

Morfologia Matemática em Imagens

Prof. Luiz Otavio Murta Jr.

Informática Biomédica
Departamento de Computação e Matemática
(FFCLRP/USP)

- **Propagação (Reconstrução)**

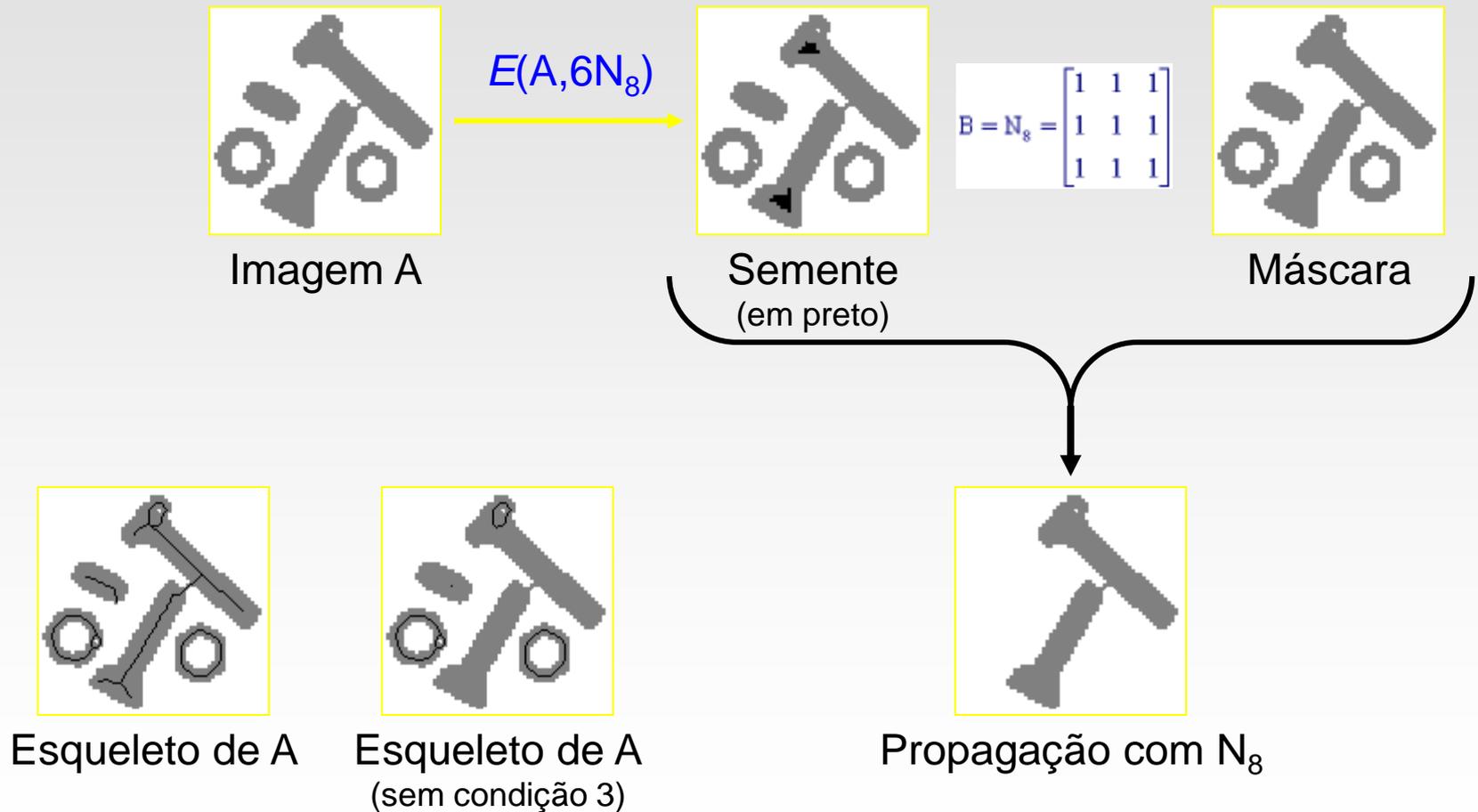
- Visa reconstruir um objeto parcialmente erodido ou preencher um objeto definido pelo seu contorno
- Algoritmo iterativo baseado numa imagem “semente” $S^{(0)}$, uma imagem máscara A e um estruturante B

$$S^{(k)} = D(S^{(k-1)}, B) \cap A ; \text{ repetir até } S^{(k)} = S^{(k-1)}$$

- » Em cada iteração a semente cresce dentro dos limites de A
- » As conectividades da fronteira de A e de B devem ser iguais
- » A implementação iterativa é ineficiente, mas existe uma implementação recursiva muito mais eficiente

Algoritmos Baseados em morfologia

- Exemplos



Pixels e vizinhanças

- Vizinhanças mais comuns

	N	
W	*	E
	S	

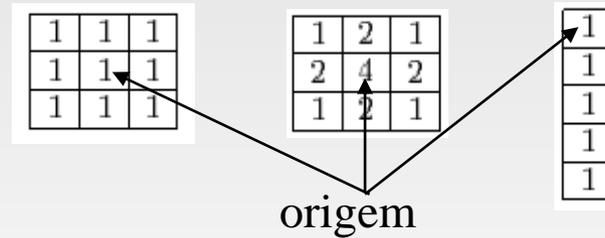
Vizinhança N_4

NW	N	NE
W	*	E
SW	S	SE

Vizinhança N_8

- Utilização de máscaras

- Exemplo:



40	40	80	80	80
40	40	80	80	80
40	40	80	80	80
40	40	80	80	80
40	40	80	80	80

entrada →



40	50	70	80	80
40	50	70	80	80
40	50	70	80	80
40	50	70	80	80
40	50	70	80	80

saída →



Contagem de objectos

- **Algoritmo**

- **Hipótese:** Objeto é um conjunto conexo de pixels (conectividade 4) e sem buracos no seu interior

0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0

Cantos exteriores

1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1

Cantos interiores

Compute the number of foreground objects of binary image B.
Objects are 4-connected and simply connected.
E is the number of external corners.
I is the number of internal corners.

```
procedure count_objects(B);
{
E := 0;
I := 0;
for L := 0 to MaxRow - 1
  for P := 0 to MaxCol - 1
    {
      if external_match(L, P) then E := E + 1;
      if internal_match(L, P) then I := I + 1;
    };
return((E - I) / 4);
}
```

Extracção de componentes conexos - algoritmo recursivo

Compute the connected components of a binary image.

