Filtros em frequências

Prof. Luiz Otavio Murta Jr.

Depto. de Computação e Matemática
(FFCLRP/USP)

Transformada de Fourier 2D discreta

Convolução

•Definição

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

*(note que f(x) * g(x) = g(x) * f(x))*

•Teorema da Convolução

$$f(x) * g(x) \leftrightarrow F(u)\, G(u)$$

(convolução no domínio direto significa multiplicação no domínio da freqüência)

$$f(x)\, g(x) \leftrightarrow F(u) * G(u)$$

(multiplicação no domínio direto significa convolução no domínio da freqüência)

Transformada de Fourier 2D discreta

Calculando *f *g* com eficiência

1. Calcule: $\mathbf{F}(f(x)) = F(u)$, e $\mathbf{F}(g(x)) = G(u)$
2. Multiplique: $F(u)G(u)$
3. Calcule a FT inversa: $\mathbf{F}^{-1}(F(u)\, G(u)) = f(x) * g(x)$

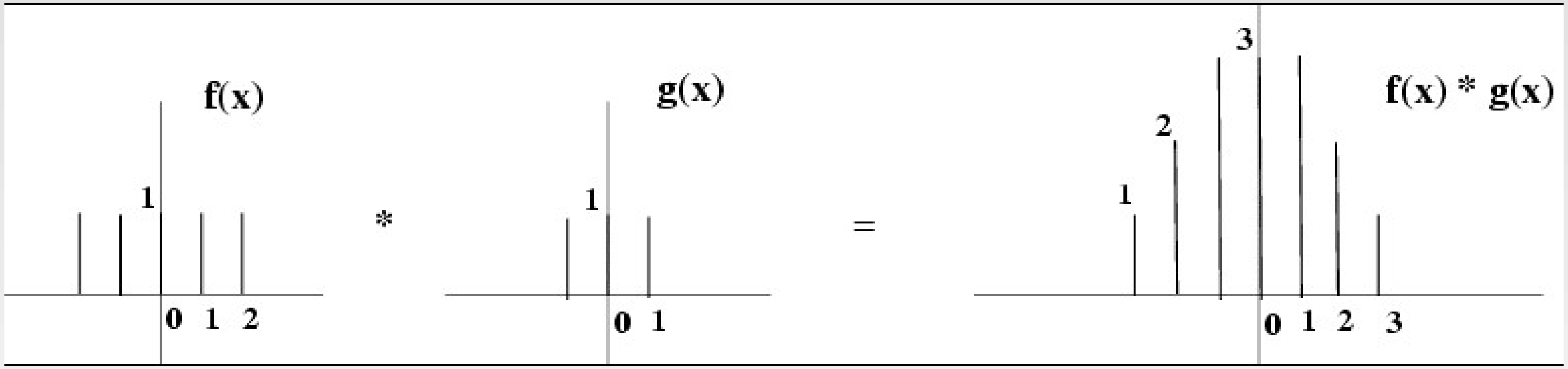
Convolução discreta

1. A integral é substituída pela soma
2. A variável de integração se torna um índice
3. Os deslocamentos ocorrem segundo incrementos discretos

$$f(x) * g(x) = \sum_m f(m)g(x-m), \quad 0 < x < M-1$$

Transformada de Fourier 2D discreta

Exemplo



Seqüências de entrada: $\{f(0), f(1), \ldots, f(A-1)\}, \{g(0), g(1), \ldots, g(B-1)\}$

