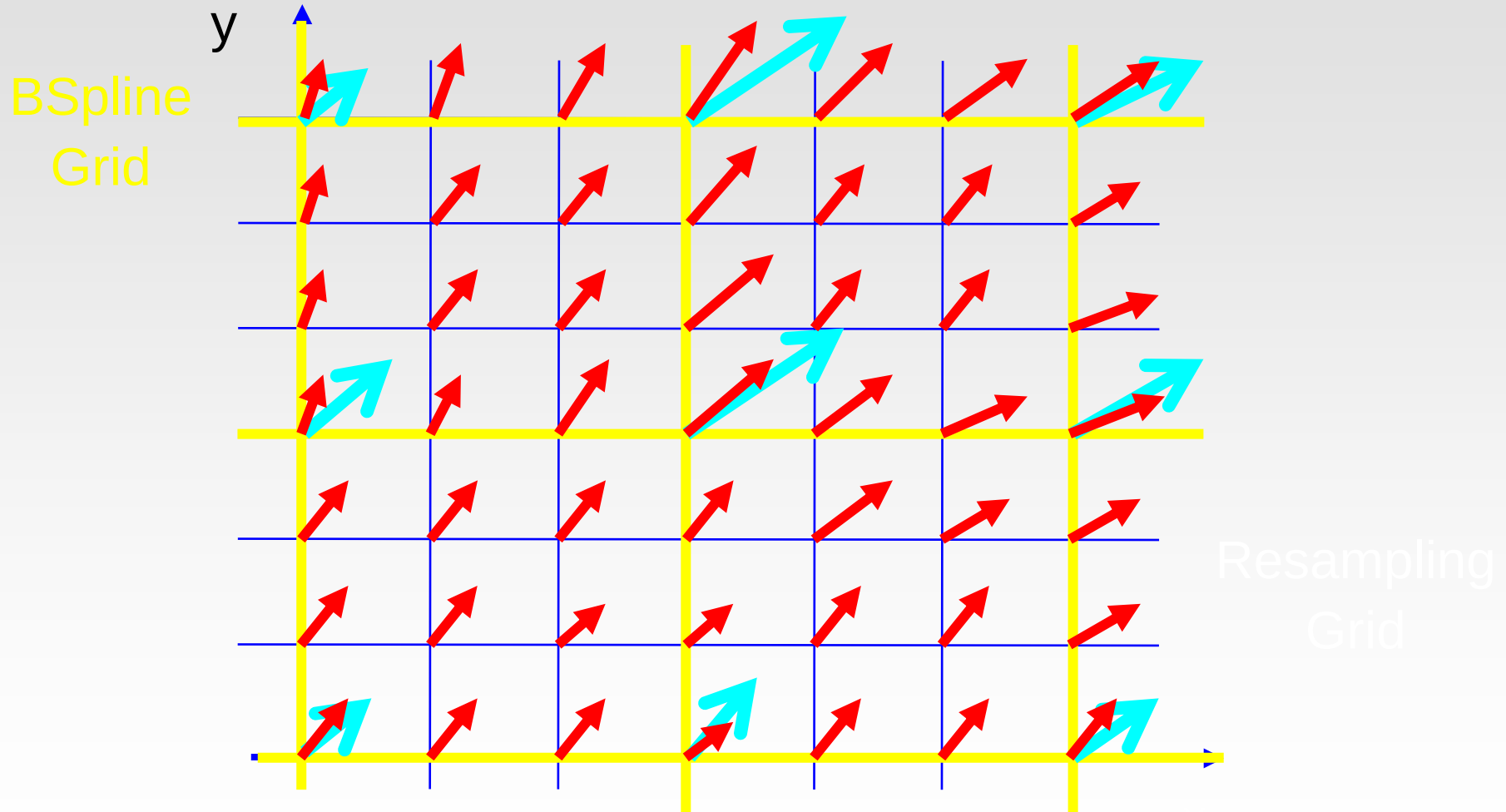
Região
Válida



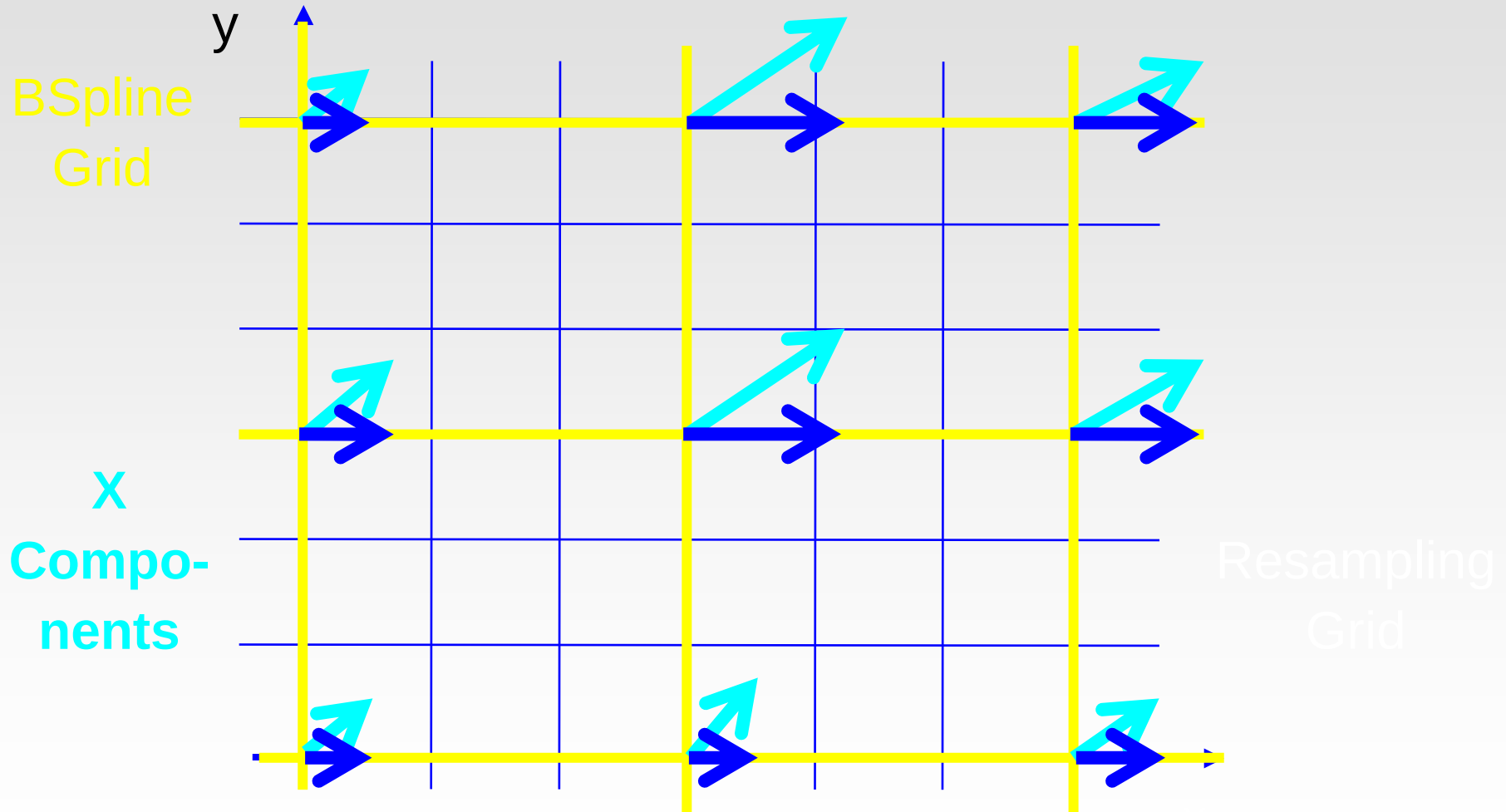
Interpolação BSplines

Interpolando Vetores

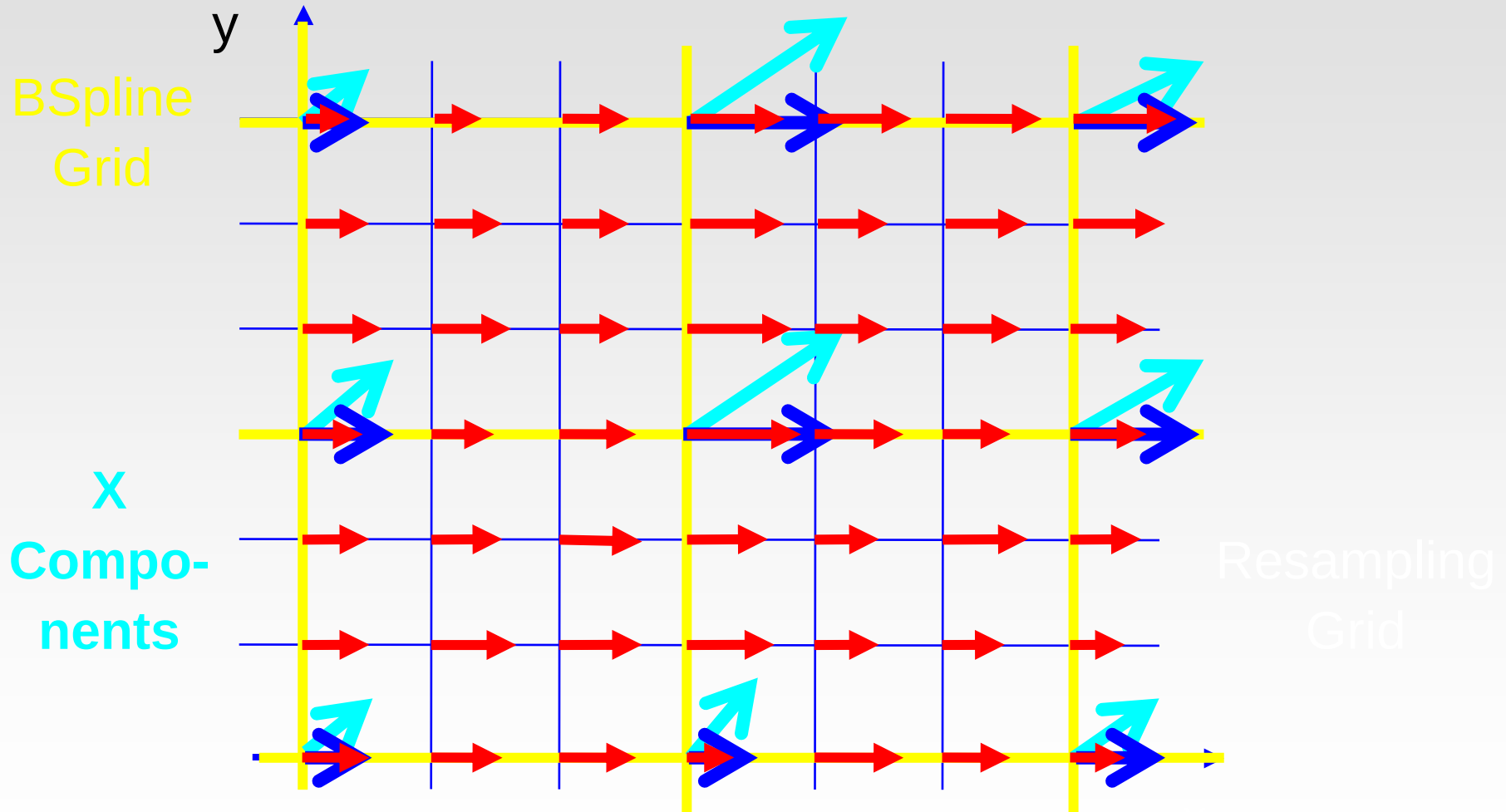