B is the original binary image.

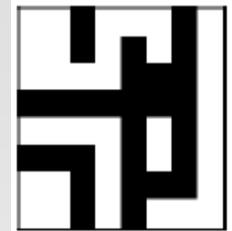
LB will be the labeled connected component image.

```
procedure recursive_connected_components(B, LB);
{
  LB := negate(B);
  label := 0;
  find_components(LB, label);
  print(LB);
}

procedure find_components(LB, label);
{
  for L := 0 to MaxRow
    for P := 0 to MaxCol
      if LB[L,P] == -1 then
        {
          label := label + 1;
          search(LB, label, L, P);
        }
}

procedure search(LB, label, L, P);
{
  LB[L,P] := label;
  Nset := neighbors(L, P);
  for each (L',P') in Nset
    {
      if LB[L',P'] == -1
        then search(LB, label, L', P');
    }
}
```

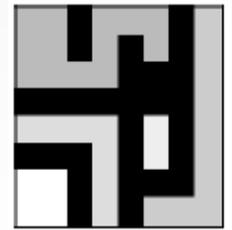
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1



↑
entrada

↓
saída

1	1	0	1	1	1	0	2
1	1	0	1	0	1	0	2
1	1	1	1	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	2
3	3	3	3	0	4	0	2
0	0	0	3	0	4	0	2
5	5	0	3	0	0	0	2
5	5	0	3	0	2	2	2



Estrutura União-Procura

Construct the union of two sets.

X is the label of the first set.

Y is the label of the second set.

PARENT is the array containing the union-find data structure.

```
procedure union(X, Y, PARENT);
{
j := X;
k := Y;
while PARENT[j] <> 0
  j := PARENT[j];
while PARENT[k] <> 0
  k := PARENT[k];
if j <> k then PARENT[k] := j;
}
```

Find the parent label of a set.

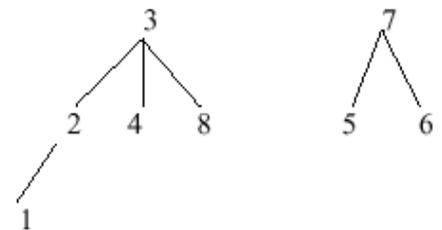
X is a label of the set.

PARENT is the array containing the union-find data structure.

```
procedure find(X, PARENT);
{
j := X;
while PARENT[j] <> 0
  j := PARENT[j];
return(j);
}
```

PARENT

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	0	3	7	7	0	3



ECC - algoritmo clássico com união-procura

Compute the connected components of a binary image.

B is the original binary image.

LB will be the labeled connected component image.

```

procedure classicalwith_union-find(B,LB);
{
  "Initialize structures."
  initialize();
  "Pass 1 assigns initial labels to each row L of the image."
  for L := 0 to MaxRow
  {
    "Initialize all labels on line L to zero"
    for P := 0 to MaxCol
      LB[L,P] := 0;
    "Process line L."
    for P := 0 to MaxCol
      if B[L,P] == 1 then
        {
          A := prior_neighbors(L,P);
          if isempty(A)
            then { M := label; label := label + 1; };
          else M := min(labels(A));
          LB[L,P] := M;
          for X in labels(A) and X <> M
            union(M, X, PARENT);
        }
  }
  "Pass 2 replaces Pass 1 labels with equivalence class labels."
  for L := 0 to MaxRow
    for P := 0 to MaxCol
      if B[L,P] == 1
        then LB[L,P] := find(LB[L,P],PARENT);
  };

```

1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1

← entrada

1º passo →

1	1	0	2	2	2	0	3
1	1	0	2	0	2	0	3
1	1	1	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	3
4	4	4	4	0	5	0	3
0	0	0	4	0	5	0	3
6	6	0	4	0	0	0	3
6	6	0	4	0	7	7	3

PARENT

1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	3

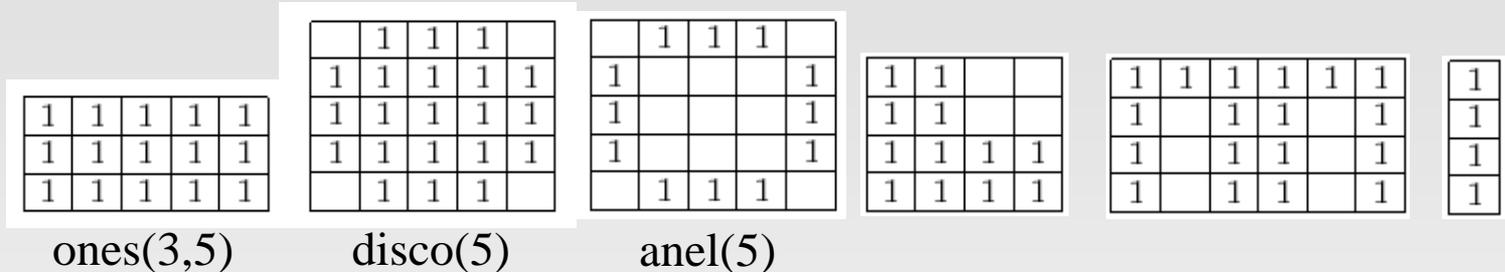
← classes equiv.