Comprimento da seqüência de saída: $M = A+B-1$

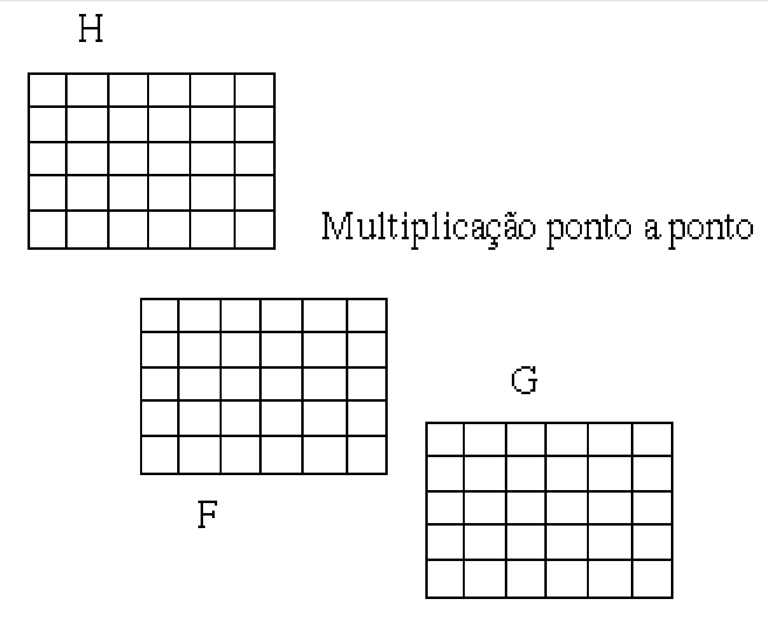
Filtros no domínio da freqüência

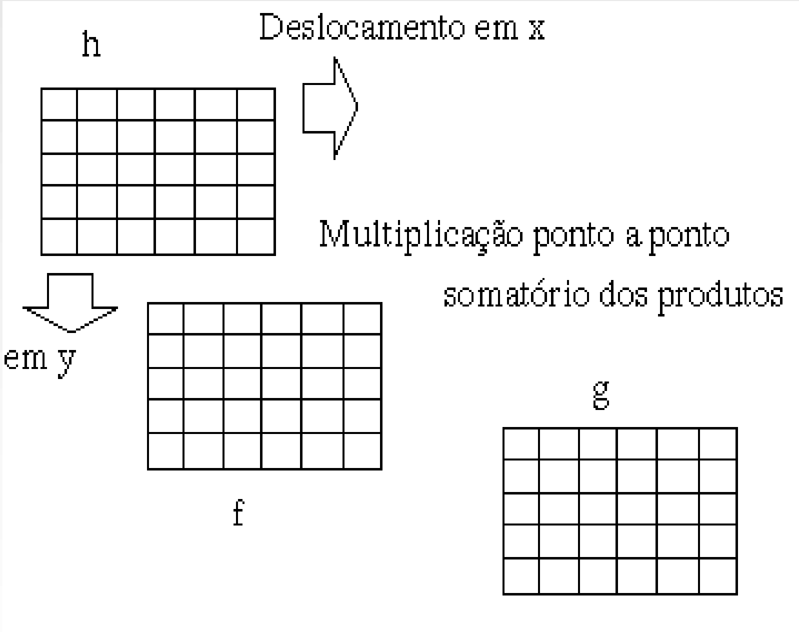
- Domínio da freqüência

$G(u,v) = H(u,v)\ F(u,v)$

- Domínio espacial

$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$





Filtros no domínio da freqüência

- **Filtro Passa-baixa**

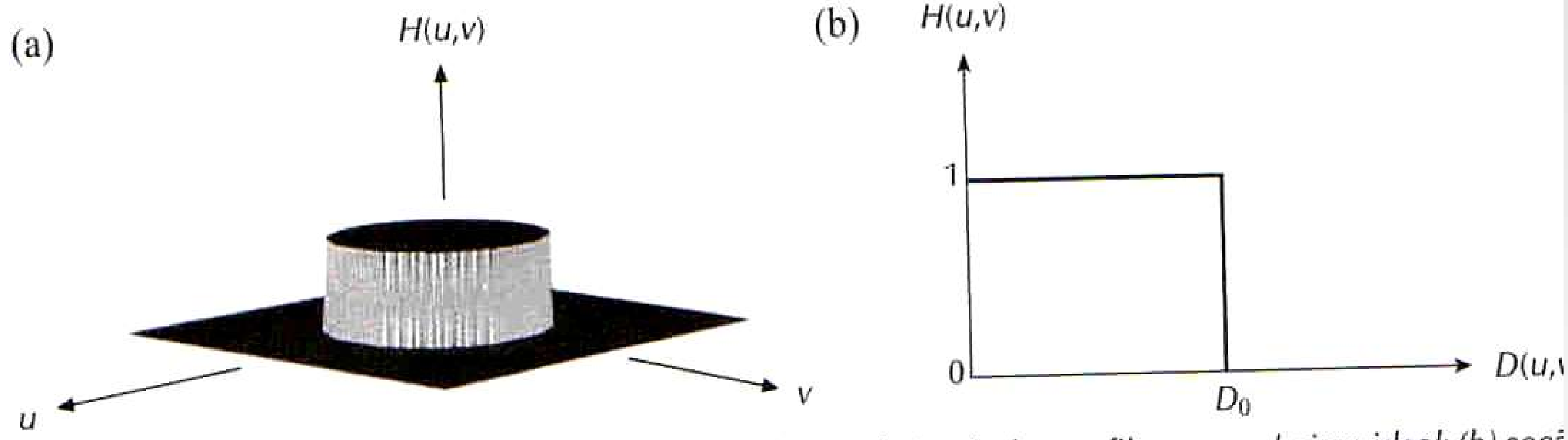


Figura 4.30 — (a) Gráfico em perspectiva da função de transferência de um filtro passa-baixas ideal; (b) seçã transversal do filtro.

Filtro Passa-baixas

- Filtro Passa-baixa Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- u, v são coordenadas de freqüência