Interpolando Vetores



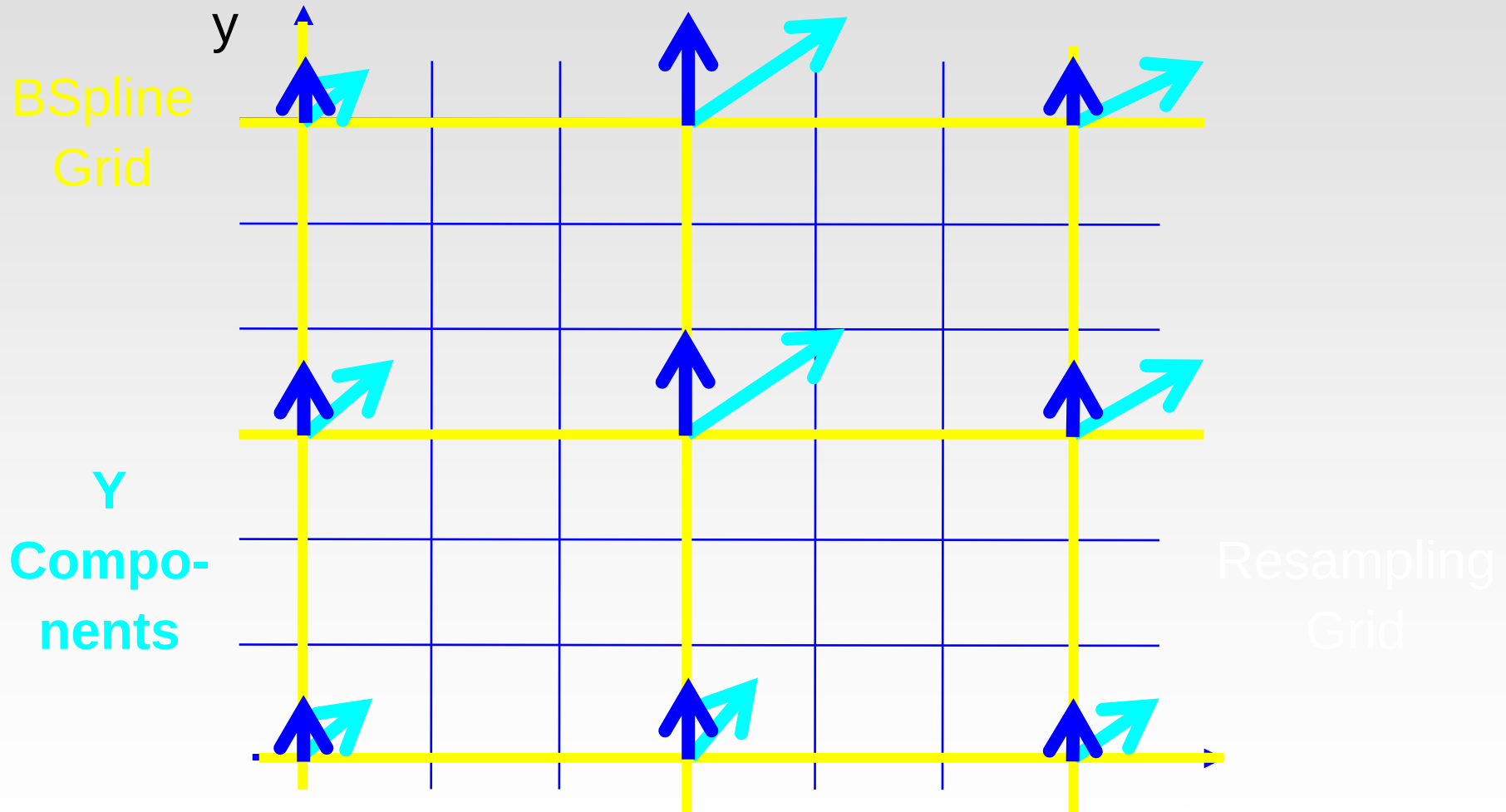
Interpolando Vetores



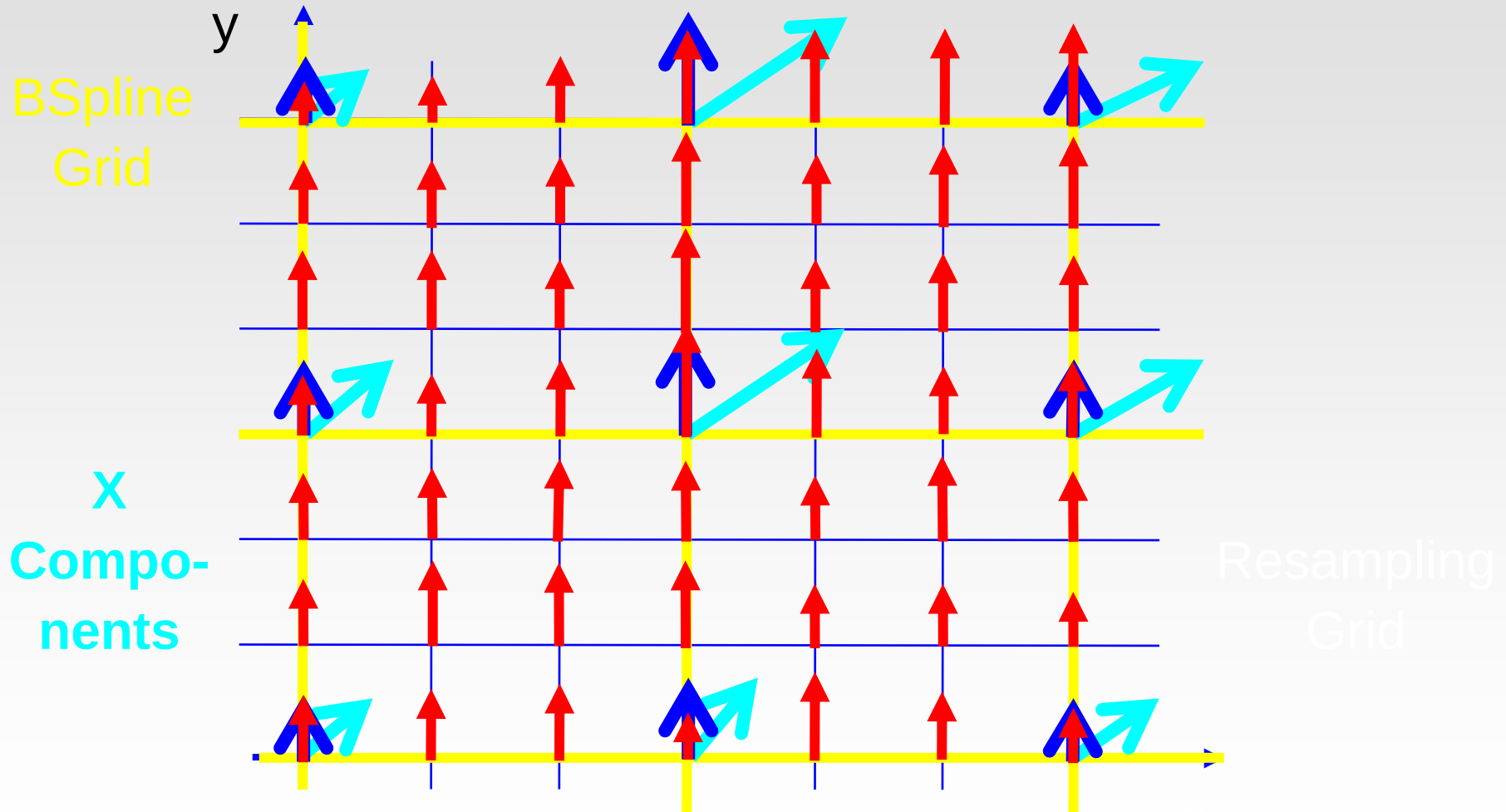
Interpolando Vetores