2º passo →

1	1	0	1	1	1	0	3
1	1	0	1	0	1	0	3
1	1	1	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	3
4	4	4	4	0	5	0	3
0	0	0	4	0	5	0	3
6	6	0	4	0	0	0	3
6	6	0	4	0	3	3	3

Operadores morfológicos

- Elementos estruturantes



- necessário definir uma origem

- **Definição:** A dilatação duma imagem binária B pelo elemento estruturante S define-se da seguinte forma

$$B \oplus S = \bigcup_{b \in B} S_b \quad S_b = \{s + b \mid s \in S\}$$

- **Definição:** A erosão duma imagem binária B pelo elemento estruturante S define-se da seguinte forma

$$B \ominus S = \{b \mid b + s \in B \forall s \in S\}$$

Operadores morfológicos

- Definição:** O fechamento de uma imagem binária B pelo elemento estruturante S define-se da seguinte forma

$$B \bullet S = (B \oplus S) - S \ominus$$

- Definição:** A abertura de uma imagem binária B pelo elemento estruturante S define-se da seguinte forma

$$B \circ S = (B \ominus S) \oplus S$$

B

1	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	

S

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$B \oplus S$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1

$B \bullet S$

	1	1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	

$B \ominus S$

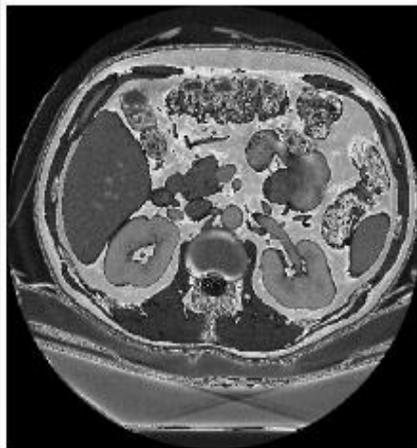
					1	1	
					1	1	
					1	1	

$B \circ S$

					1	1	1	1
					1	1	1	1
					1	1	1	1
					1	1	1	1
					1	1	1	1

Exemplos de aplicação

- aplicações médicas (resolução 512x512)
 - abertura com disco(13) seguido de fechamento com disco(2)



original



binarizada



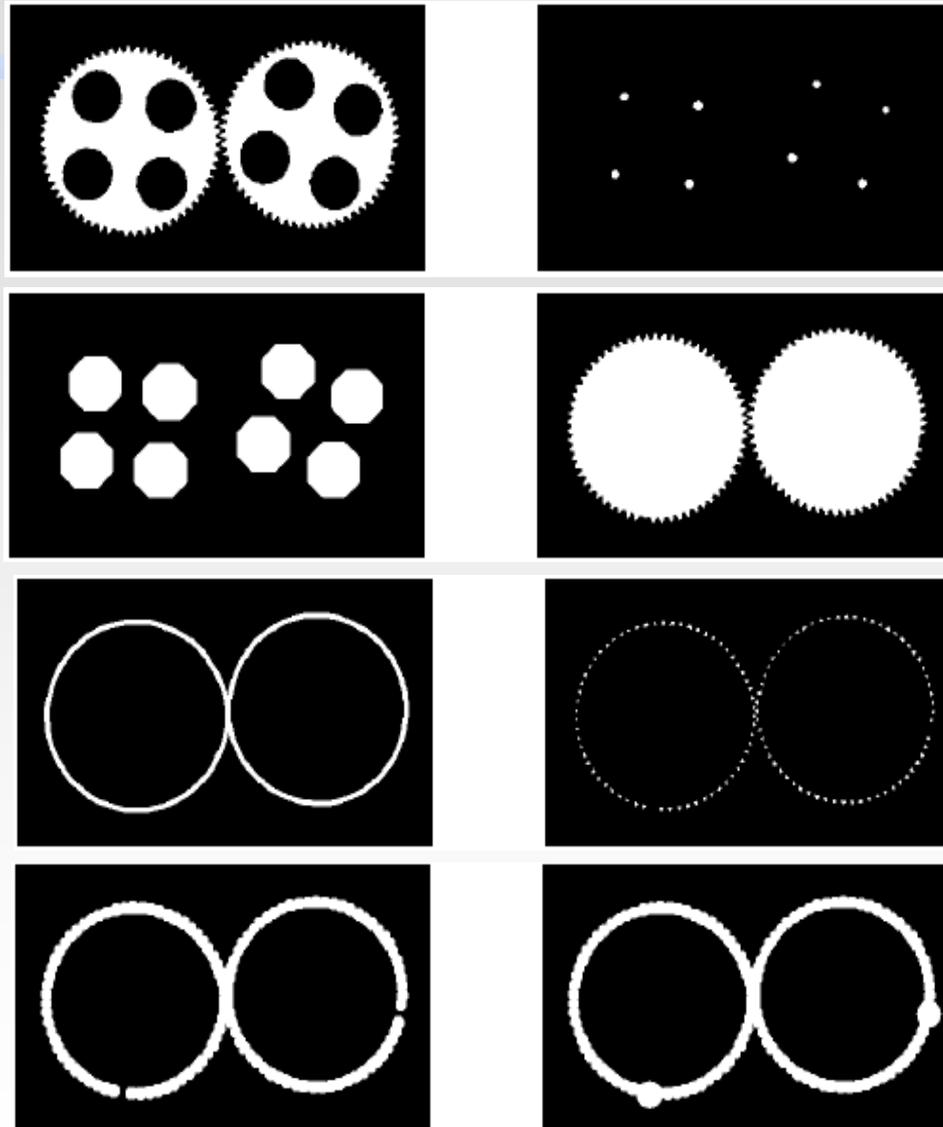
processada

- extração de primitivas geométricas
 - subtrai da imagem original a obtida desta através do operador **abertura** usando pequeno disco como elemento estruturante



Inspeção

entrada →



← saída

Dilatação condicional

- Definição:** Dadas as imagens binárias original B , e processada C , e o elemento estruturante S , e seja $C_0 = C$ e $C_n = (C_{n-1} \oplus S) \cap B$. A dilatação condicional de C por S com respeito a B define-se como

$$C \oplus|_B S = C_m$$

onde m é o menor inteiro que satisfaz a condição $C_m = C_{m-1}$

B

		1							
	1	1	1				1		
								1	
			1						
			1	1				1	
			1	1	1	1		1	
			1					1	
							1	1	

$C = B \ominus V$

$C \oplus|_B S$

V

1
1
1

S

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Propriedades de regiões

- **Área**

$$A = \sum_{(r,c) \in R} 1$$

- **Centróide**

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} r \quad \bar{c} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} c$$

- **Pixels de perímetro**

$$P_4 = \{(r,c) \in R \mid N_8(r,c) - R \neq \emptyset\}$$

$$P_8 = \{(r,c) \in R \mid N_4(r,c) - R \neq \emptyset\}$$

- comprimento do perímetro

$$|P| = \left| \{k \mid (r_{k+1}, c_{k+1}) \in N_4(r_k, c_k)\} \right| \\ + \sqrt{2} \left| \{k \mid (r_{k+1}, c_{k+1}) \in N_8(r_k, c_k) - N_4(r_k, c_k)\} \right|$$

- **Circularidade (1)**

$$C_1 = \frac{|P|^2}{A}$$

Propriedades (cont.)