$$D(u,v) = (u^2+v^2)^{1/2}$$

Filtro Passa-baixas

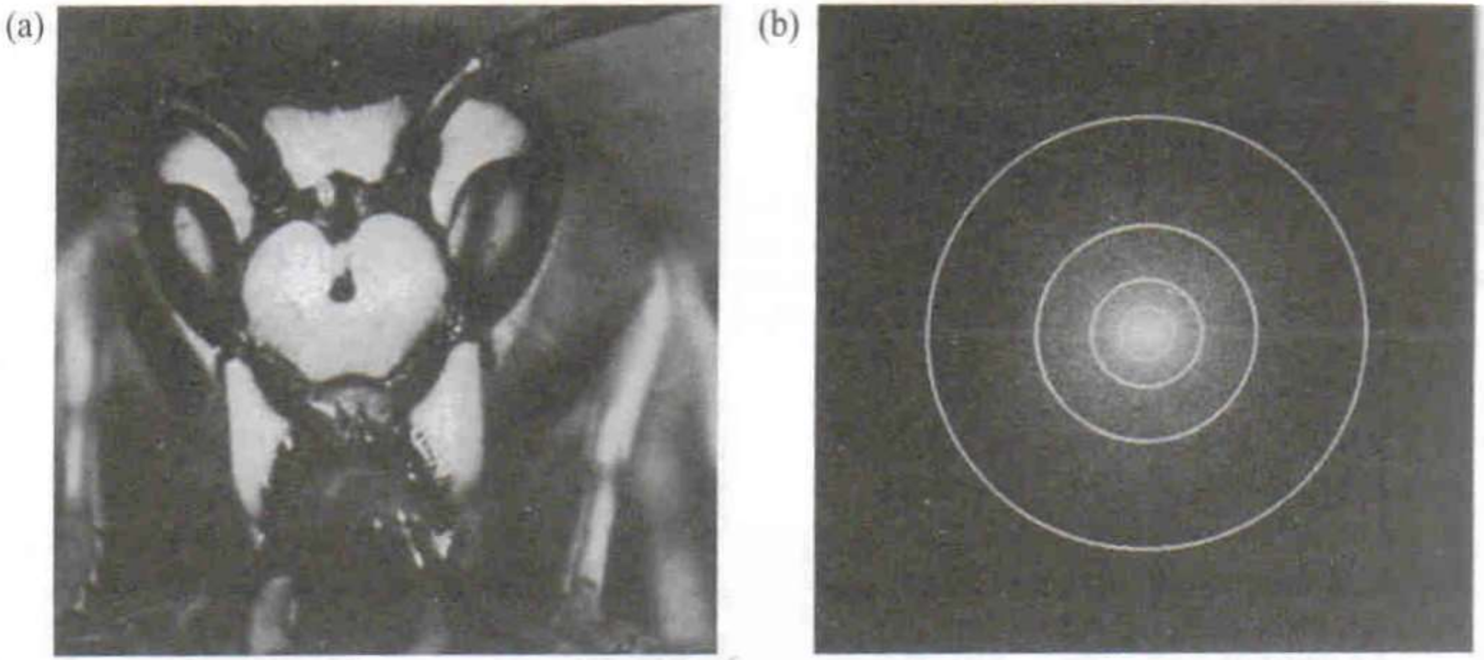


Figura 4.31 *(a) Imagem 512 × 512 e (b) seu espectro de Fourier. Os círculos superpostos, com raios iguais a 8, 18, 43, 78 e 152, incluem 90, 93, 95, 99 e 99,5% da potência da imagem, respectivamente.*

Filtro Passa-baixas

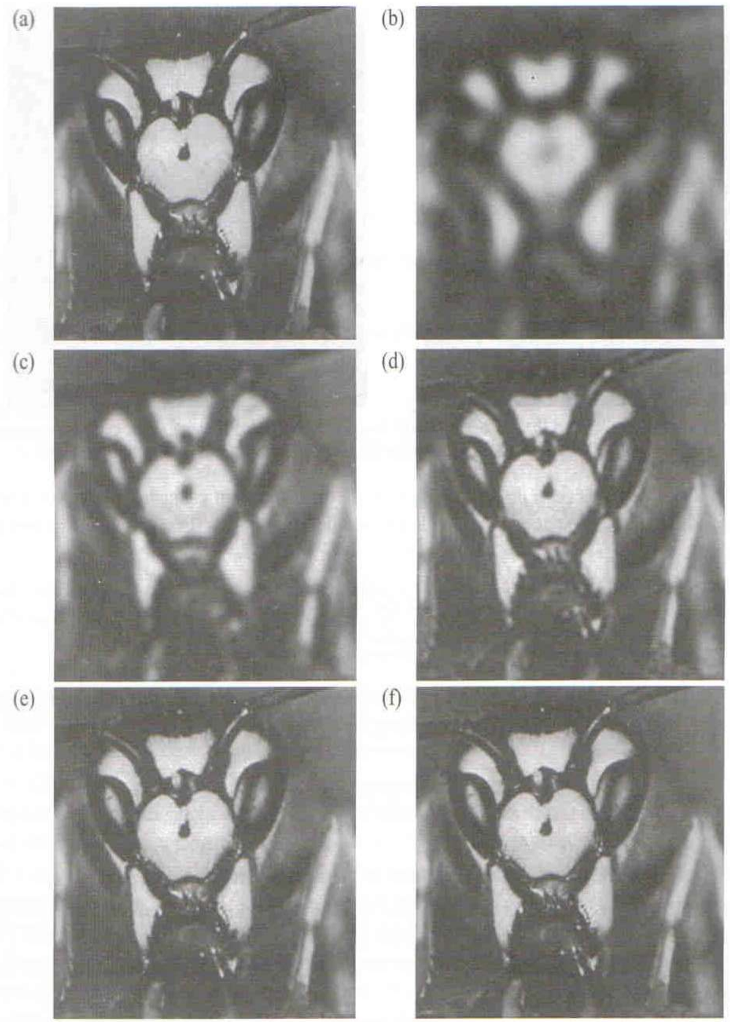


Figura 4.32 — *(a) Imagem original; (b)-(f) resultados da filtragem passa-baixas ideal com freqüências de corte correspondendo aos raios da Fig. 4.31(b).*