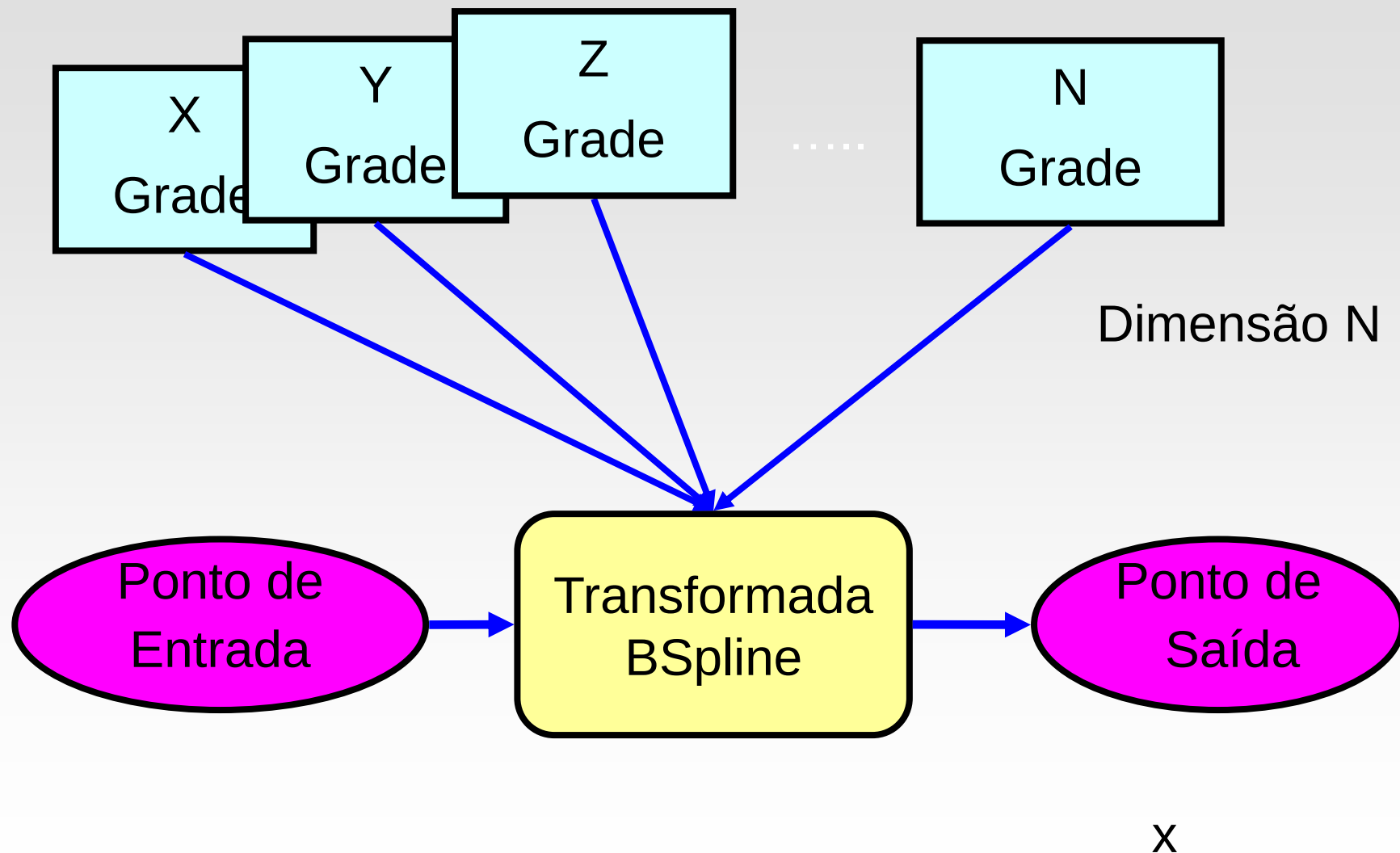
Interpolando Vetores



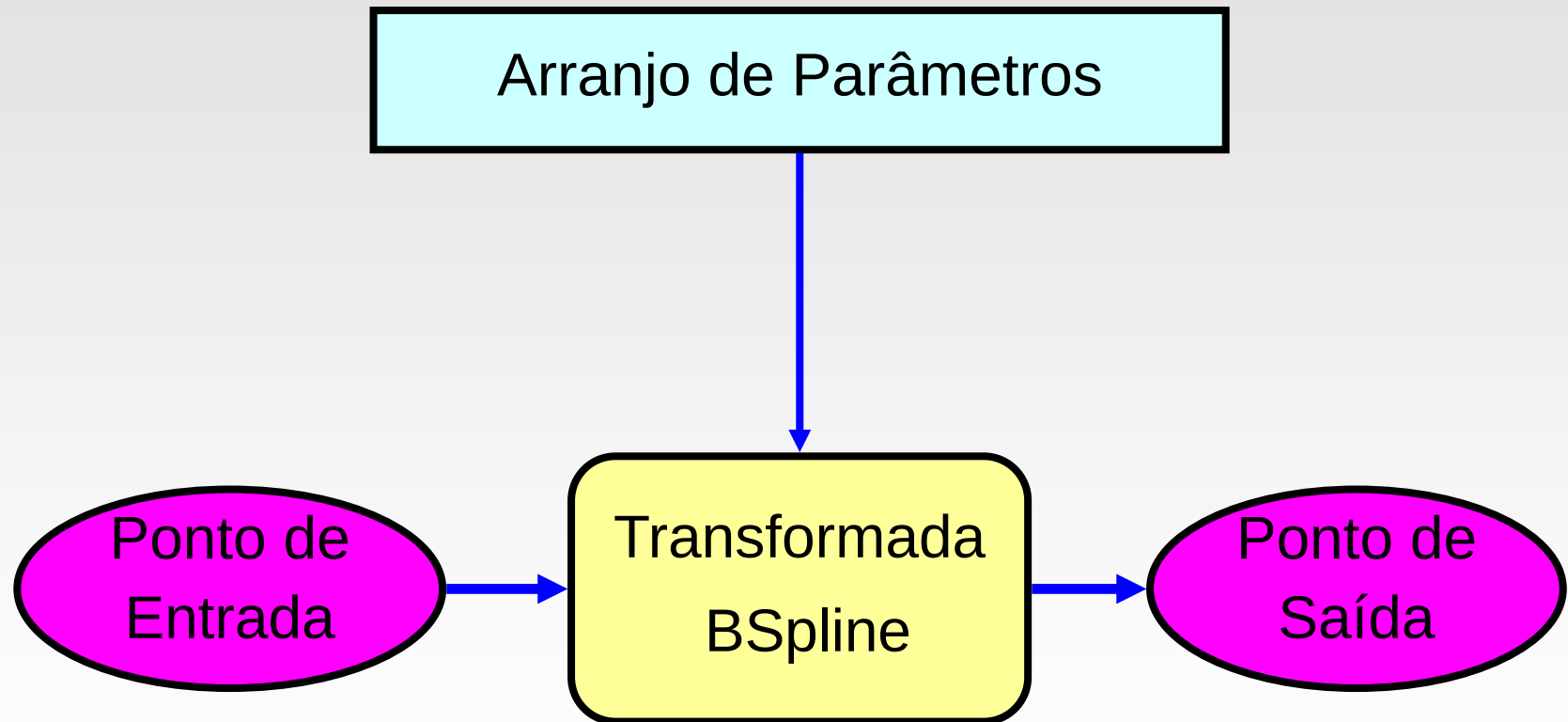
Interpolando Vetores



Alimentando a Transformada BSpline

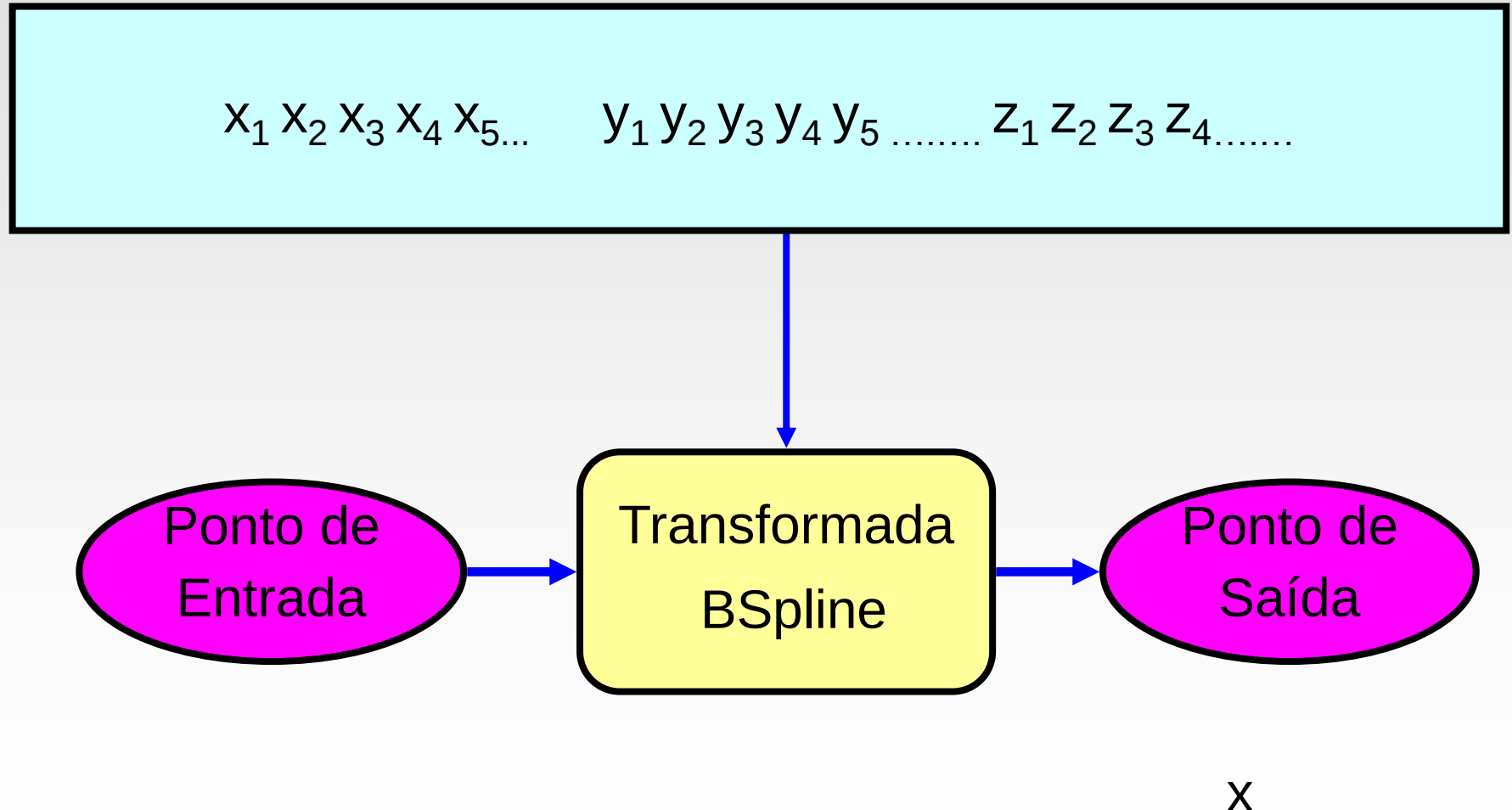