- Circularidade (2)**

$$C_2 = \frac{\mu_R}{\sigma_R}$$

$$\mu_R = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|(r_k, c_k) - (\bar{r}, \bar{c})\|$$

- distância radial média

$$\sigma_R = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\|(r_k, c_k) - (\bar{r}, \bar{c})\| - \mu_R \right)^2 \right)^{1/2}$$

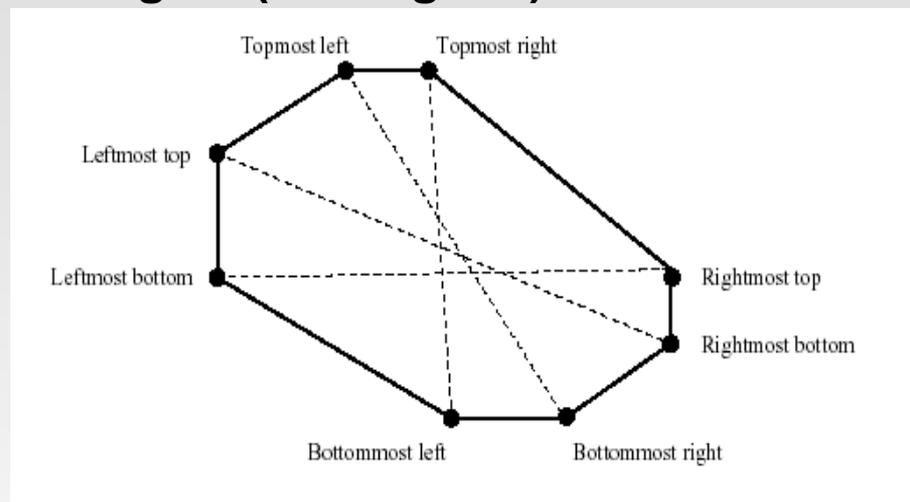
- desvio padrão da distância radial

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
2	2	2	2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

region num.	region area	row of center	col of center	perim. length	circularity ₁	circularity ₂	radius mean	radius var.
1	44	6	11.5	21.2	10.2	15.4	3.33	.05
2	48	9	1.5	28	16.3	2.5	3.80	2.28
3	9	13	7	8	7.1	5.8	1.2	0.04

Propriedades – fronteiras e comprimentos

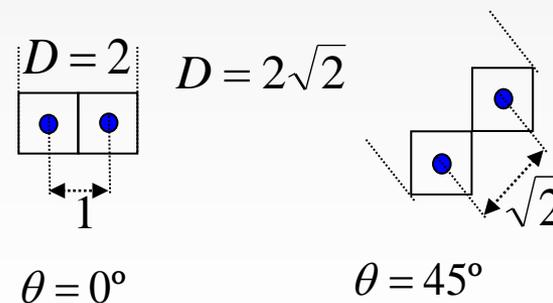
- **Rectângulo (e octógono) de fronteira**



- **Comprimento de um segmento (eixo)**

$$D = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (c_2 - c_1)^2} + Q(\theta)$$

$$Q(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos(\theta)|} & : |\theta| < 45^\circ \\ \frac{1}{|\sin(\theta)|} & : |\theta| > 45^\circ \end{cases}$$



Propriedades – Momentos de 2ª ordem

- Momentos de 2ª ordem centrados

$$\mu_{rr} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (r - \bar{r})^2 \quad \mu_{cc} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (c - \bar{c})^2 \quad \mu_{rc} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (r - \bar{r})(c - \bar{c})$$

- Relação entre momentos e regiões elípticas

$$R = \{(r,c) \mid dr^2 + 2erc + fc^2 \leq 1\} \quad \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \frac{1}{4(\mu_{rr}^c \mu_{cc} - \mu_{rc}^2)} \begin{pmatrix} \mu_{cc} & -\mu_{rc} \\ -\mu_{rc} & \mu_{rr} \end{pmatrix}$$

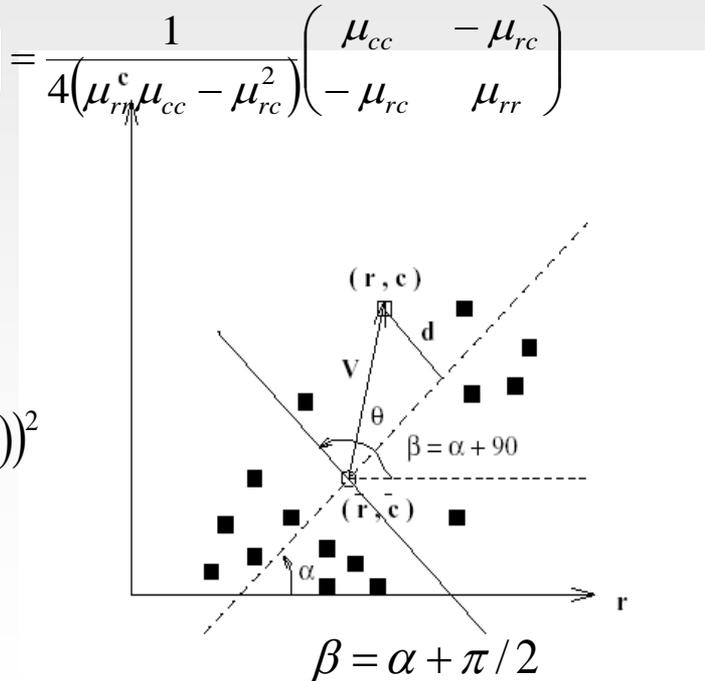
- Eixos de menor e maior inércia

- Formulação

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{r}, \bar{c}, \alpha} &= \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} d^2 \\ &= \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (\bar{V} \circ (\cos \beta, \sin \beta))^2 \end{aligned}$$

- Solução

$$\tan(2\hat{\alpha}) = \frac{2\mu_{rc}}{\mu_{rr} - \mu_{cc}}$$



Principais Tópicos

- Introdução
- Morfologia Binária em Imagens
- Morfologia de Tons de Cinza
- Granulometria