Filtro Passa-baixas

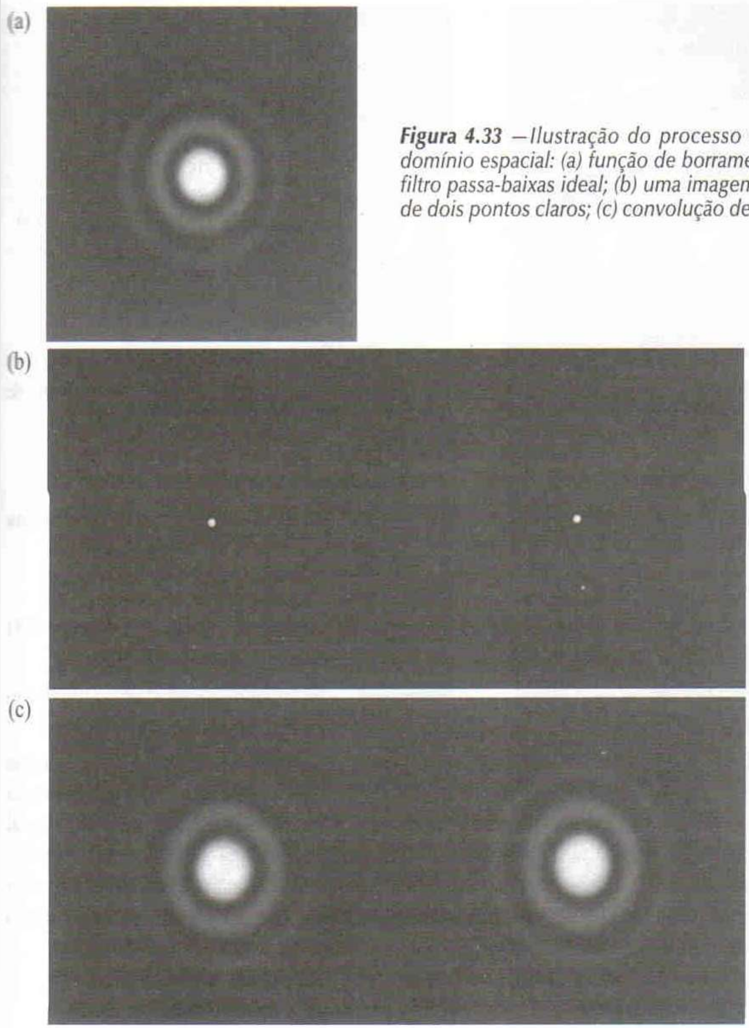


Figura 4.33 — *Ilustração do processo de borramento no domínio espacial: (a) função de borramento h(x, y) para um filtro passa-baixas ideal; (b) uma imagem simples composta de dois pontos claros; (c) convolução de h(x, y) e f(x, y).*

Fitro de Butterworth passa-baixas

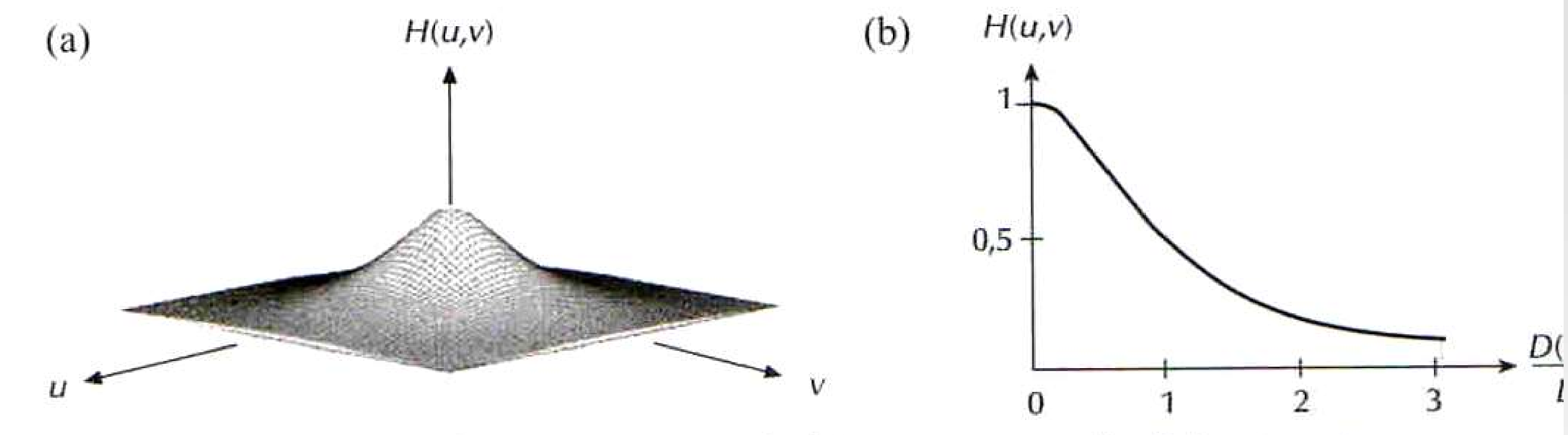


Figura 4.34 — (a) Filtro passa-baixas de Butterworth; (b) seção transversal radial para n = 1.