Alimentando a Transformada BSpline

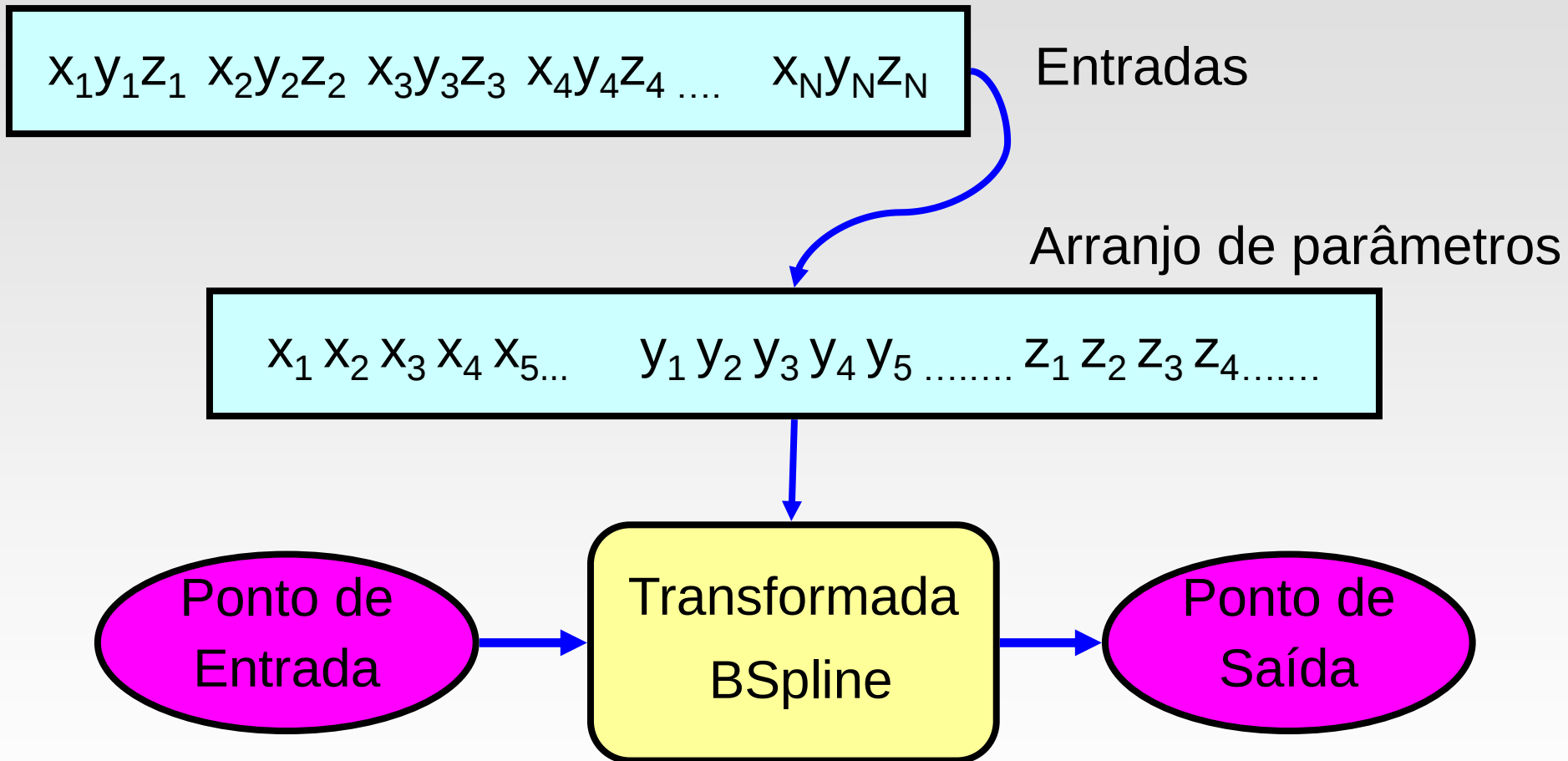


X

Alimentando a Transformada BSpline



Alimentando a Transformada BSpline