Morfologia em tons de cinza

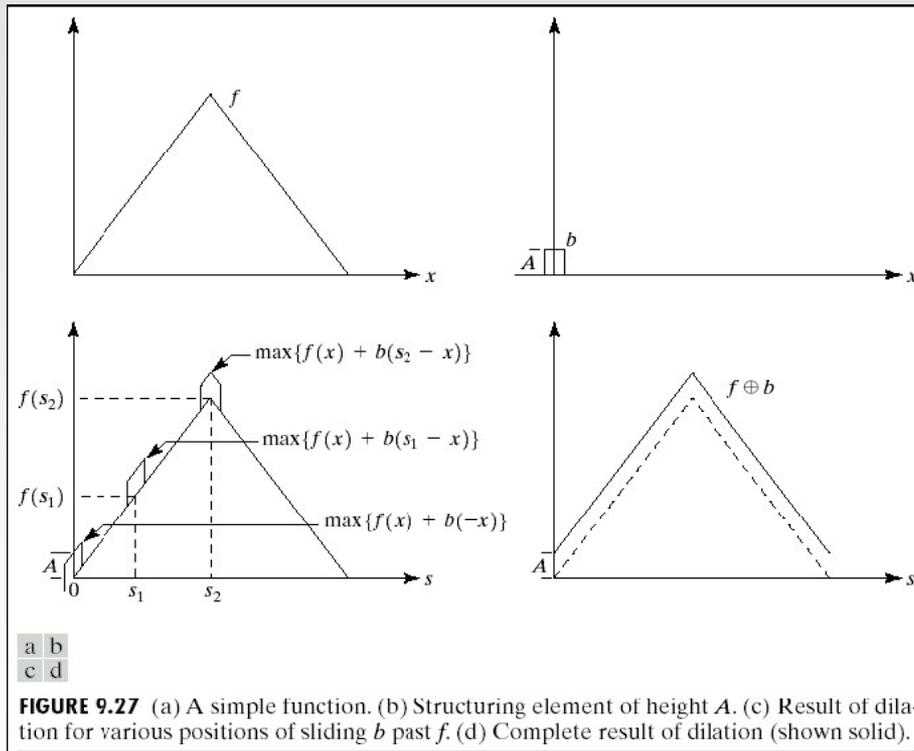
Extensão para imagens níveis cinza

- Função imagem digital
 - $f(x,y)$: imagem de entrada
 - $b(x,y)$: elemento estruturante (uma função subimagem)
- Assumir que são funções discretas
 - (x,y) são inteiros
 - f e b são funções que atribuem um nível de cinza (número inteiro) para cada par distinto de coordenada (x,y)

Morfologia em tons de cinza

Dilatação

D_f e D_b são os domínios de f e b respectivamente



$$(f \oplus b)(s, t) = \max\{f(s - x, y - t) + b(x, y)\}$$

$$(s - x), (t - y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$

Condição $(s-x)$ e $(t-y)$ tem que estar no domínio de f e (x,y) tem que estar no domínio de b é similar a condição da dilatação morfológica binária onde os dois conjuntos tem que estar superpostos por no mínimo um elemento

Morfologia em tons de cinza

Dilatação

- Similar a convolução 2D

- $f(s-x)$: $f(-x)$ é simplesmente $f(x)$ espelhada em relação a origem do eixo x . A função $f(s-x)$ move para a direita para s positivo, e para a esquerda para s negativo.

- Operação máximo substitui o somatório da convolução

- Operação adição substitui os produtos da convolução

- Efeito geral

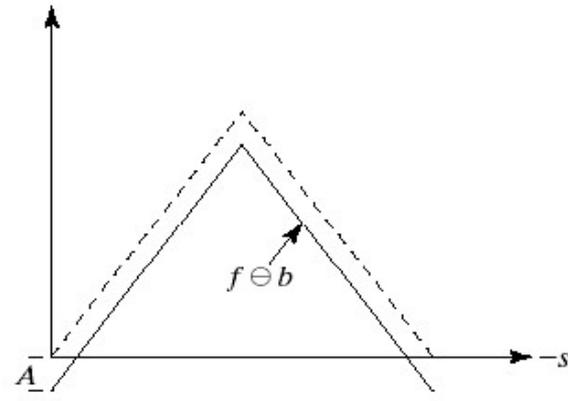
- Se todos os valores do elemento estruturante são positivos, a imagem de saída aumenta a luminosidade

- Detalhes escuros ou são reduzidos ou são eliminados, dependendo de como os seus valores e formas estão relacionados com o elemento estruturante usado para a dilatação

Erosão

FIGURE 9.28

Erosion of the function shown in Fig. 9.27(a) by the structuring element shown in Fig. 9.27(b).



$$(f \ominus b)(s, t) = \min\{f(s + x) - b(x, y) \mid (s + x), (t + y) \in D_f; (x, y) \in D_b\}$$

Condição $(s+x)$ e $(t+y)$ estar no domínio de f e (x,y) estar no domínio de b é similar a condição da erosão morfológica binária onde o elemento estruturante tem que estar completamente contido pelo conjunto sendo erodido

Morfologia em tons de cinza

Erosão

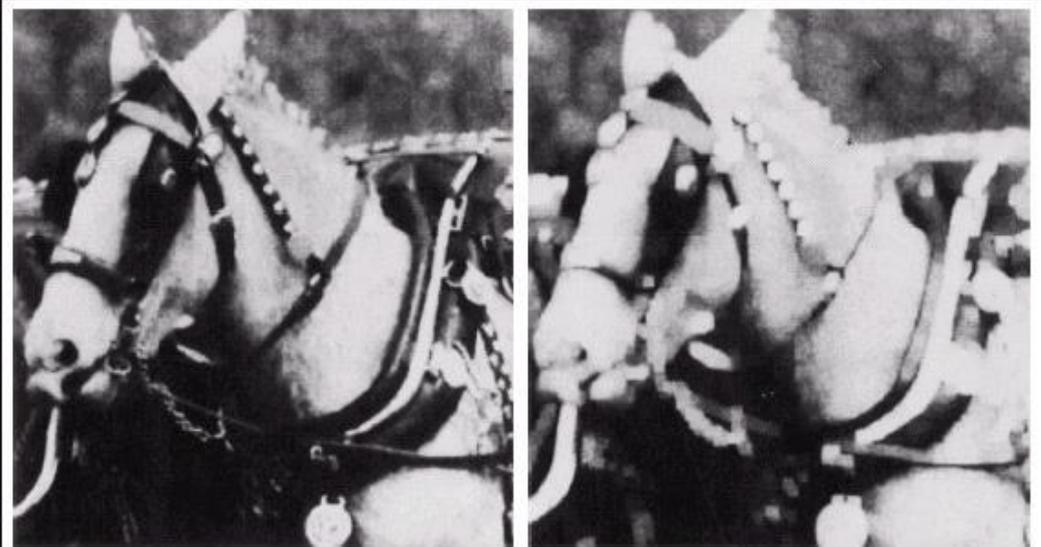
- Similar a correlação 2D
 - $f(s+x)$ move para a esquerda para s positivo e para a direita para s negativo
- Efeito geral
 - Se todos os elementos do elemento estruturante são positivos, a imagem de saída fica mais escura
 - O efeito de detalhes claros na imagem de entrada menores do que o elemento estruturante é reduzido, o grau de redução é determinado pelos níveis de cinza dos vizinhos e pela forma e amplitude do elemento estruturante

Morfologia em tons de cinza

(a) Imagem original
512x512

(b) Resultado da dilatação
com elemento
estruturante flat-top de
altura unitária e 5x5
pixels – imagem mais
clara, detalhes pequenos e
escuros são reduzidos

(c) Resultado da erosão –
imagem mais escura,
detalhes pequenos e
claros são reduzidos

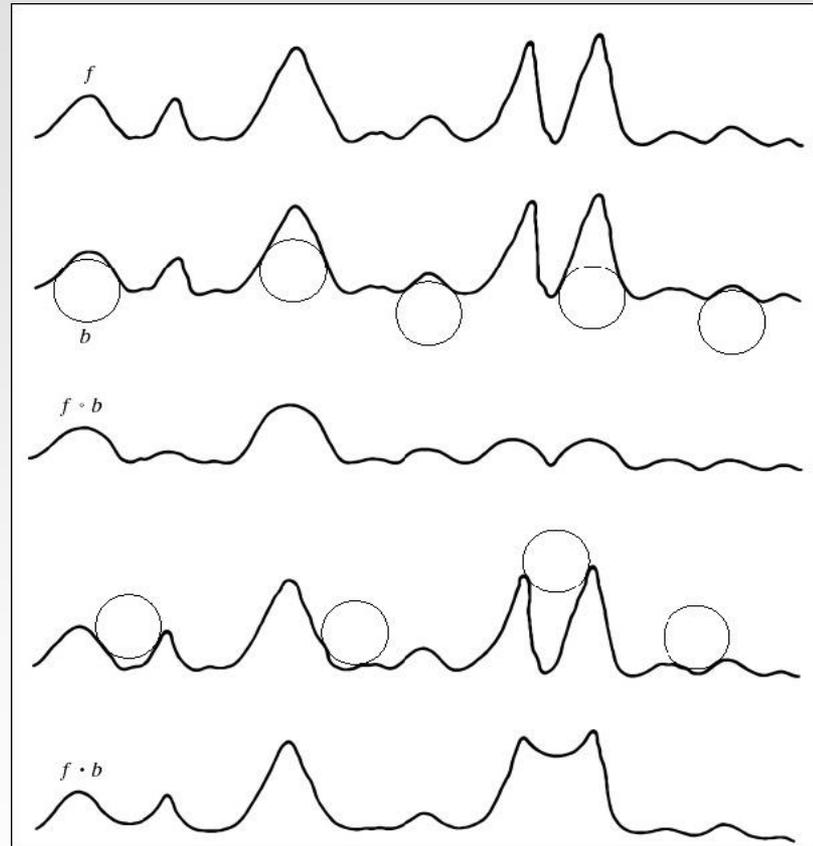


Morfologia em tons de cinza

Abertura e fechamento

- (a) Níveis de cinza de uma linha
- (b) Posições da bola para abertura
- (c) Resultado da abertura
- (d) Posições da bola para fechamento
- (e) Resultado do fechamento

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$$
$$f \cdot b = (f \oplus b) \ominus b$$



Morfologia em tons de cinza

Efeito da abertura

- O elemento estruturante é rolado abaixo da superfície de f
- Picos estreitos em relação ao diâmetro do elemento estruturante serão reduzidos em amplitude e serão suavizados
- Assim, abertura é usado para remover detalhes pequenos claros, deixando características claras e grandes intocadas
- A erosão inicial remove os detalhes e torna a imagem mais escura
- A dilatação subsequente aumenta a intensidade da imagem sem introduzir os detalhes removidos na erosão

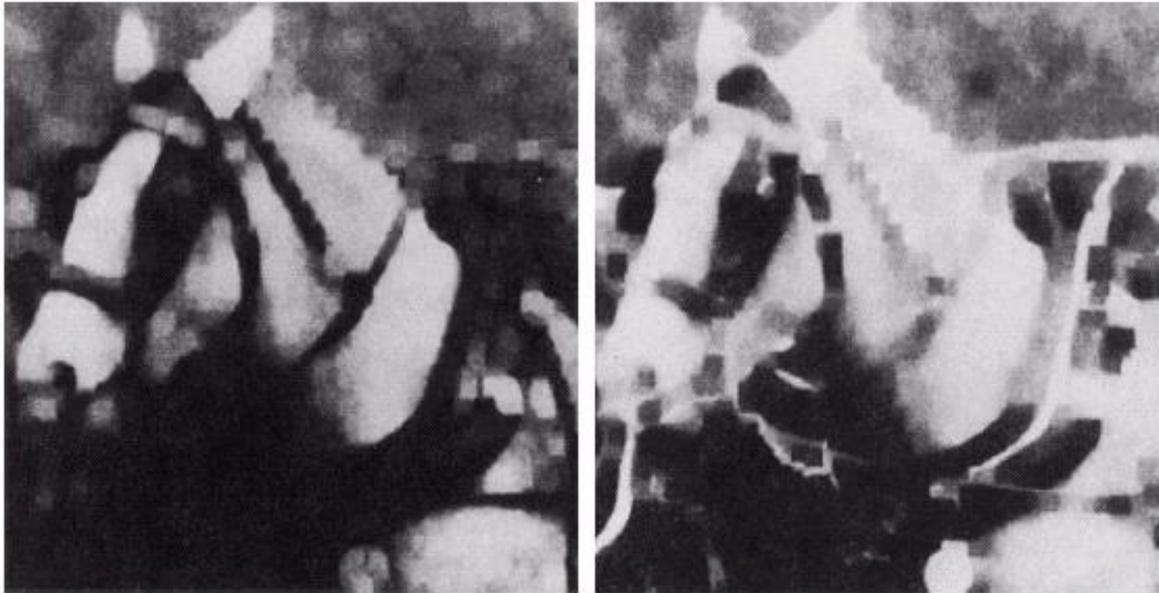
Morfologia em tons de cinza

Efeito do fechamento

- O elemento estruturante é rolado no topo da superfície de f
- Picos são deixados na forma original (assuma que sua separação no ponto mais estreito excede o diâmetro do elemento estruturante)
- Assim, fechamento é usado para remover detalhes pequenos escuros, deixando características claras intocadas
- A dilatação inicial remove os detalhes escuros e torna a imagem mais clara
- A erosão subsequente escurece a imagem sem introduzir os detalhes removidos na dilatação

Morfologia em tons de cinza

Exemplo



a b

FIGURE 9.31 (a) Opening and (b) closing of Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

Morfologia em tons de cinza

Aplicações de Morfologia para níveis de cinza

- Suavização morfológica
- Gradiente morfológico
- Transformação Top-hat
- Segmentação de textura
- Granulometria

Os exemplos mostrados neste tópico são de tamanho 512x512 e processados usando o elemento estruturante flat-top de altura unitária e tamanho de 5x5 pixels

Morfologia em tons de cinza

Suavização Morfológica

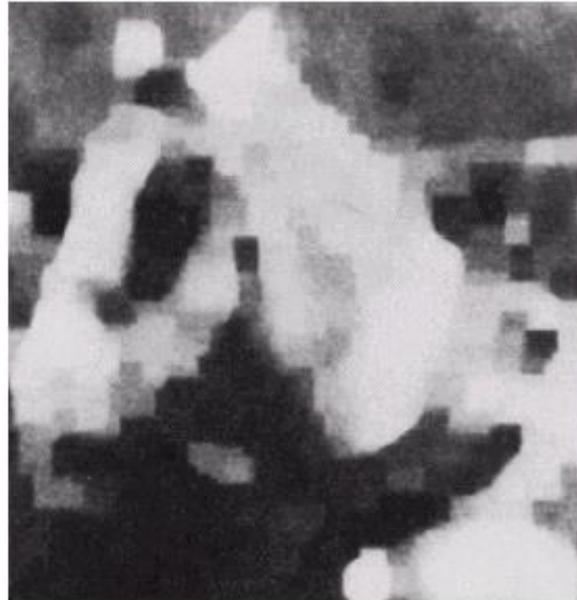


FIGURE 9.32 Morphological smoothing of the image in Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

Executa uma abertura seguida de um fechamento
Efeito: remove ou atenua o ruído claro e escuro

Morfologia em tons de cinza

Gradiente Morfológico

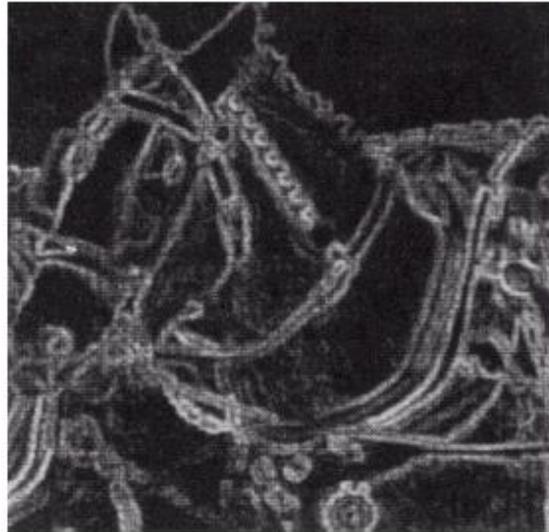


FIGURE 9.33 Morphological gradient of the image in Fig. 9.29(a). (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

Efeito: enfatiza gradiente, transições abruptas de nível de cinza na imagem de entrada

Morfologia em tons de cinza

Transformação Top-hat

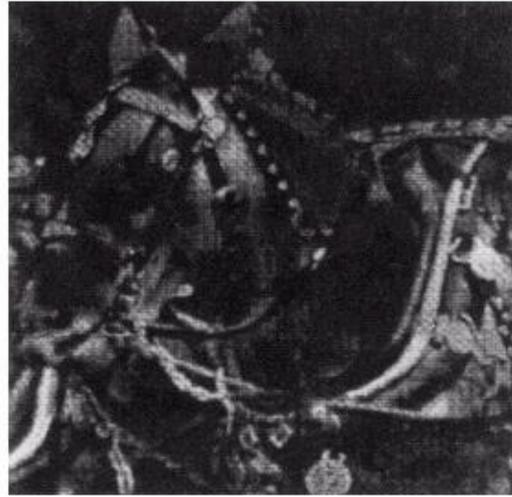


FIGURE 9.34 Result of performing a top-hat transformation on the image of Fig. 9.29(a).
(Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)

$$h = f - (f \circ b)$$

Efeito: realce de detalhe na presença de sombra

Observe o realce de detalhe no fundo abaixo da parte baixa da cabeça do cavalo

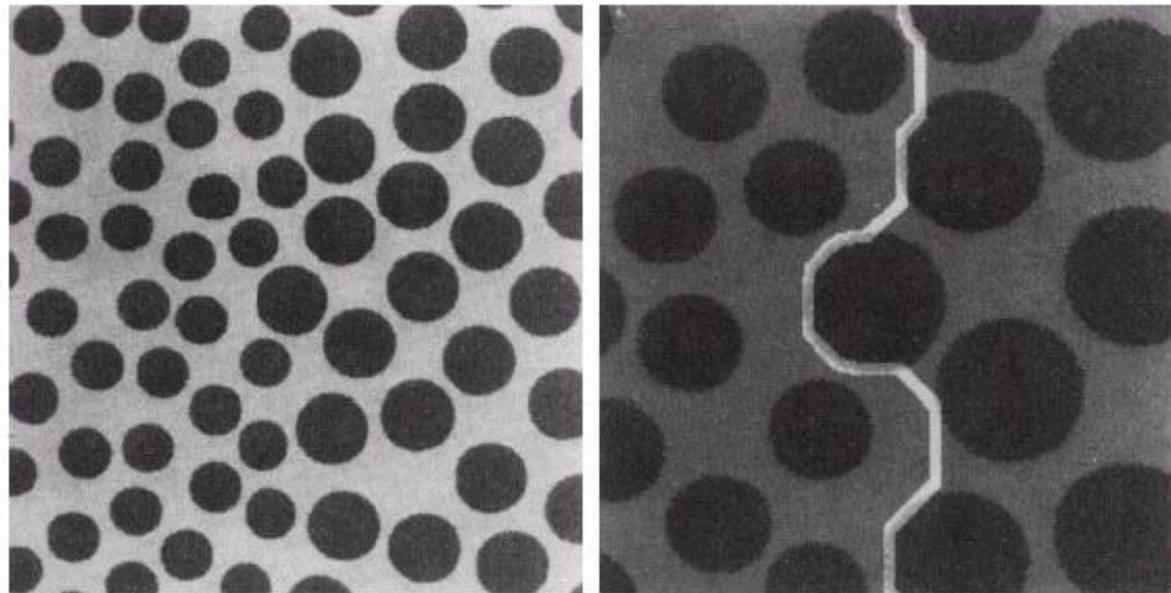
Morfologia em tons de cinza

Segmentação de Textura

a b

FIGURE 9.35

(a) Original image. (b) Image showing boundary between regions of different texture. (Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)



- A região a direita consiste de bolhas circulares maiores do que as da esquerda
- O objetivo é encontrar a fronteira entre as duas regiões baseado no conteúdo das suas texturas

Morfologia em tons de cinza

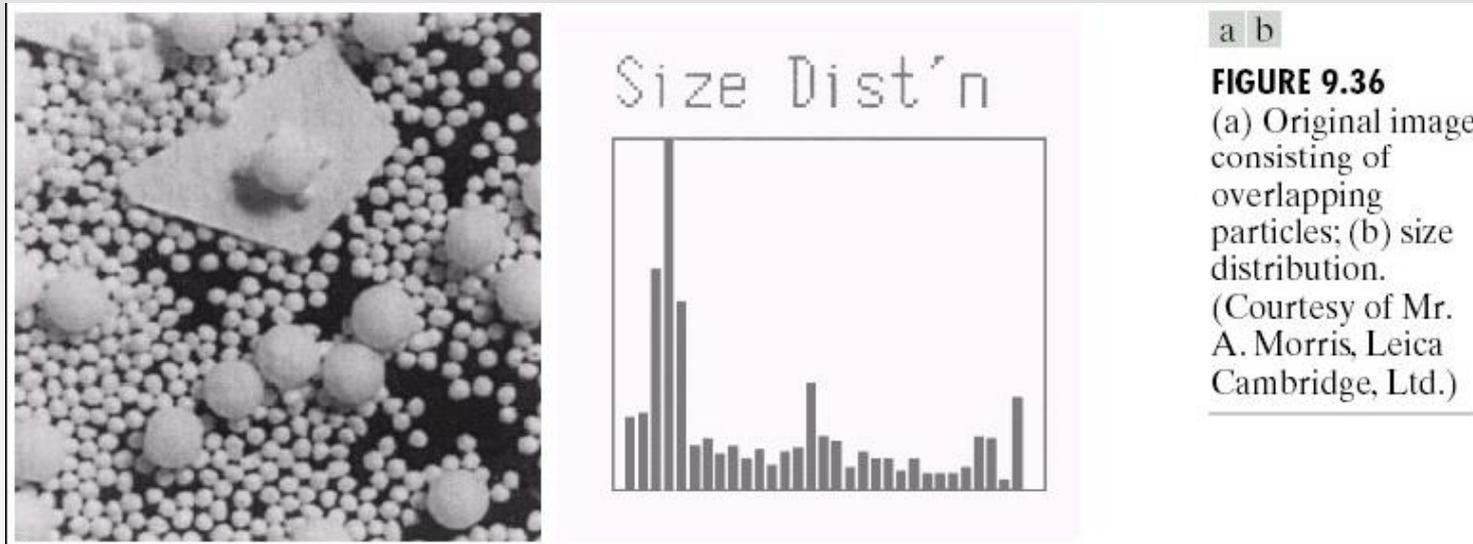
Segmentação de Textura

Execute

- Fechar a imagem usando elementos estruturantes sucessivamente maiores do que pequenas bolhas
 - Como fechamento remove detalhes escuros da imagem, as pequenas bolhas são removidas da imagem, deixando apenas um fundo claro a esquerda e bolhas maiores a direita
- Abertura com elemento estruturante que é grande em relação a separação entre bolhas grandes
 - Abertura remove as regiões claras entre as bolhas, deixando regiões escuras a direita, bolhas grandes escuras, e regiões escuras de mesmo tamanho entre as bolhas
- Agora, temos uma região clara a esquerda e uma região escura a direita, podendo usar um limiar para gerar a fronteira entre as duas texturas

Morfologia em tons de cinza

Granulometria



Determinar a distribuição do tamanho das partículas em uma imagem
No exemplo, a imagem consiste de 3 objetos claros de tamanhos diferentes
Os objetos não estão apenas superpostos mas também misturados para permitir a detecção de partículas individuais

Morfologia em tons de cinza

Granulometria

- Objetos são mais claros do que o fundo
- Execute os passos:
 - Abertura com elementos estruturantes de tamanho crescente na imagem original
 - A diferença entre a imagem original e sua abertura é calculada depois de cada passo quando um elemento estruturante diferente é completado
 - No final do processo, estas diferenças são normalizadas e então usadas para construir um histograma da distribuição do tamanho da partícula
- Idéia: operações de abertura de um tamanho particular tem efeito maior em regiões que contém partículas de tamanho similar