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1]\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0,414\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

Fitro de Butterworth passa-baixas

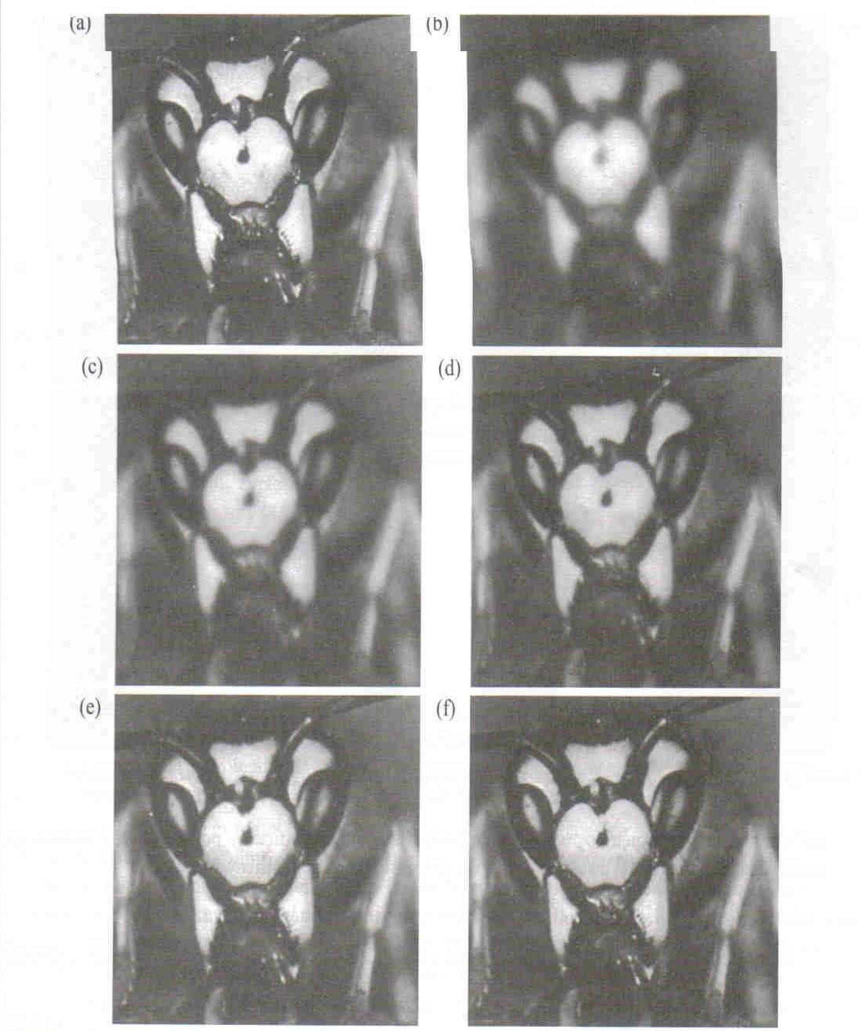


Figura 4.35 — *(a) Imagem original; (b)-(f) resultados da filtragem passa-baixas de Butterworth com o ponto d corte definido pelos raios mostrados na Fig. 4.31(b).*

Filtro Passa-altas

- Filtro Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Filtro de Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)\ ]^{2\mathrm{n}}}$$

Filtro Passa-altas

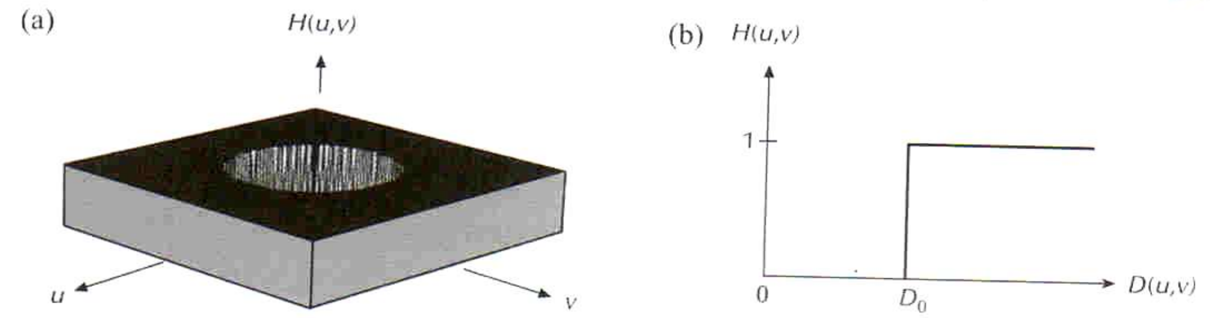


Figura 4.37 — Gráfico em perspectiva e seção transversal radial de um filtro passa-altas ideal.

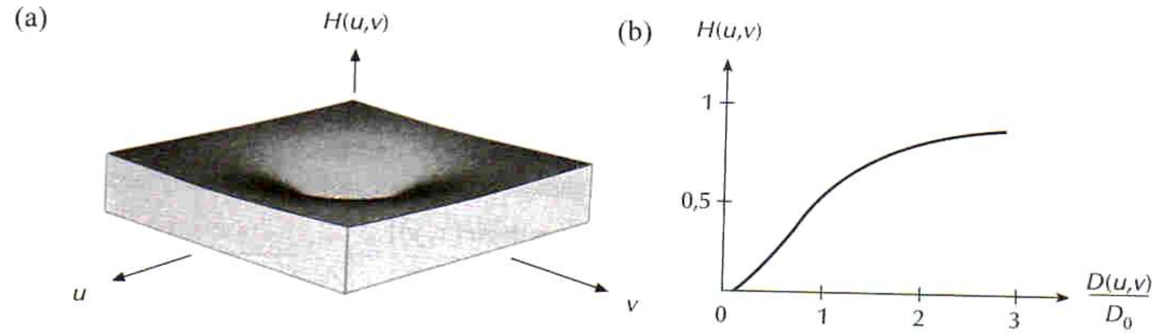


Figura 4.38 — Gráfico em perspectiva e seção transversal radial do filtro passa-altas de Butterworth para $n = 1$.