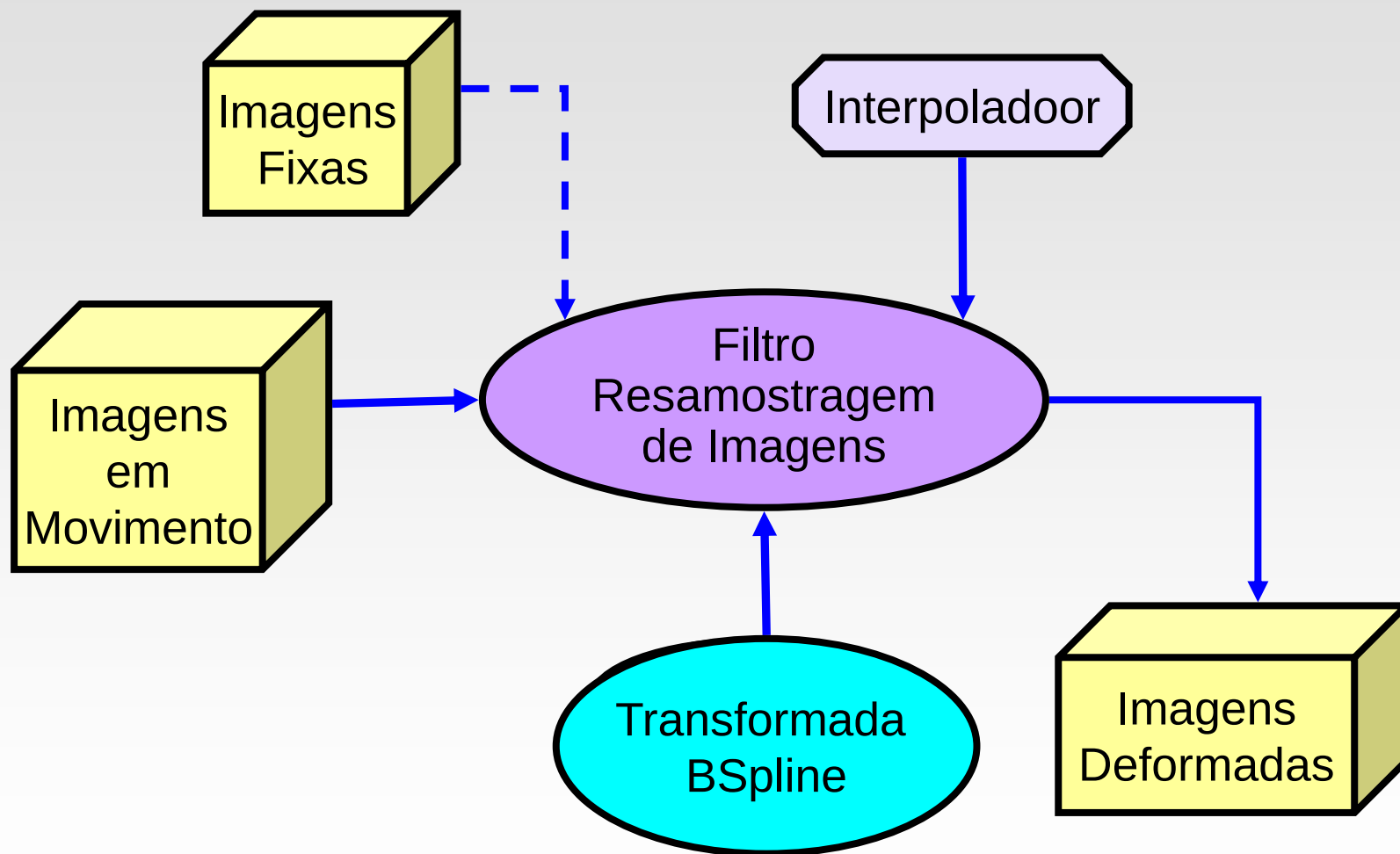


Interpolação BSplines

Reamostrando Imagens

Deformação BSpline

Reamostragem de imagens



Interpolação BSplines



Lena Original

Interpolação BSplines



Deformado com Transformada BSpline

Interpolação BSplines



Lena Deformada



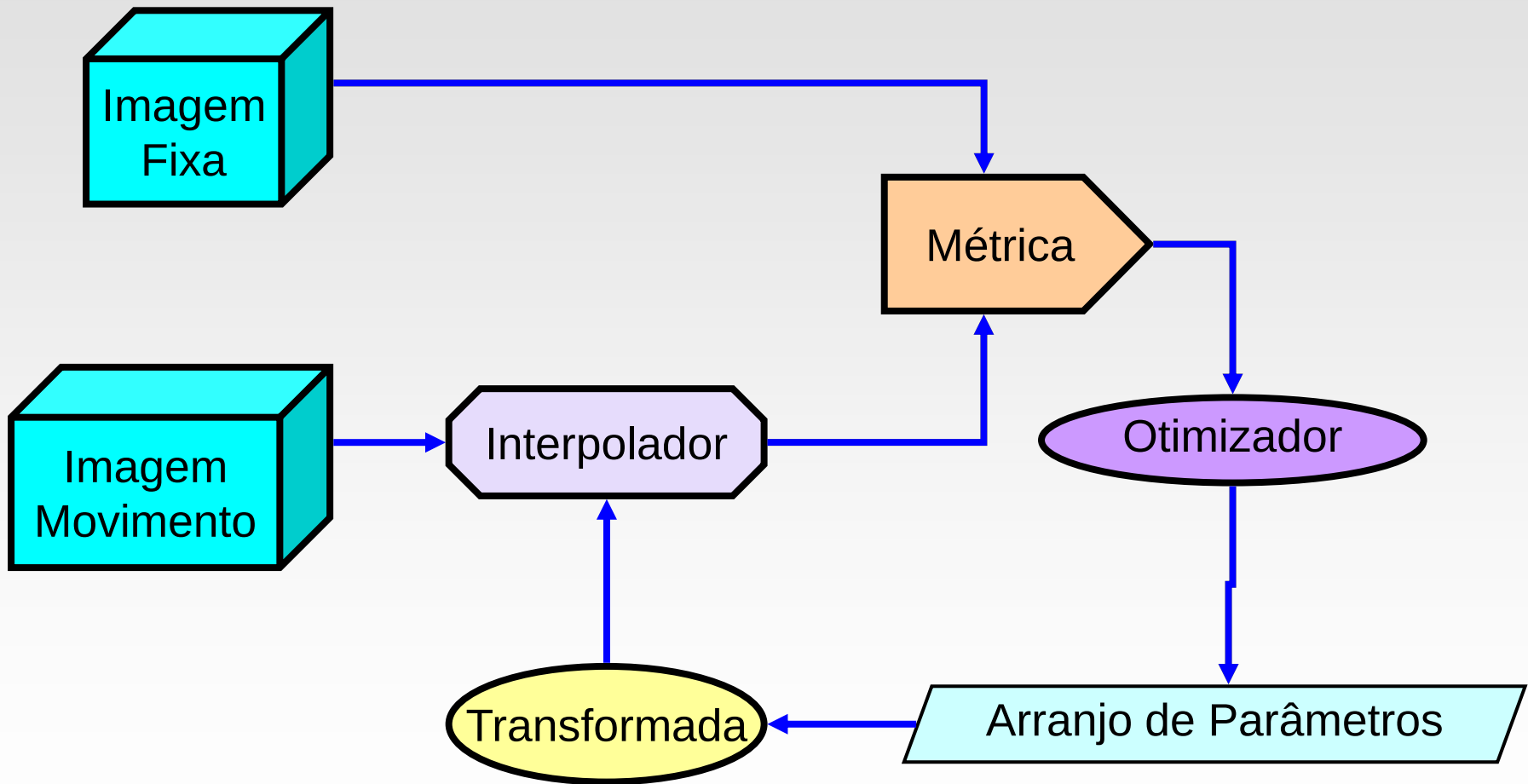
Lena Original

Co-registro de imagens

Co-registro Imagem

Transformada BSpline

Co-registro de imagens



Co-registro c/ BSplines Deformável



Deformada com Transformada BSpline

Co-registro c/ BSplines Deformável



Co-registrada com transformada BSplines

Co-registro c/ BSplines Deformável



Lena Original

Co-registro c/ BSplines Deformável



Diferença antes do
Co-registro



Diferença após o
Co-registro