Filtro Passa-altas

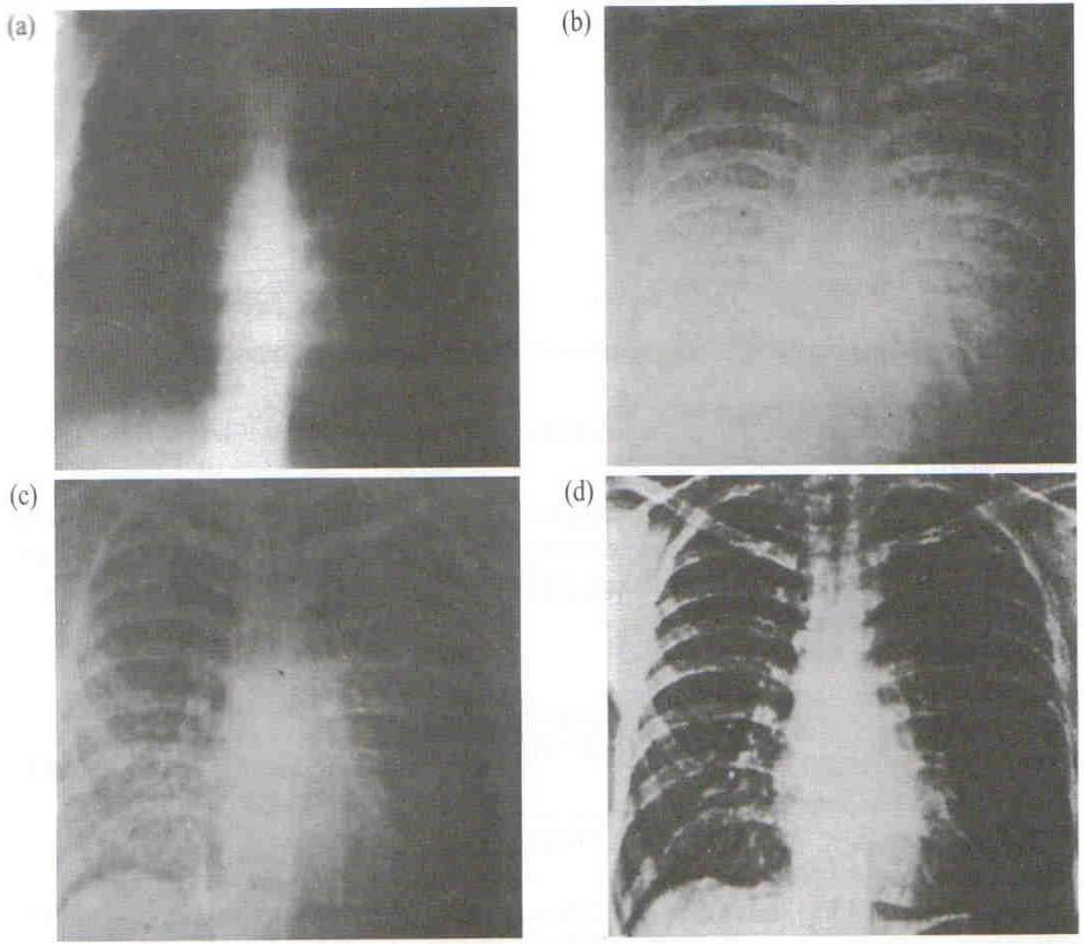


Figura 4.39 — *Exemplo de filtragem passa-altas: (a) imagem original; (b) imagem processada com filtro de Butterworth passa-altas; (c) resultado da enfatização de alta freqüência; (d) enfatização de alta freqüência e equalização de histograma [De Hall et al. (1971).]*

Filtragem homomórfica

- **Modelo de iluminação:**

$i \rightarrow$ iluminação; $r \rightarrow$ refletância

$$f(x,y) = i(x,y)\, r(x,y)$$

A transformada de Fourier não ajuda muito

$$\boldsymbol{F}\{\, f(x,y)\,\} \neq \boldsymbol{F}\{\, i(x,y)\,\}\, \boldsymbol{F}\{\, r(x,y)\,\}$$

Mas transformando *f* em *z*:

$$z(x,y) = \ln f(x,y)$$

$$= \ln i(x,y) + \ln r(x,y)$$

Filtragem homomórfica

É possível então separar as duas componentes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\{ z(x,y) \} &= \boldsymbol{F}\{\ln\ f(x,y) \} \\ &= \boldsymbol{F}\{\ln\ i(x,y) \} + \boldsymbol{F}\{\ln r(x,y) \} \end{aligned}$$

Então a variável Z é:

$$Z(u,v) = I(u,v) + R(u,v)$$

Supondo S a solução no espaço de Fourier:

$$\begin{aligned} S(u,v) &= H(u,v)Z(u,v) \\ &= H(u,v)I(u,v) + H(u,v)R(u,v) \end{aligned}$$

Filtragem homomórfica

E “s” no espaço direto:

$$s(x,y) = \boldsymbol{F}^{-1}\{\, S(u,v)\}$$
$$= \boldsymbol{F}^{-1}\{H(u,v)I(u,v)\} + \boldsymbol{F}^{-1}\{H(u,v)R(u,v)\}$$

Então a iluminação:

$$i'(x,y) = \boldsymbol{F}^{-1}\{H(u,v)I(u,v)\}$$

E a refletância:

$$r'(x,y) = \boldsymbol{F}^{-1}\{H(u,v)R(u,v)\}$$
$$s(x,y) = i'(x,y) + i'(x,y)$$

Filtragem homomórfica

E finalmente i_0 e r_0:

$$g(x,y) = exp[s(x,y)]$$
$$= exp[i'(x,y)].exp[r'(x,y)]$$
$$= i_0(x,y)\ r_0(x,y)$$

$$\mathbf{i_0(x,y) = exp[i'(x,y)]}$$
$$\mathbf{r_0(x,y) = exp[r'(x,y)]}$$

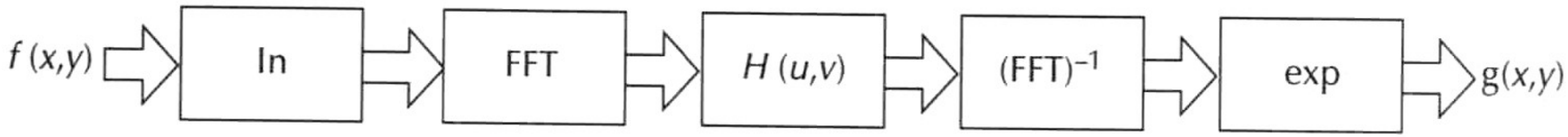


Figura 4.40 – Abordagem da filtragem homomórfica para realce de imagens.

Filtragem homomórfica

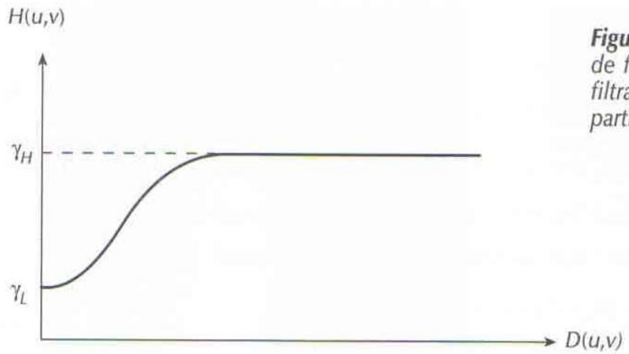


Figura 4.41 — Seção transversal de uma funçã de filtro circularmente simétrica para uso e filtragem homomórfica. *D(u, v)* é a distância partir da origem.

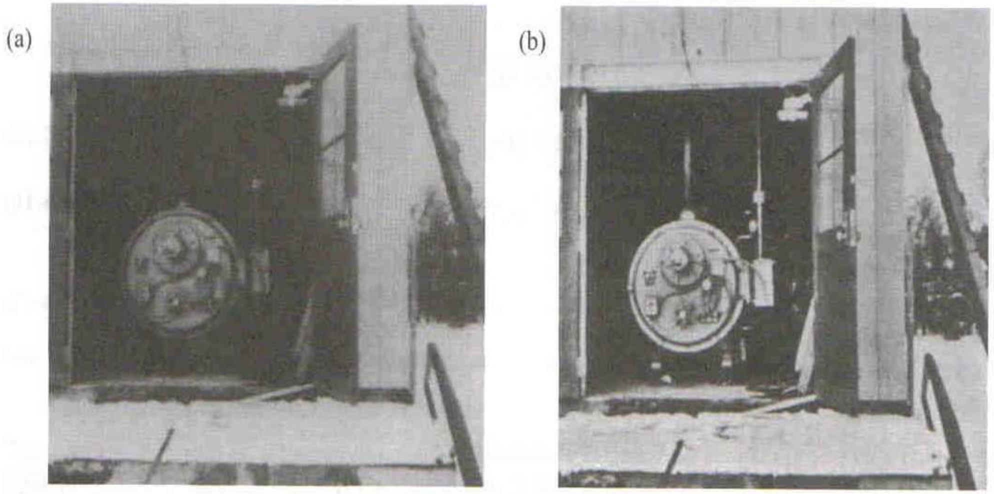


Figura 4.42 — (a) Imagem original; (b) imagem processada por filtragem homomórfica para alcançar compressã da escala dinâmica e realce do contraste simultâneos. (De Stockham [1972].)

Geração de máscaras espaciais

Equação do filtro no domínio da freqüência:

$$G(u,v) = H(u,v)\ F(u,v)$$

Filtro no domínio espacial:

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(x-i, x-k) f(i,k)$$

H é a transformada de Fourier de h:

$$H(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} h(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux+vy}{N}\right)}$$

Geração de máscaras espaciais

Se *h(x,y)* é restrito a zero para valores *x > n* e *y > n* , com *N > n*.

Máscara de convolução *h* de tamanho *n x n.*

$$\hat{H}(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{h}(x,y)\,e^{-j2\pi\left(\frac{ux+vy}{N}\right)}$$

O objetivo e encontrar os coeficientes *h(x,y)* que tenha menor erro:

$$e^2 = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[\hat{H}(u,v) - H(u,v)\right]^2$$

Geração de máscaras espaciais

Considerando o erro:

$$e^2 = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[\hat{H}(u,v) - H(u,v)\right]^2$$

A função de resposta estimada $\text{Type equation here}$.pode ser obtida como o produto da matriz de base pela função espacial:

$$\hat{H} = C\hat{h}$$

$$\hat{H}(u,v) = \hat{H}(i)$$

Geração de máscaras espaciais

$$\hat{h}(u,v) \Rightarrow \hat{h}(k) \qquad \frac{1}{N} e^{-j2\pi\left(\frac{ux+vy}{N}\right)} \Rightarrow \mathrm{C}(i,k)$$

Impondo a base de funções:

$$e^2 = \left(\hat{H} - H\right) \times \left(\hat{H} - H\right)$$

$$= \left\|\hat{H} - H\right\|^2$$

$$= \left\|C\hat{h} - H\right\|^2$$

Geração de máscaras espaciais

Fazendo a derivada do erro quadrático igual a zero:

$$\frac{\partial e^2}{\partial \hat{h}} = 2C \times \left(C\hat{h} - H\right)$$

Resulta no produto da matriz de base por *H*

$$\boxed{\hat{h} = \left(C * C^{-1}\right) C * H = C * H}$$

Geração de máscaras espaciais

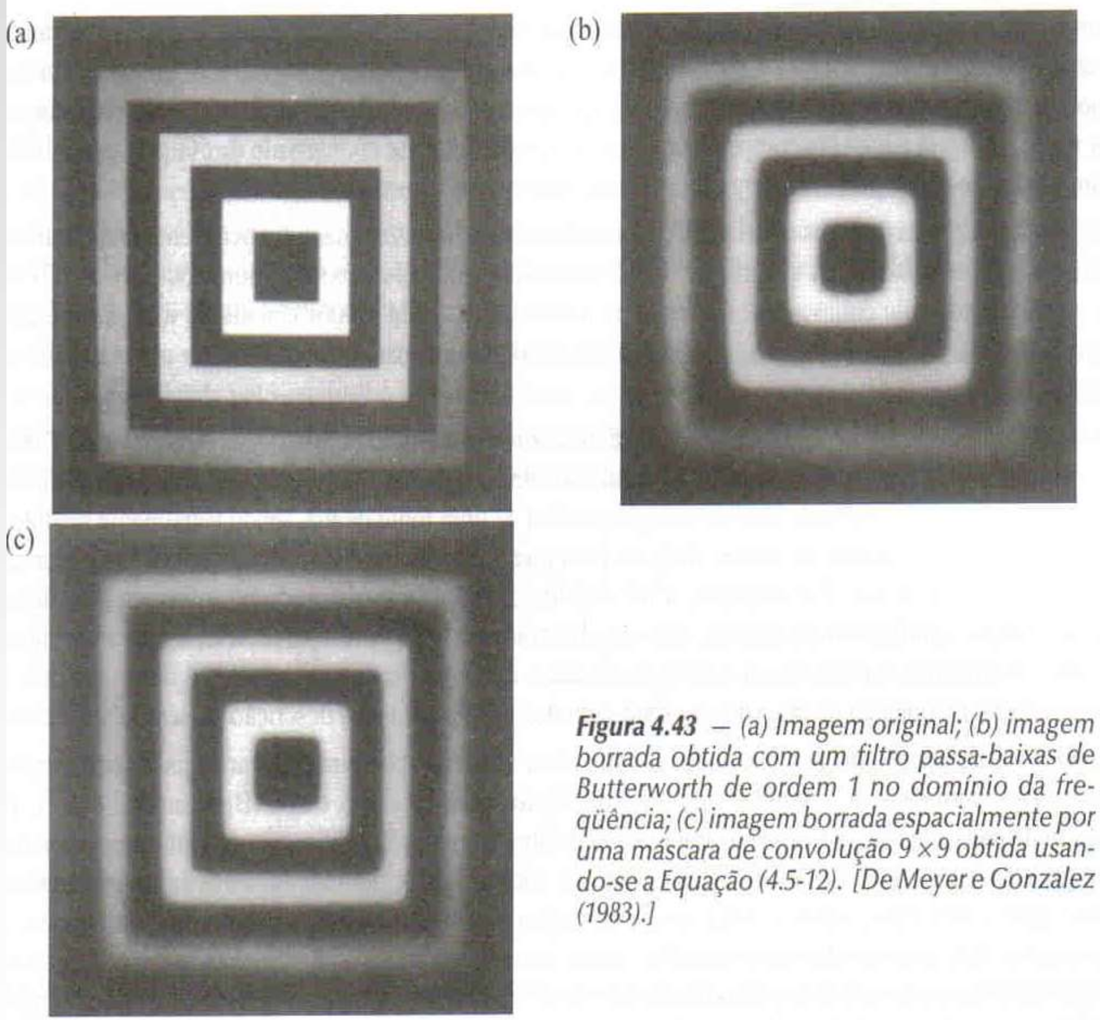


Figura 4.43 — (a) Imagem original; (b) imagem borrada obtida com um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 1 no domínio da freqüência; (c) imagem borrada espacialmente por uma máscara de convolução 9 × 9 obtida usando-se a Equação (4.5-12). [De Meyer e Gonzalez (1983).]

Restauração de imagens (introdução)

Modelo de degradação: