

Espaço de Fourier

Prof. Luiz Otavio Murta Jr.

Depto. de Física e Matemática (FFCLRP/USP)

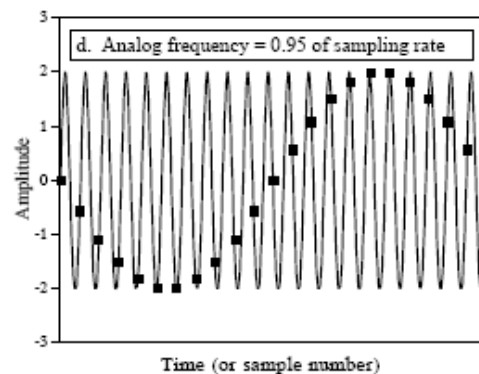
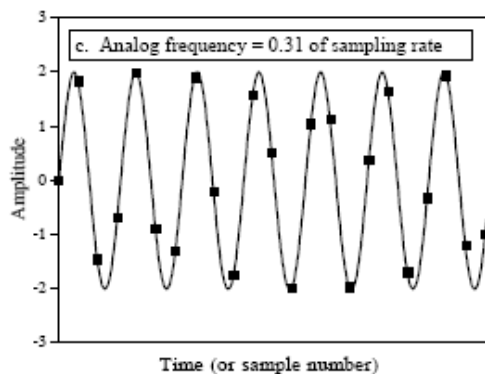
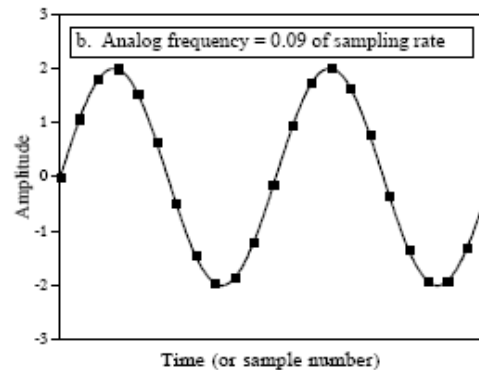
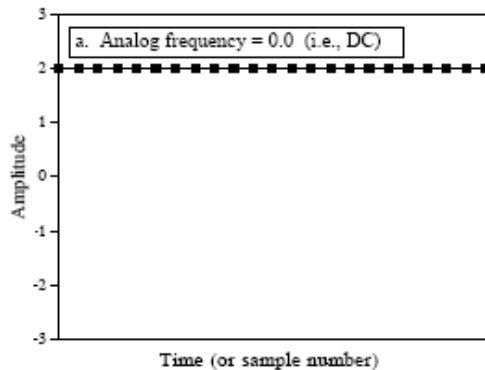
Teorema da Amostragem (Nyquist).

- O teorema da amostragem de Nyquist diz que devemos amostrar um sinal analógico (real) com uma taxa (frequência) de amostragem de, no mínimo, duas vezes a sua frequência para evitar o fenômeno de “aliasing”.

$$F_{amostragem} \geq 2 \times F_{sinal} .$$

- A frequência correspondente ao dobro da máxima frequência de um sinal é denominada taxa de amostragem de Nyquist.

“Aliasing”.



As figuras (a), (b) e (c) mostram amostragens corretas de três ondas senoidais. Em (c) não parece captar a forma de onda corretamente, apesar de cada período ser amostrado mais de duas vezes. Em (d), a frequência da onda senoidal analógica é maior que a frequência de Nyquist (metade da frequência de amostragem). Isto resulta em “aliasing”, onde a frequência do dado amostrado é diferente da frequência do sinal analógico, portanto o sinal não pode ser reconstruindo porque está corrompido

“Aliasing”.

Sub-amostragem

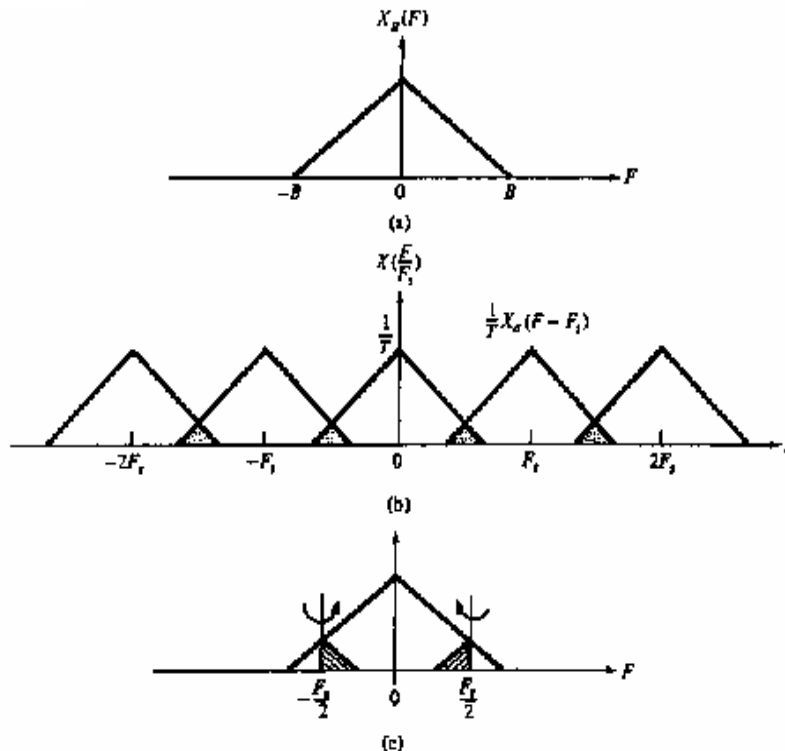


FIGURE 6.4 Illustration of aliasing around the folding frequency.

Quando ocorre “aliasing” devido a uma frequência de amostragem muito baixa, o efeito pode ser descrito por uma superposição errônea do sinal analógico em frequências acima da frequência de Nyquist.

Sinais Senoidais no Tempo Contínuo

- Uma oscilação harmônica é descrita matematicamente por:

- $x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty$

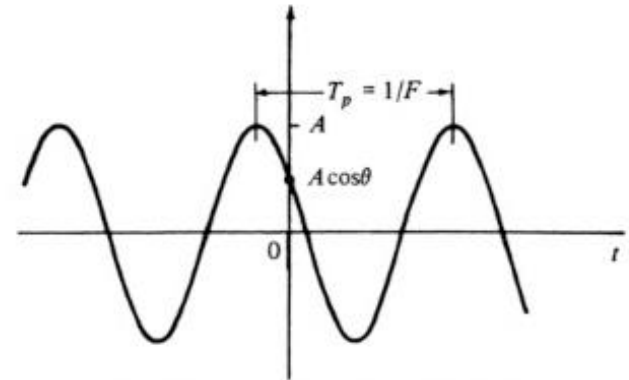
A is the *amplitude*

Ω is the *frequency* in radians per second (rad/s)

θ is the *phase* in radians.

- Instead of Ω , we often use the frequency F in cycles per second or hertz (Hz), where $\Omega = 2\pi F$ •

- In terms of F , $x_a(t)$ can be written as
 $x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta), \quad -\infty < t < \infty$



Example of an analog sinusoidal signal.

Este sinal é caracterizado por:

1. $x_a(t)$ é periódico
 - $x_a(t + T_p) = x_a(t)$
 - onde $T_p = 1/F$ é o período fundamental.
2. O aumento da frequência F resulta no aumento da taxa de oscilação dentro de um intervalo.

Sinais Senoidais no Tempo Discreto

Um sinal senoidal em tempo discreto pode ser escrito como:

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta)$$
$$-\infty < n < \infty$$

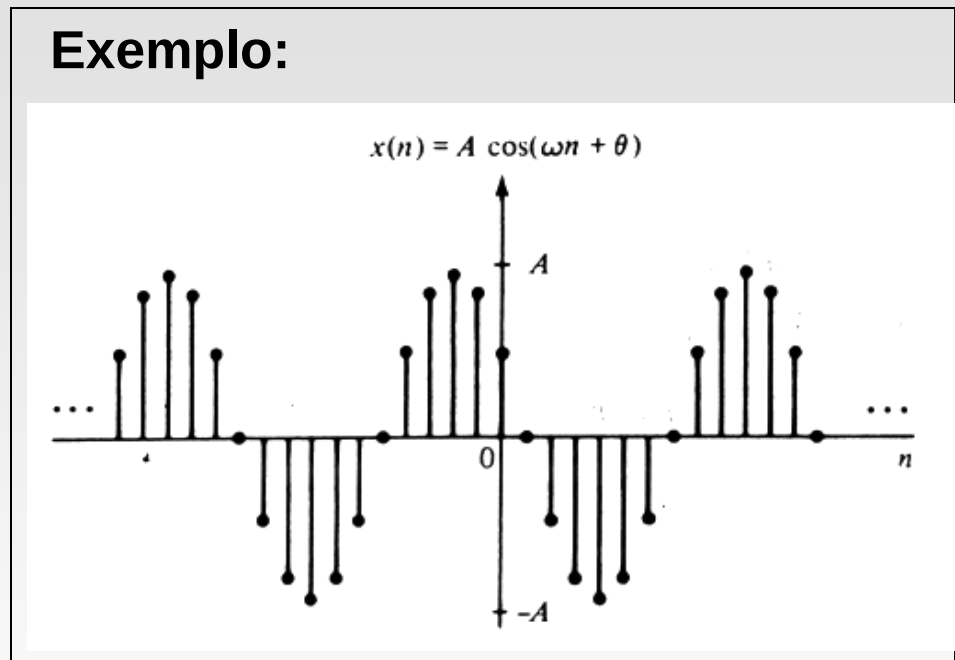
Uma senoide em tempo discreto é periódica somente se sua frequência f é um número racional

Definição: $x(n + N) = x(n)$ para todo n .

Exemplo:

$$\cos[2\pi f(N+n) + \theta] = \cos(2\pi f n + \theta)$$

Exemplo:



Exemplo de um sinal senoidal no tempo discreto
 $\omega = \pi / 6$ e $\theta = \pi / 3$

Sinais Senoidais no Tempo Contínuo

Senoides no tempo discreto onde suas frequências são separada por um número inteiro múltiplo de 2π são idênticas

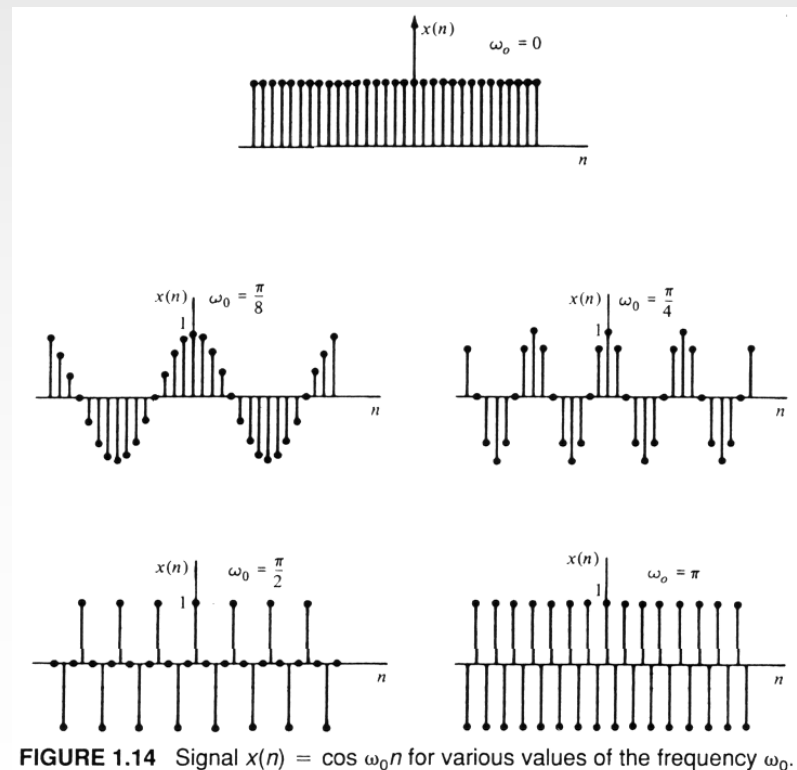
$$\cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos[\omega_0 n + 2\pi n + \theta]$$

A taxa de oscilação mais elevada de um sinal senoidal no tempo discreto é alcançada quando $\omega = \pi$ (ou $\omega = -\pi$) ou, equivalentemente $f = 1/2$ (ou $f = -1/2$).

frequências negativas para sinais senoidais no tempo discreto

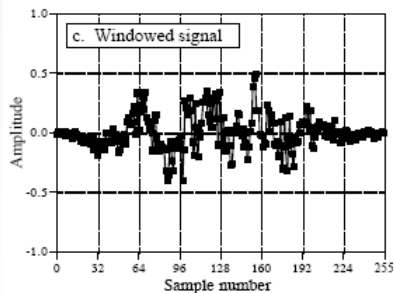
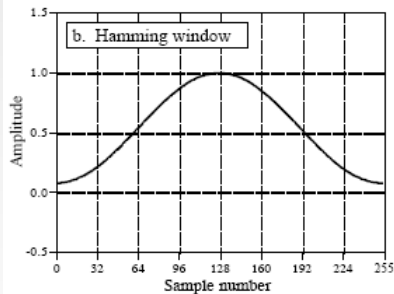
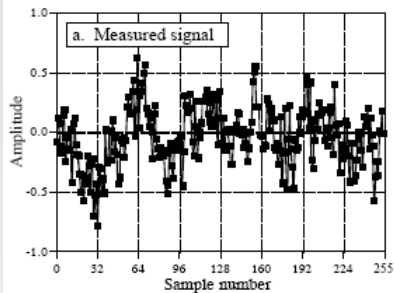
$$x(n) = A \cos[\omega n + \theta] = A/2 \cdot e^{j(\omega n + \theta)} + A/2 \cdot e^{-j(\omega n + \theta)}$$

A faixa de frequência é finita entre $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ($-1/2 \leq f \leq 1/2$).



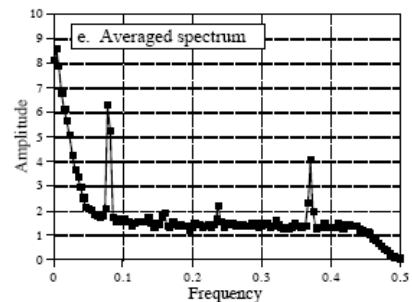
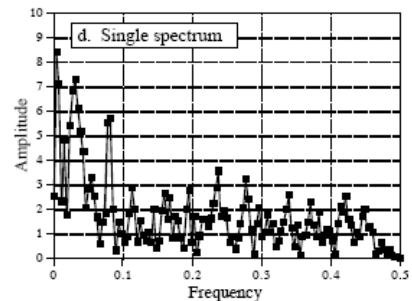
Domínio do Tempo e Freqüência.

Domínio do tempo



DFT

Domínio da freqüência



Transformada de Fourier.

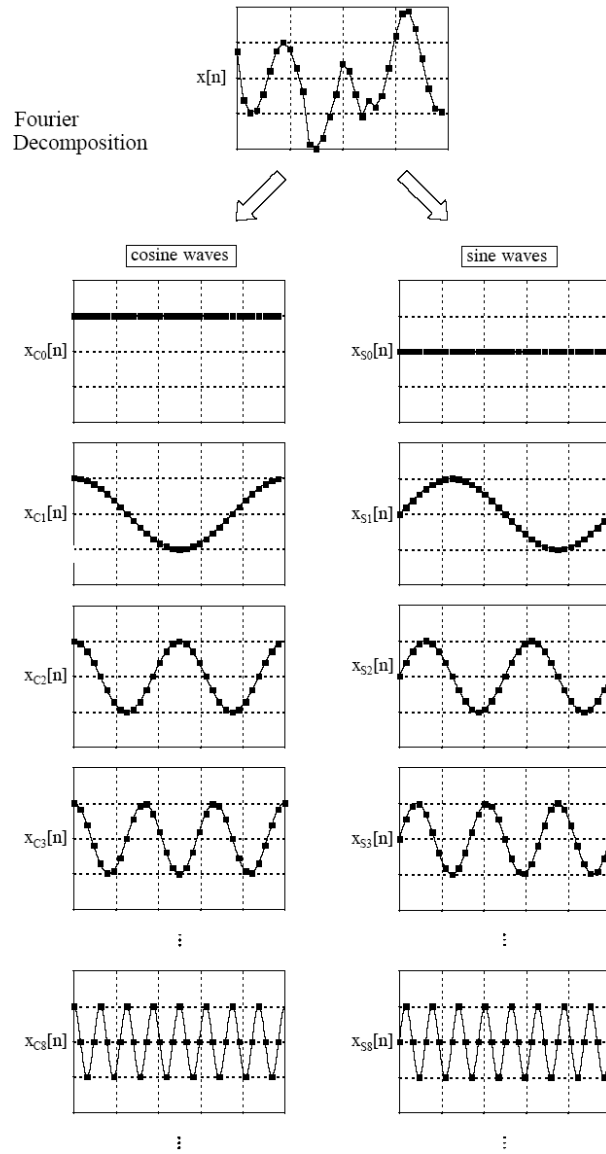
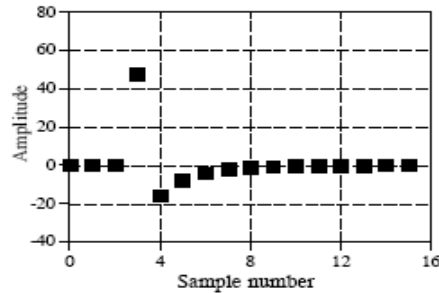


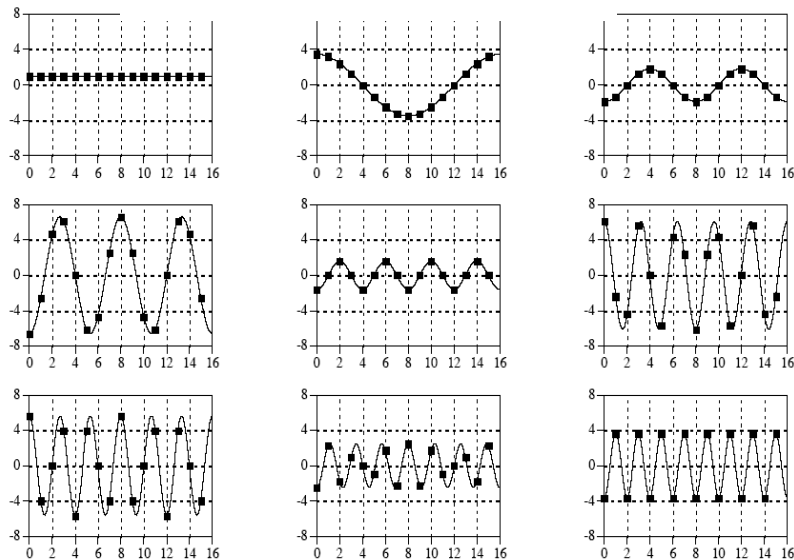
Ilustração da decomposição de Fourier. Um sinal de N pontos decomposto em $N+2$ sinais, cada um tendo N pontos. Metade destes sinais são senos e a outra metade são co-senos. As frequências são fixas, e as amplitudes são proporcionais às componentes de frequências.

Transformada de Fourier.

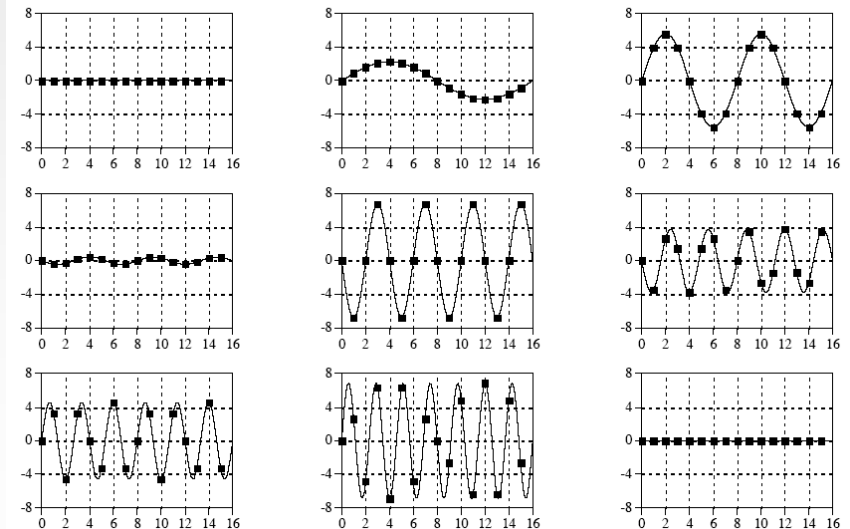


Exemplo de decomposição de Fourier. Um sinal de 16 pontos decomposto em 9 ondas seno e 9 ondas co-seno. A frequência de cada senoide e co-senoide é fixa, e a amplitude é dependente da amplitude da forma de onda para a dada frequência

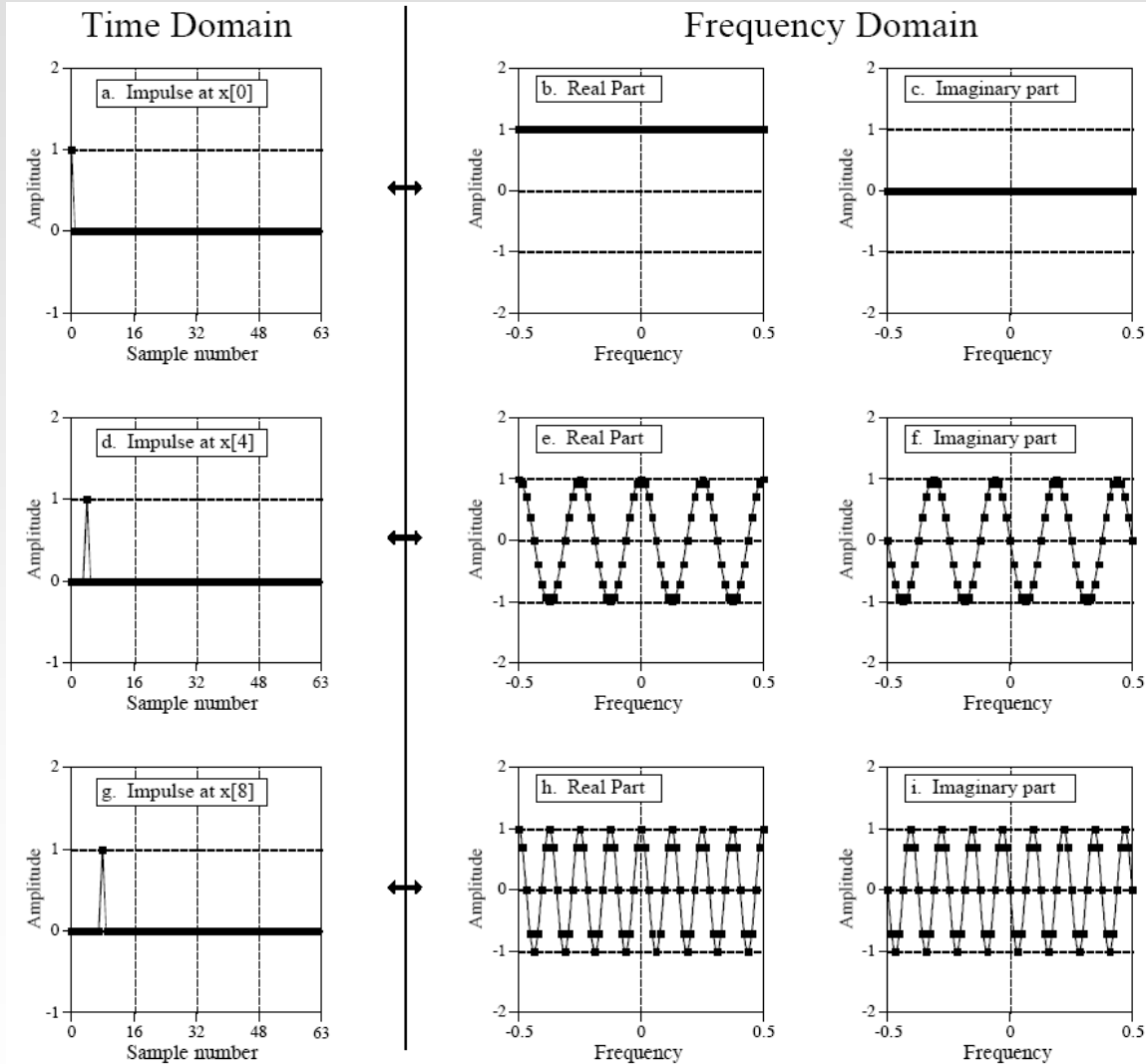
Cosine



Sine Waves

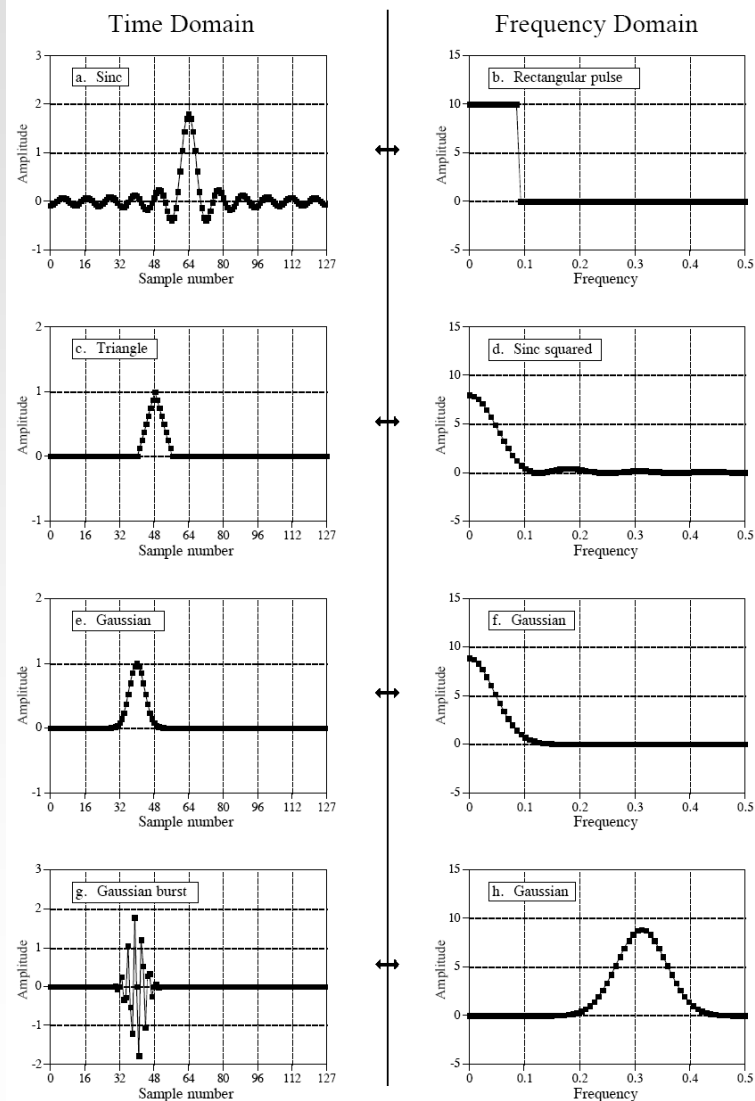


Transformada de Fourier.



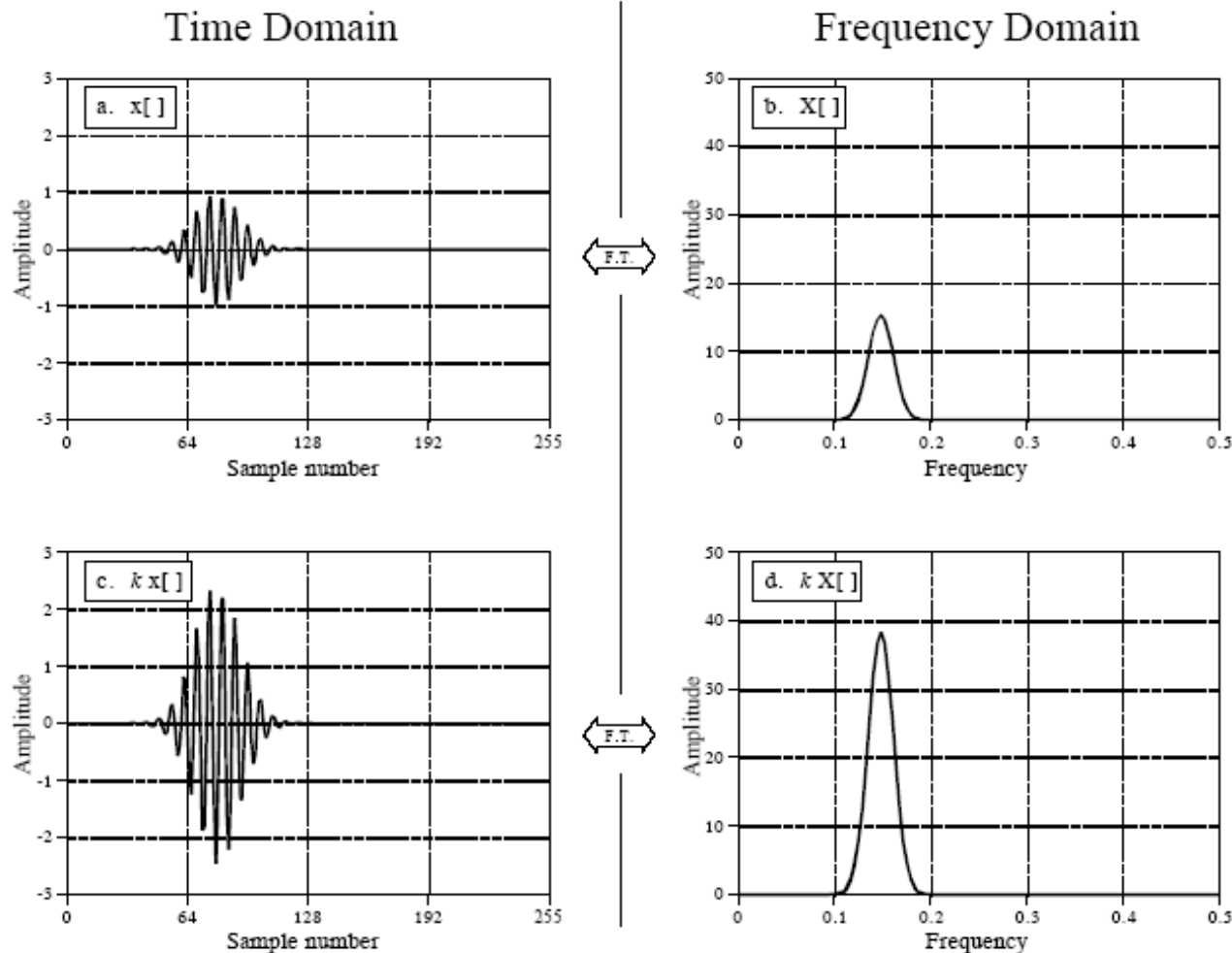
Funções deltas
(impulsos unitários)

Transformada de Fourier.



Transformada discreta de Fourier
exemplos

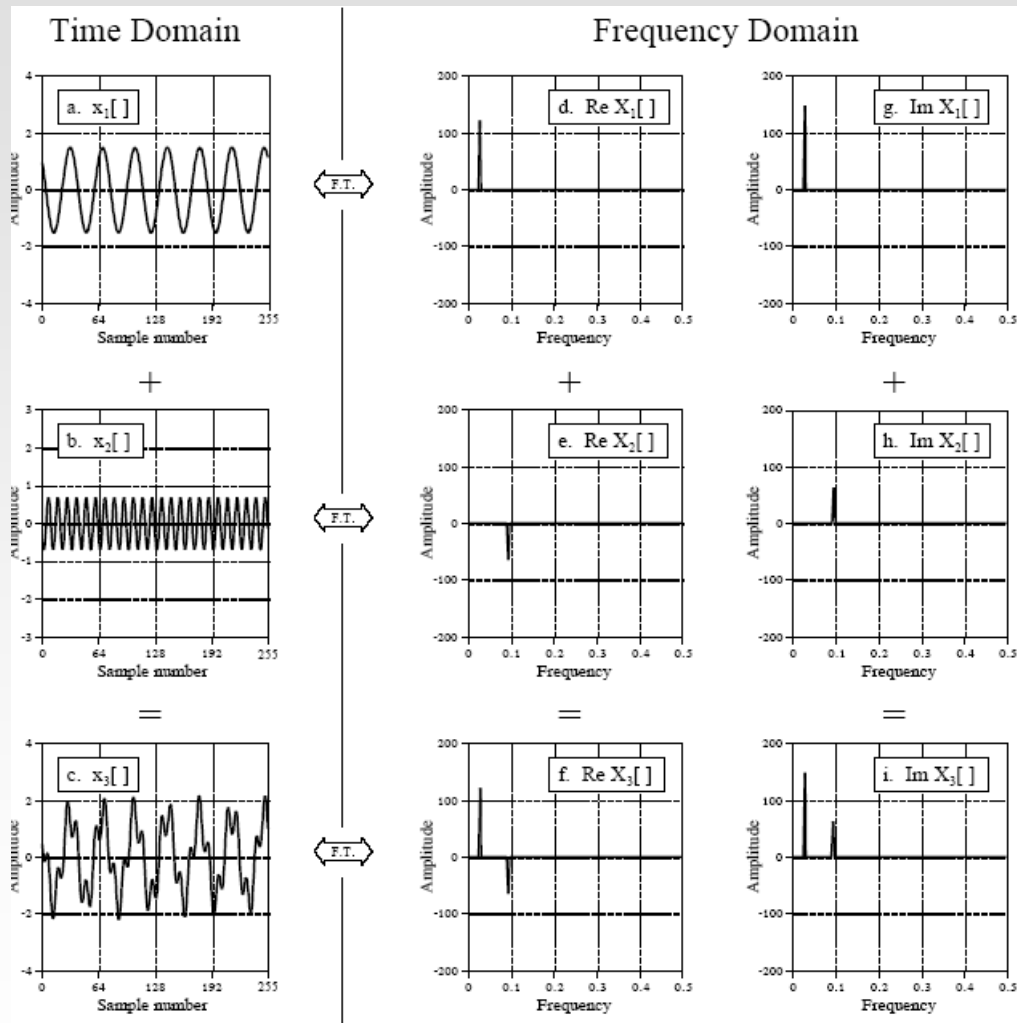
Domínio de Frequências (“frequency range”).



Homogeneidade da transformada de Fourier.

Se a amplitude é mudada em um domínio, é mudada também no outro domínio na mesma proporção. Em outras palavras, uma mudança de escala em um domínio corresponde a uma mudança de escala no outro domínio.

Domínio de Frequências (“frequency range”).

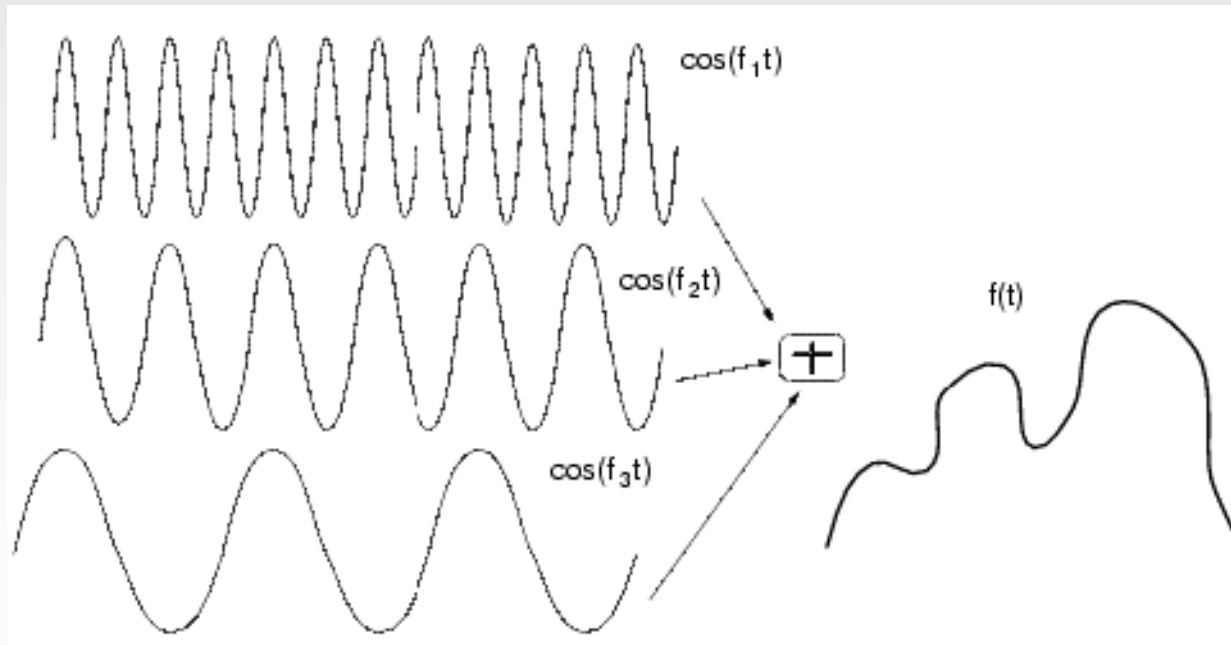


Soma da transformada de Fourier.

Somando-se dois ou mais sinais em um domínio resulta em uma soma correspondente no outro domínio. Nesta figura, os sinais no domínio do tempo (a) e (b) são somados para produzir o sinal em (c). Isto resulta na soma dos espectros.

Domínio de Freqüências (“frequency range”).

$$f(n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi k f_0 n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi k f_0 n)$$



Domínio de Frequências (“frequency range”).

Utilidades da Transformada de Fourier

- Remover frequências indesejáveis de um sinal
- Certas operações são executadas mais facilmente e com maior rapidez no domínio da frequência
- Filtragem de frequências indesejáveis
- A transformada de Fourier pode ser aproximada por uma soma de senos e cossenos

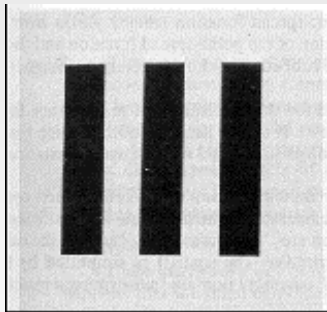
$$\exp[\pm j2\pi ux] = \cos(2\pi ux) \pm j \sin(2\pi ux)$$

- $F(u)$ é apenas uma função ponderada para as diferentes frequências presentes em $f(x)$
- Para remover certas frequências, ajuste os valores correspondentes de $F(u)$ para zero!!!

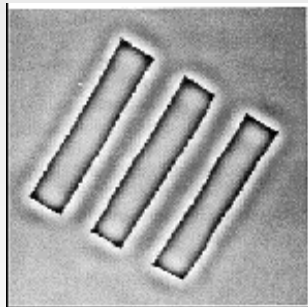
Domínio de Frequências (“frequency range”).

Como as frequências aparecem em uma imagem?

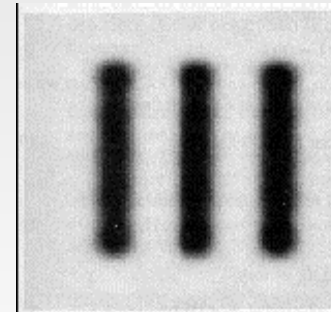
- Altas frequências: variações rápidas (ex. bordas)
- Baixas frequências: variações lentas (ex. superfícies contínuas)



Original



Filtro passa-alta



Filtro passa-baixa

Domínio de Frequências (“frequency range”).

Estendendo FT para duas dimensões

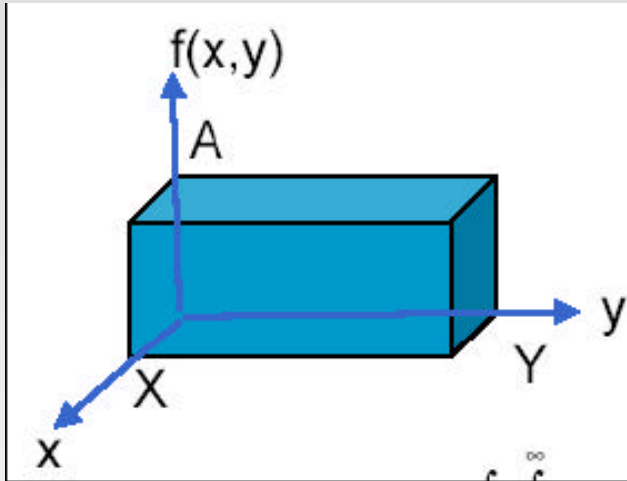
Transformada de Fourier

$$F[f(x, y)] = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Transformada inversa de Fourier

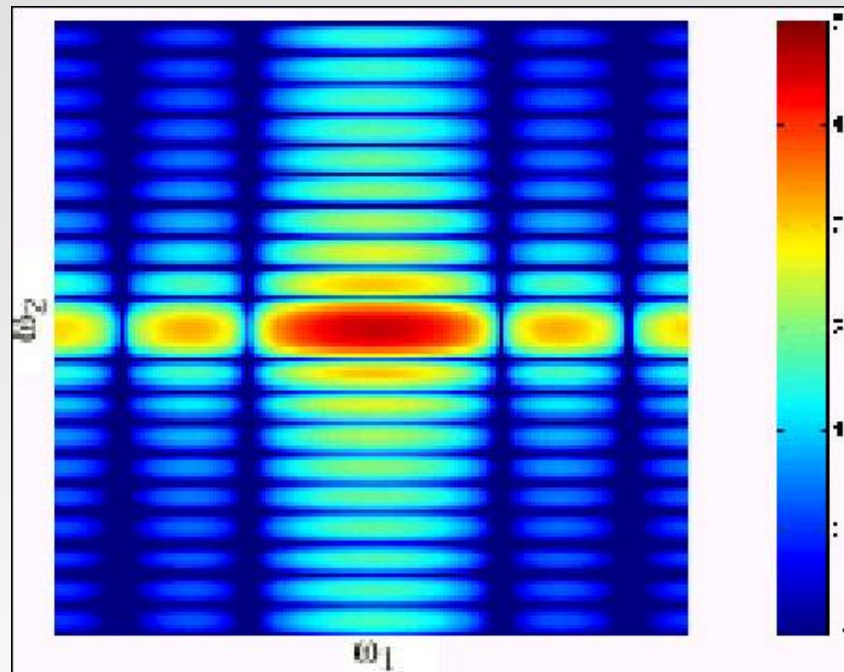
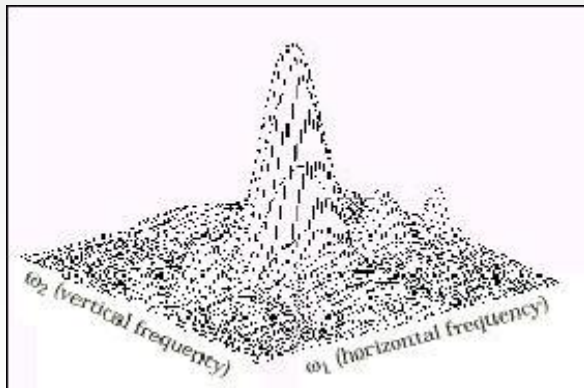
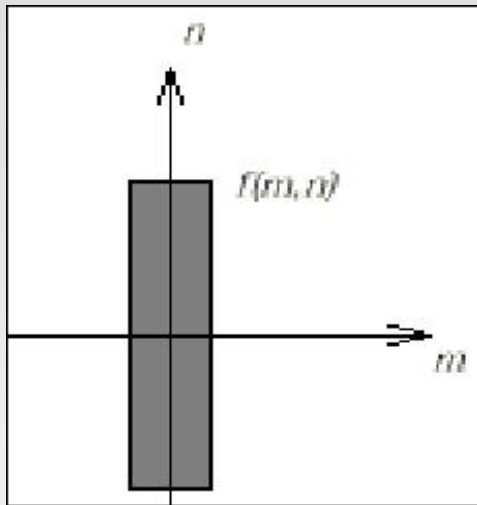
$$F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

Exemplo de Transformada de Fourier 2D

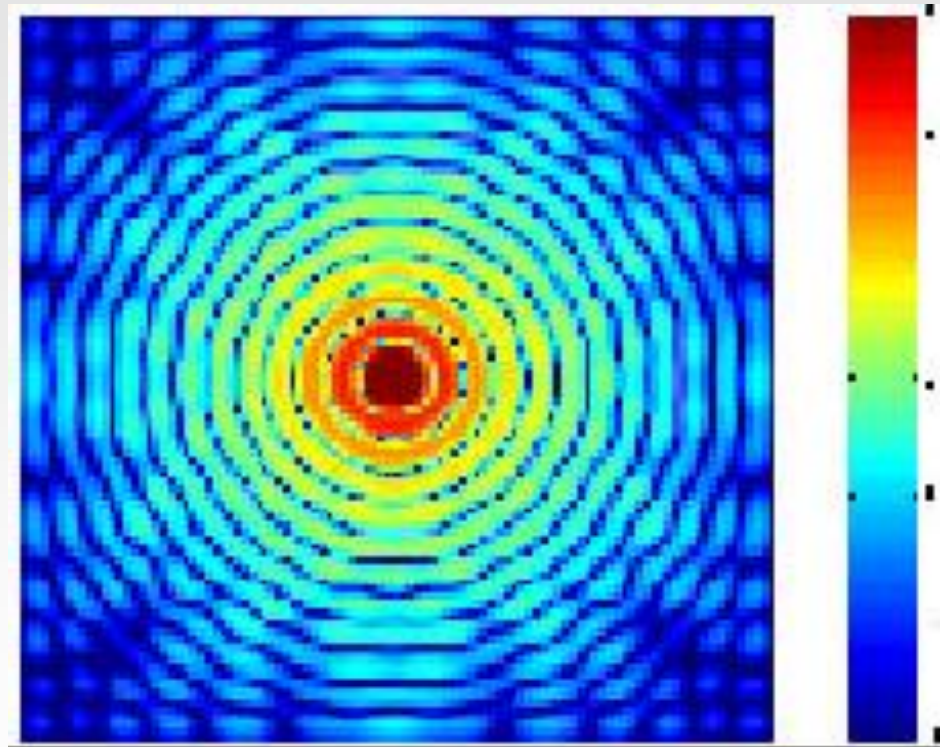
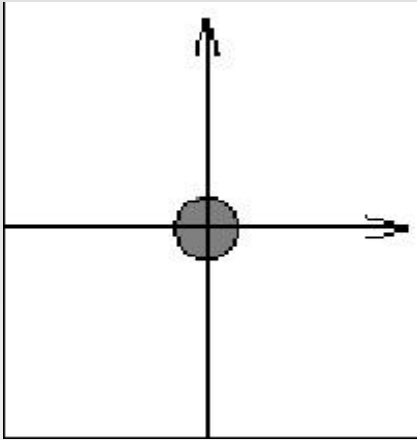


$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy &= A \int_0^X e^{-j2\pi ux} dx \int_0^Y e^{-j2\pi vy} dy \\ &= AXY \left[\frac{\sin \pi u X}{\pi u X} \right] \left[\frac{\sin \pi v Y}{\pi v Y} \right] e^{-j\pi(uX+vY)} \end{aligned}$$

Exemplo de Transformada de Fourier 2D



Exemplo de Transformada de Fourier 2D



Transformada Discreta de Fourier (DFT)

DFT:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi ux}{N}}; u = 1, \dots, N-1$$

DFT inversa:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j \frac{2\pi ux}{N}}; x = 1, \dots, N-1$$

$F(u)$ é discreta:

$$F(u) = F(u\Delta u); u = 0, 1, \dots, N-1; \Delta u = \frac{1}{\Delta x}$$

Transformada de Fourier 2D discreta

Estendendo a DFT para duas dimensões

DFT:
$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

DFT inversa:
$$f(x, y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

Assuma que $f(x, y)$ seja uma imagem $N \times N$

DFT:
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

DFT inversa:
$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

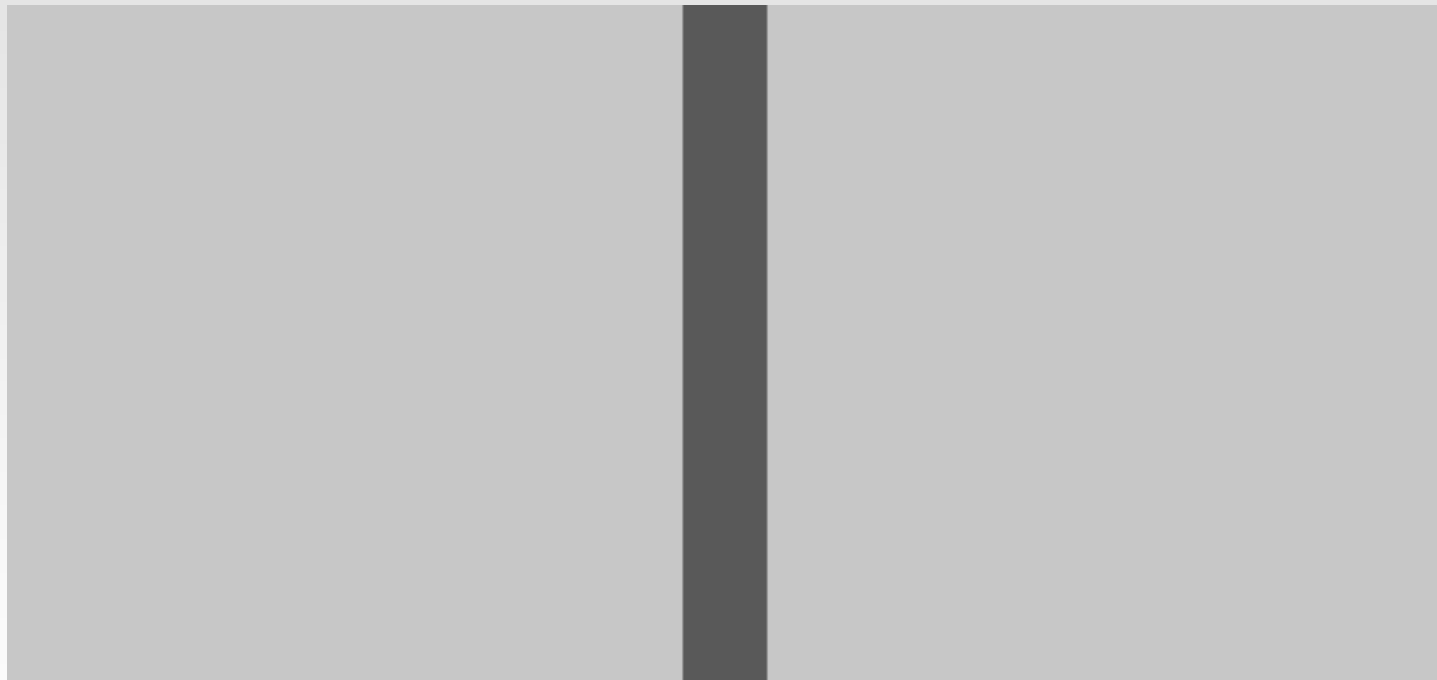
Exemplo de Transformada de Fourier 2D

Reconstrução com os primeiros coeficientes
(menores frequências)



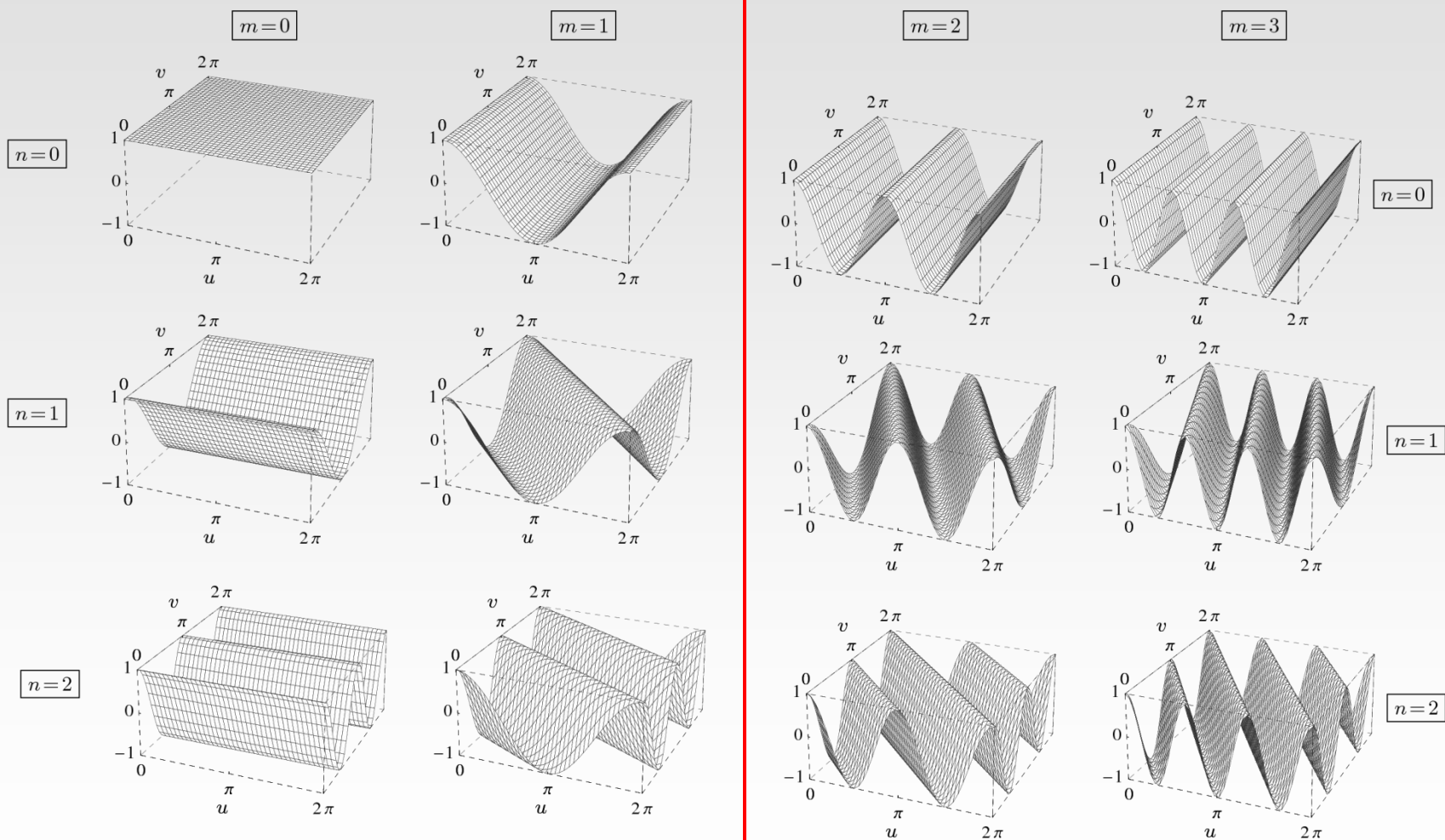
Exemplo de Transformada de Fourier 2D

Reconstrução com os 200 maiores coeficientes

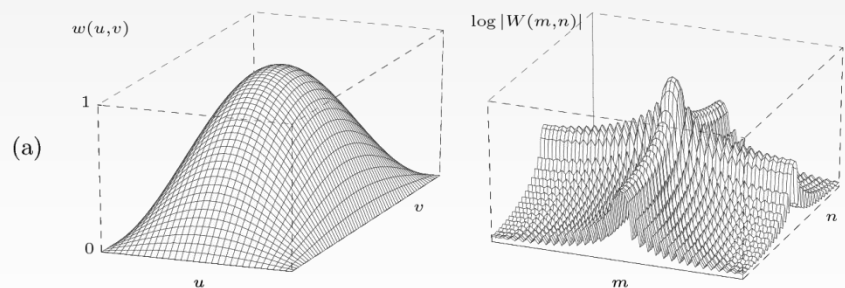
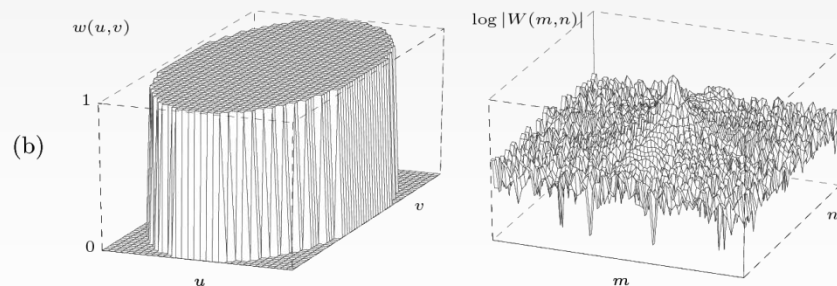
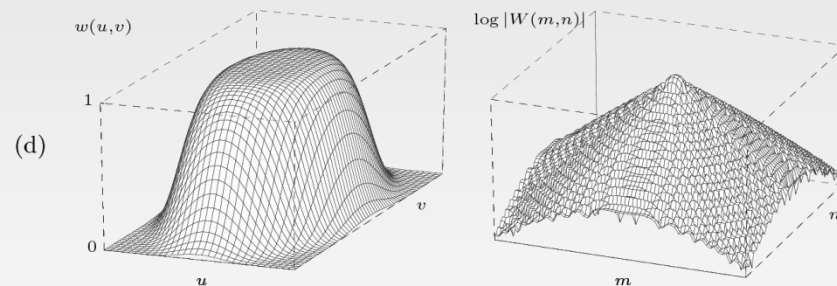
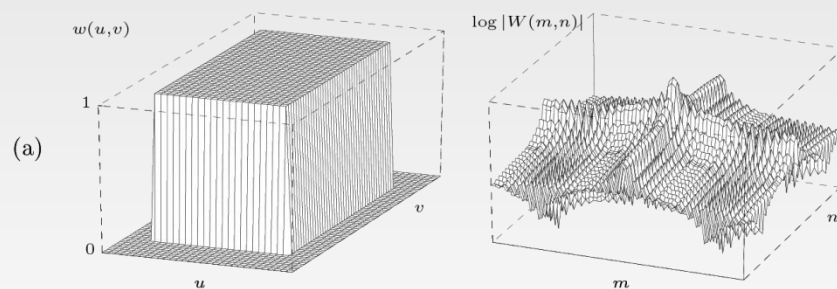
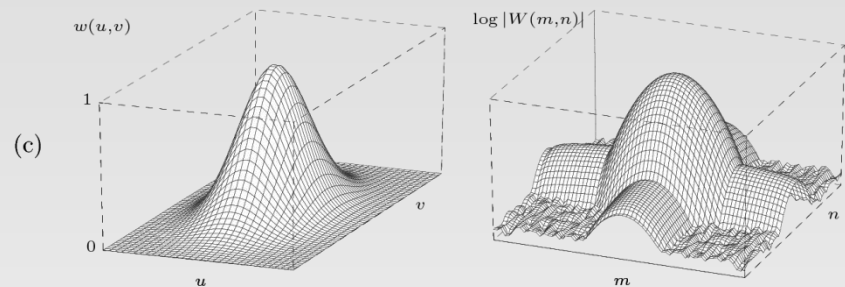
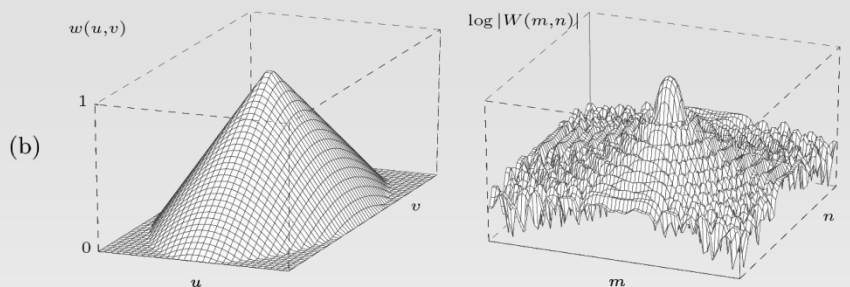


Exemplo de Transformada de Fourier 2D

Reconstrução (primeiros coeficientes)



Exemplos de Transformada de Fourier 2D



Transformada de Fourier 2D discreta

Propriedades – DFT 2D:

- Separabilidade
- Translação
- Escala
- Periodicidade e Simetria Conjugada
- Rotação
- Convolução

Transformada de Fourier 2D discreta

Separabilidade

A FT 2D pode ser calculada usando FTs 1D apenas!!

DFT:
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

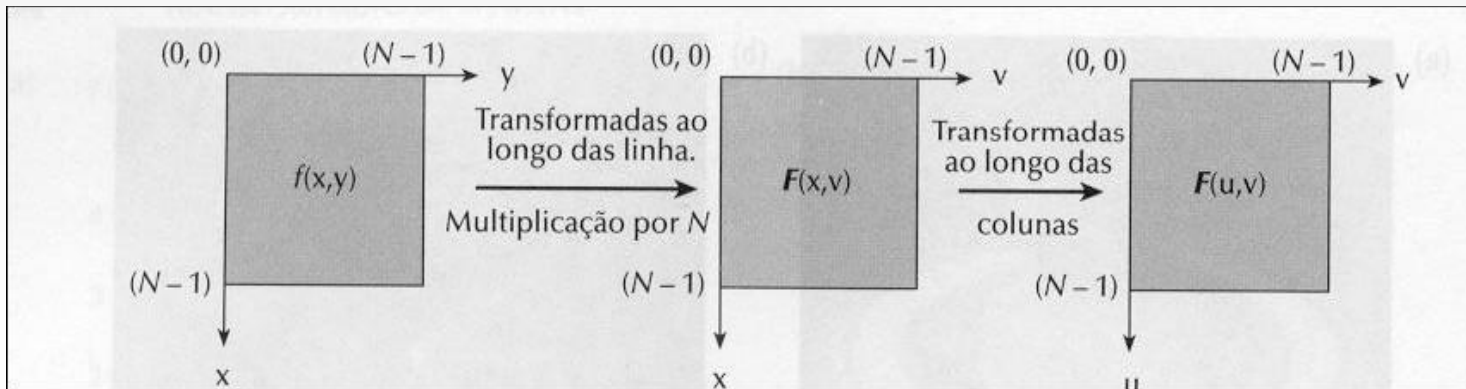
DFT inversa:
$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

$F(u, v)$ pode ser expressa em forma separável:
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{N} \right)} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{vy}{N} \right)}$$

Fazendo:
$$\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{vy}{N} \right)} = F(x, v)$$

, Temos:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{N} \right)} F(x, v)$$



Separabilidade

A DFT de uma matriz pode ser obtida através de

- Primeiro aplique a DFT-1D em cada linha (ou coluna)
- Em seguida aplique a DFT-1D em cada coluna (ou linha) no resultado do passo anterior

Na prática, se você for aplicar a mesma função nos dois passos, o resultado do primeiro passo deve ser transladado.

O resultado final deve ser transladado novamente.

Não importa a ordem da operação !

Transformada de Fourier 2D discreta

Visualizando DFT 2D com translação

$$f(x, y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0x+v_0y}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

e

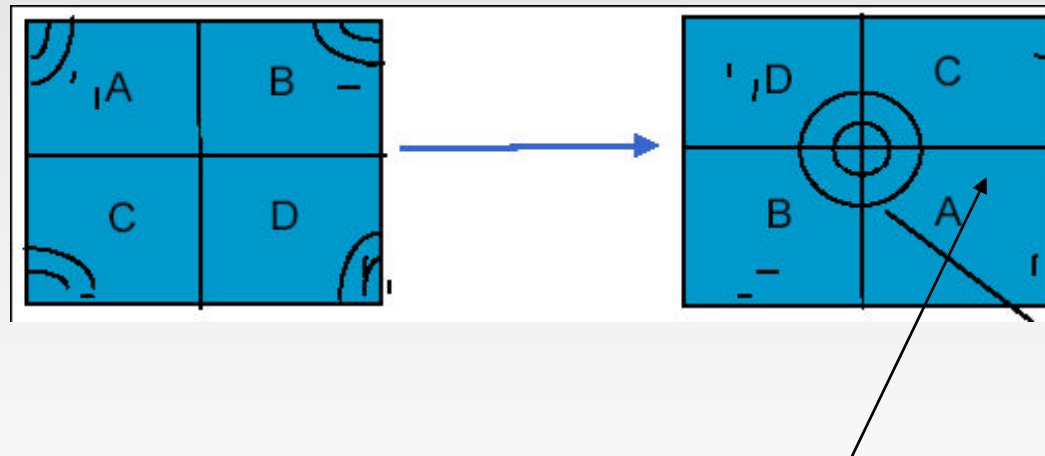
$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

A transformada original $F(u, v)$ pode ser deslocada para o centro da matriz quadrada ($N \times N$) multiplicando primeiro $f(x, y)$ por $(-1)^{x+y}$ e depois calculando a transformada de Fourier

O deslocamento não afeta a magnitude da transformada

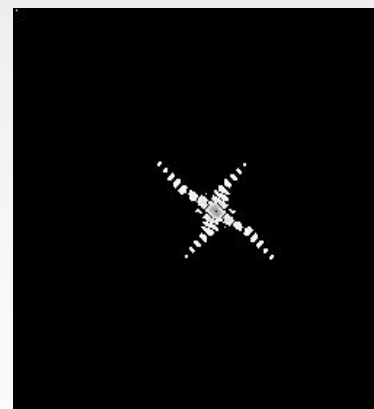
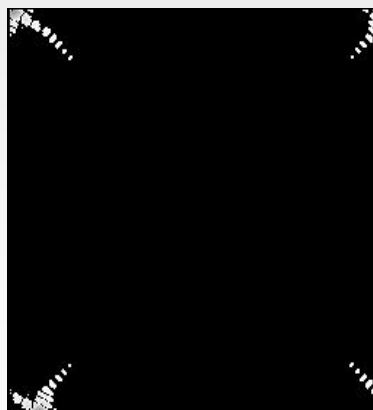
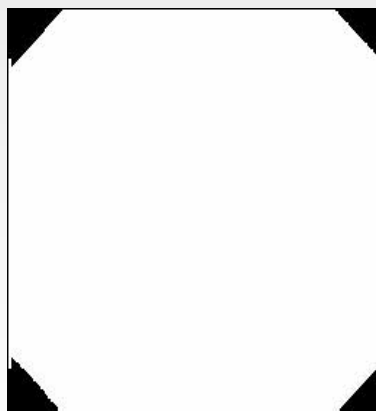
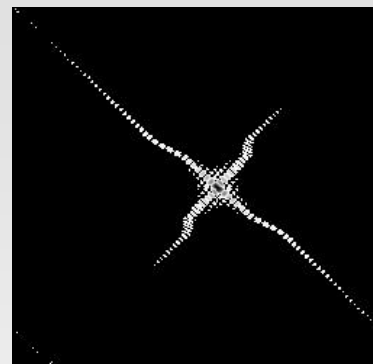
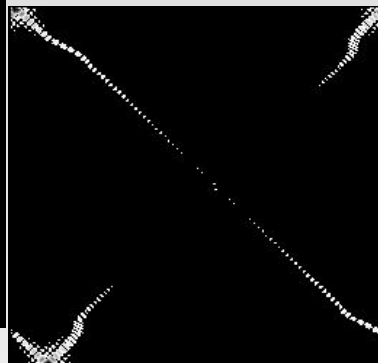
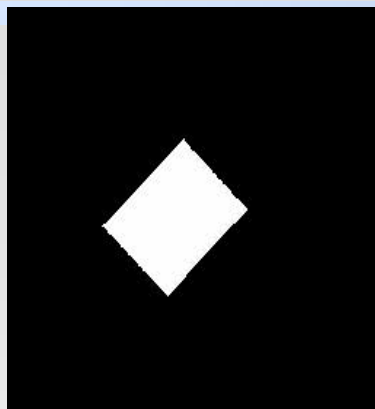
Transformada de Fourier 2D discreta

Visualizando DFT - translação



Componentes de baixa frequência

Transformada de Fourier 2D discreta



$f(x,y)$

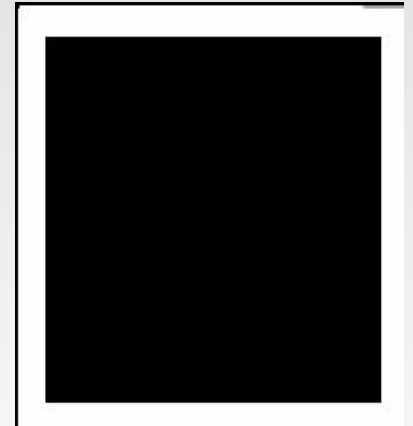
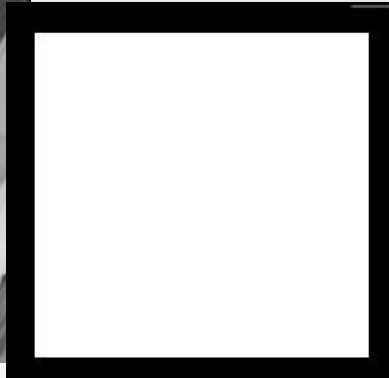
$|F(u,v)|$

$|F(f(x,y)(-1)^{(x+y)})| = |F(u - N/2, v - N/2)|$

Transformada de Fourier 2D discreta

Escala:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$



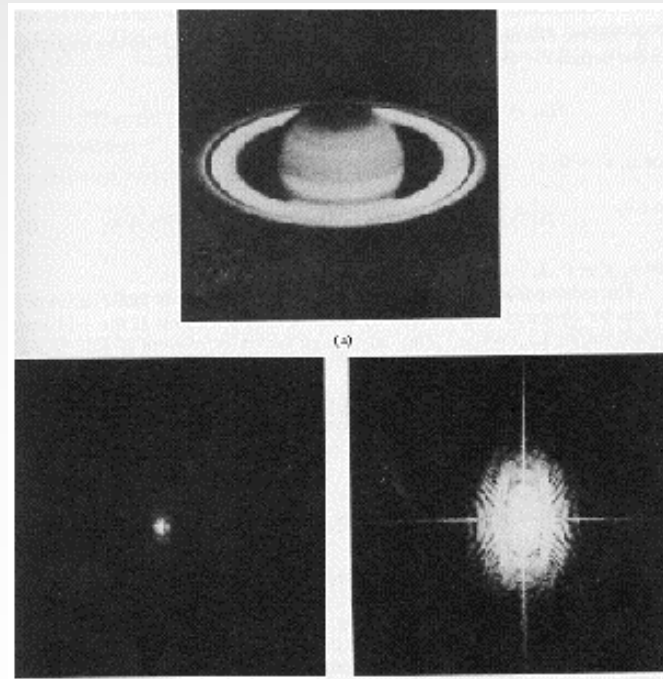
$$f(x, y)$$

$$F^{-1} \left(\begin{array}{l} |F(u, v)| \cos(\phi(u, v) + 180^\circ) \\ + j |F(u, v)| \sin(\phi(u, v) + 180^\circ) \end{array} \right)$$

Transformada de Fourier 2D discreta

Exibição do espectro de Fourier: translação + escala

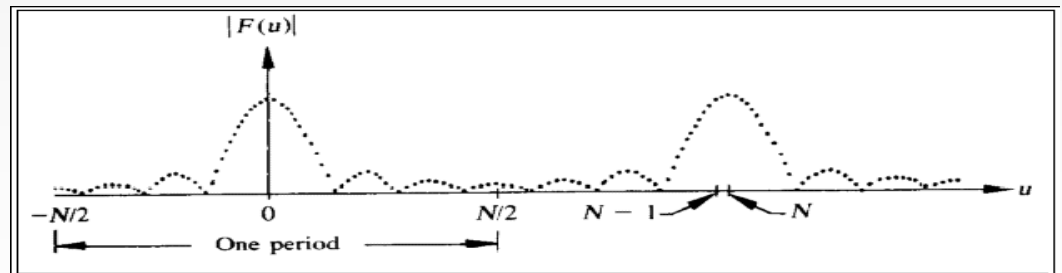
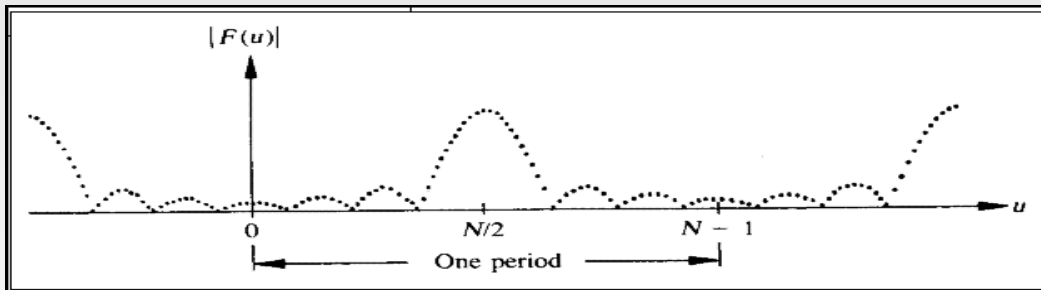
- será mostrada apenas a magnitude de $F(u,v)$ transladada
- a faixa da magnitude de $F(u,v)$ é muito grande $[0, 2.5 \times 10^6]$
- aplicar escala: $D(u,v) = c \cdot \log(1 + |F(u,v)|)$ (c é uma constante)



Transformada de Fourier 2D discreta

Periodicidade e Simetria Conjugada

A FT e sua inversa são periódicas com período N . Para exibir um período inteiro, é necessário mover a origem da transformada para o ponto $u=N/2$ (ou em $(N/2, N/2)$ no caso 2D)



Transformada de Fourier 2D discreta

Rotação

A rotação de $f(x,y)$ de Θ implica em uma rotação de $F(u,v)$ de Θ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \omega = \sqrt{u^2 + v^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$f(x, y) = f(r.\cos\theta, r.\sin\theta) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$g(x, y) = f(r.\cos(\theta + \theta_0), r.\sin(\theta + \theta_0))$$

$$F(g(x, y)) = G(u, v) = F(\omega.\cos(\phi + \theta_0), \omega.\sin(\phi + \theta_0))$$

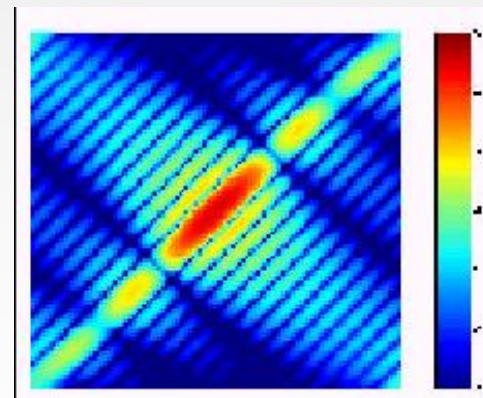
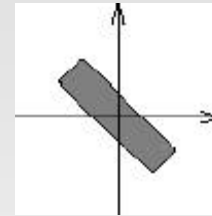
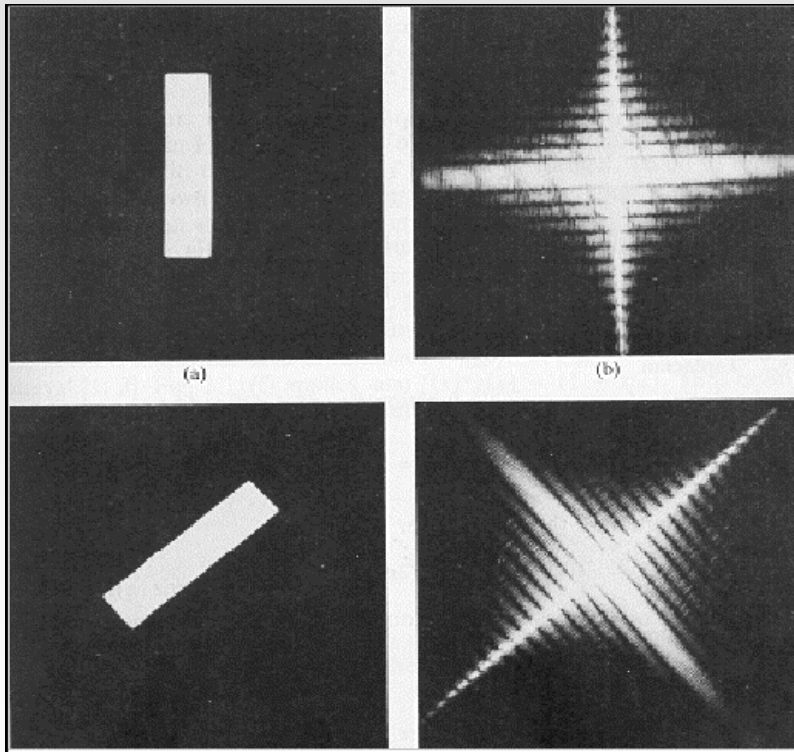
Distributividade

$$F[f(x, y)g(x, y)] \neq F[f(x, y)]F[g(x, y)]$$

$$F[f(x, y) + g(x, y)] = F[f(x, y)] + F[g(x, y)]$$

Transformada de Fourier 2D discreta

Rotação — Exemplo



Transformada de Fourier 2D discreta

Valor Médio

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0,0)$$

lembrando que:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

Transformada de Fourier 2D discreta

Convolução

- Definição

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

(note que $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$)

- Teorema da Convolução

$$f(x) * g(x) \leftrightarrow F(u) G(u)$$

(convolução no domínio direto significa multiplicação no domínio da frequência)

$$f(x) g(x) \leftrightarrow F(u) * G(u)$$

(multiplicação no domínio direto significa convolução no domínio da frequência)

Calculando $f * g$ com eficiência

1. Calcule: $F(f(x)) = F(u)$, e $F(g(x)) = G(u)$
2. Multiplique: $F(u)G(u)$
3. Calcule a FT inversa: $F^{-1}(F(u) G(u)) = f(x) * g(x)$

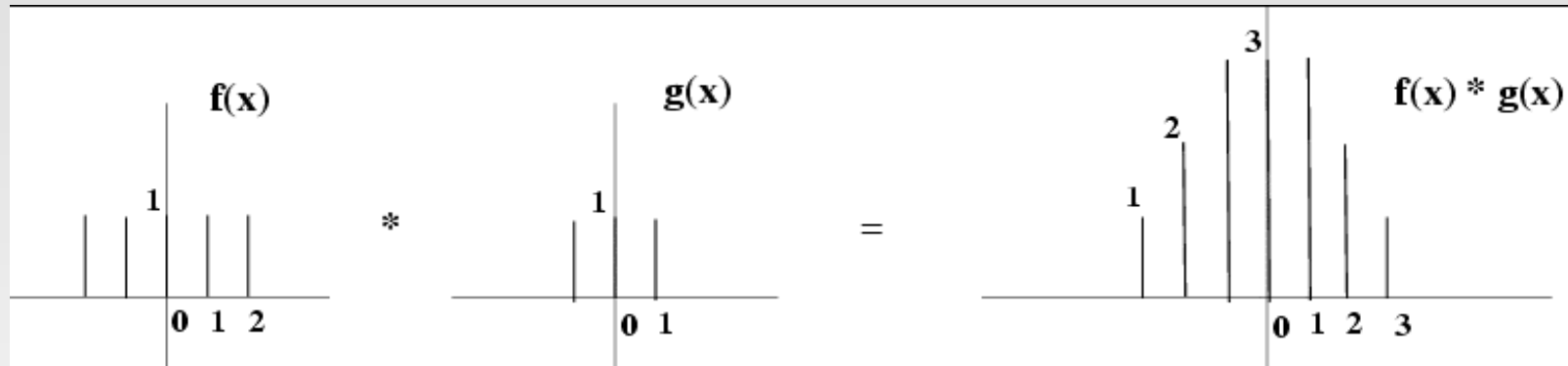
Convolução discreta

1. A integral é substituída pela soma
2. A variável de integração se torna um índice
3. Os deslocamentos ocorrem segundo incrementos discretos

$$f(x) * g(x) = \sum_m f(m)g(x-m), \quad 0 < x < M-1$$

Transformada de Fourier 2D discreta

Exemplo



Seqüências de entrada: $\{f(0), f(1), \dots, f(A-1)\}, \{g(0), g(1), \dots, g(B-1)\}$

Comprimento da seqüência de saída: $M = A+B-1$

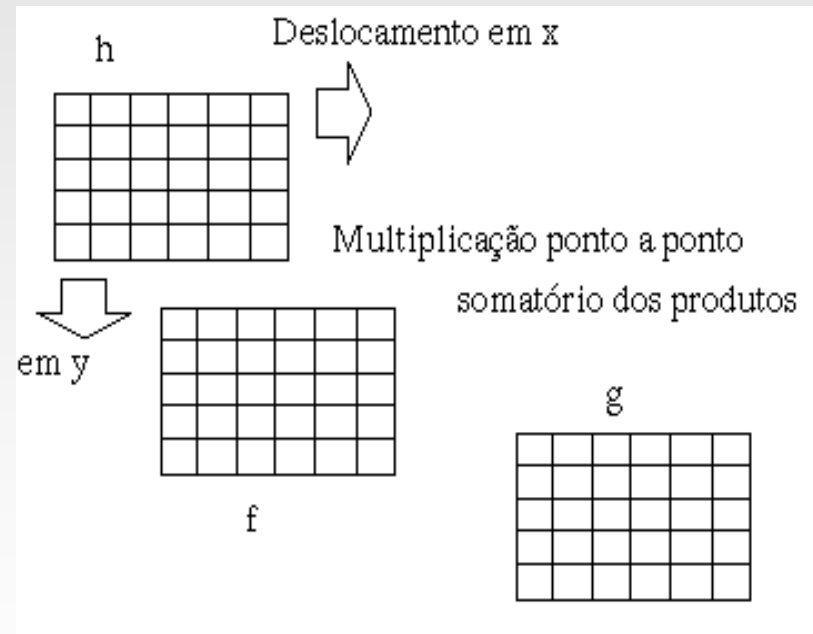
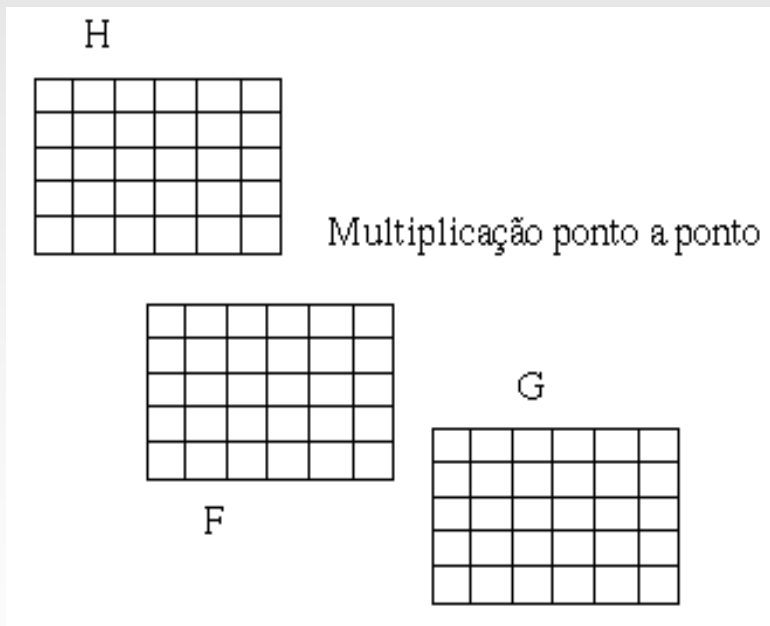
Filtros no domínio da frequência

- Domínio da frequência

$$G(u,v) = H(u,v) F(u,v)$$

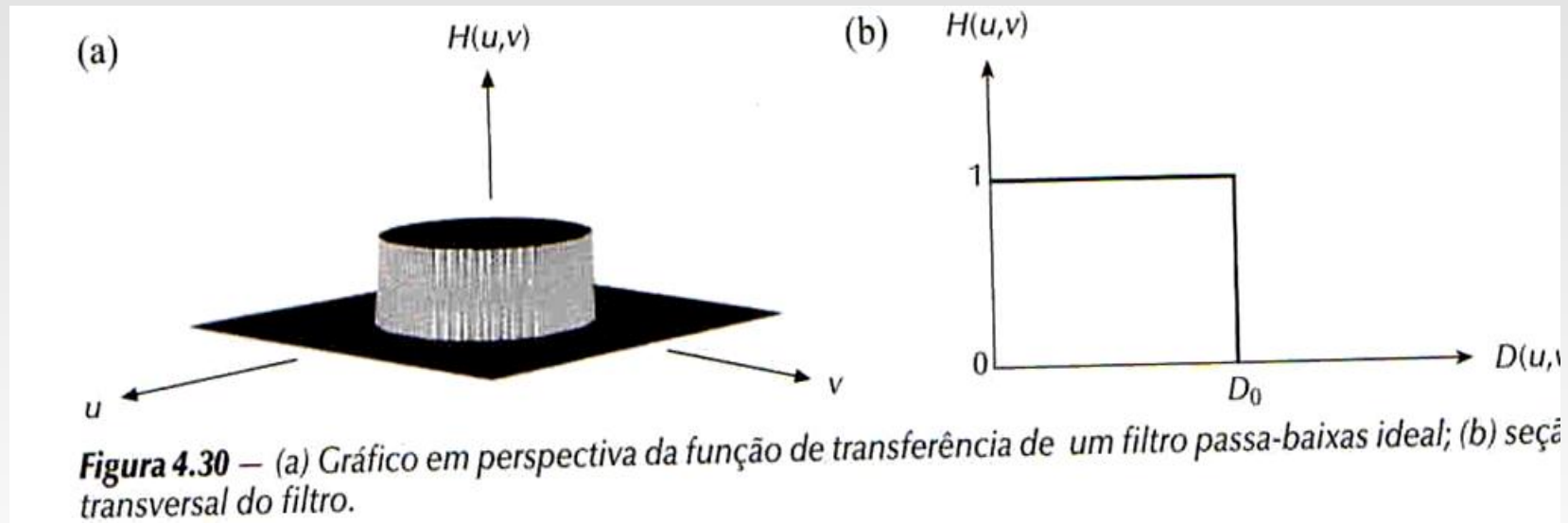
- Domínio espacial

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$$



Filtros no domínio da frequência

- Filtro Passa-baixa



- Filtro Passa-baixa Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- u, v são coordenadas de frequência

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

Filtro Passa-baixas

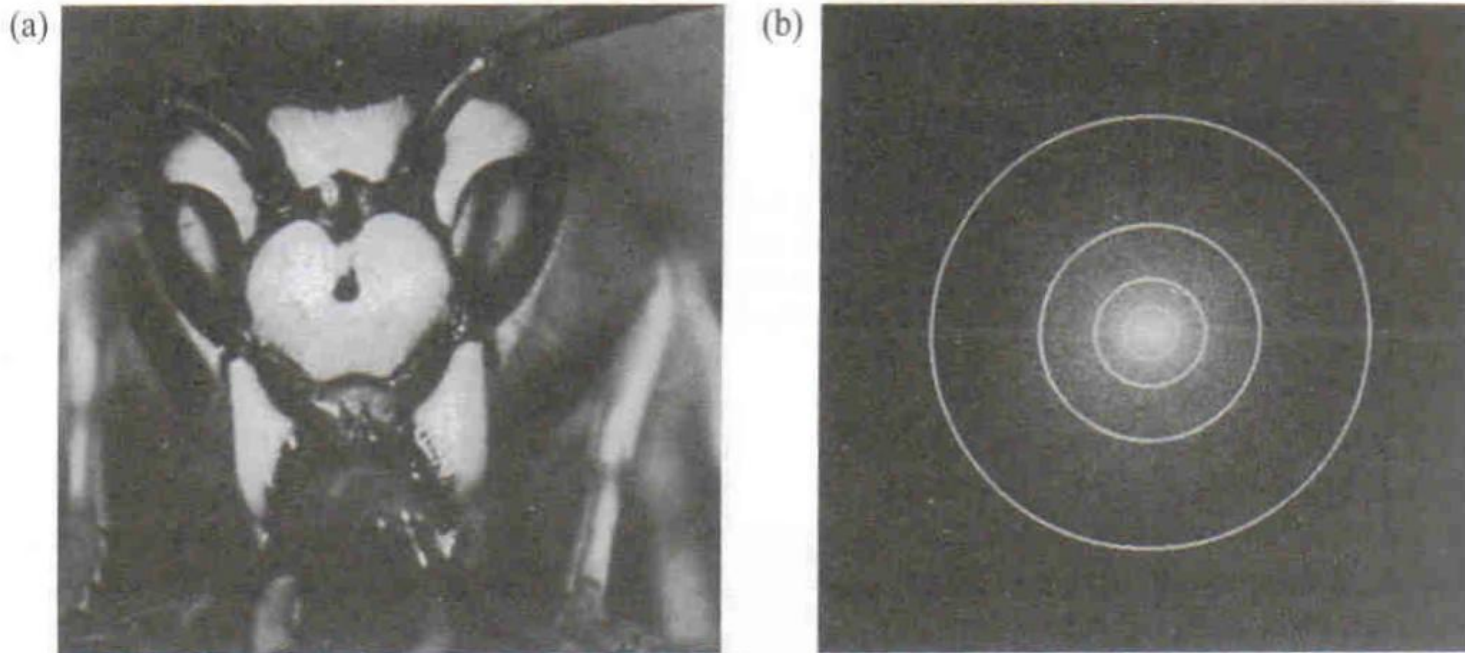


Figura 4.31 (a) Imagem 512×512 e (b) seu espectro de Fourier. Os círculos superpostos, com raios iguais a 8, 18, 43, 78 e 152, incluem 90, 93, 95, 99 e 99,5% da potência da imagem, respectivamente.

Filtro Passa-baixas

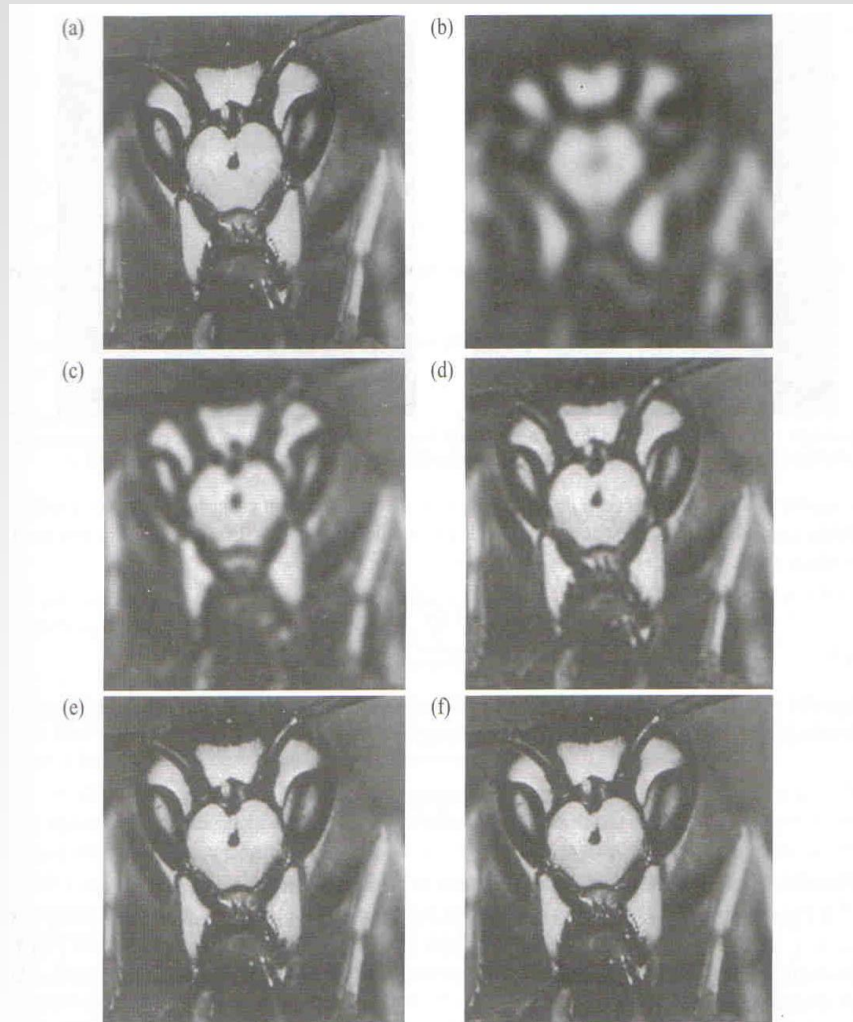
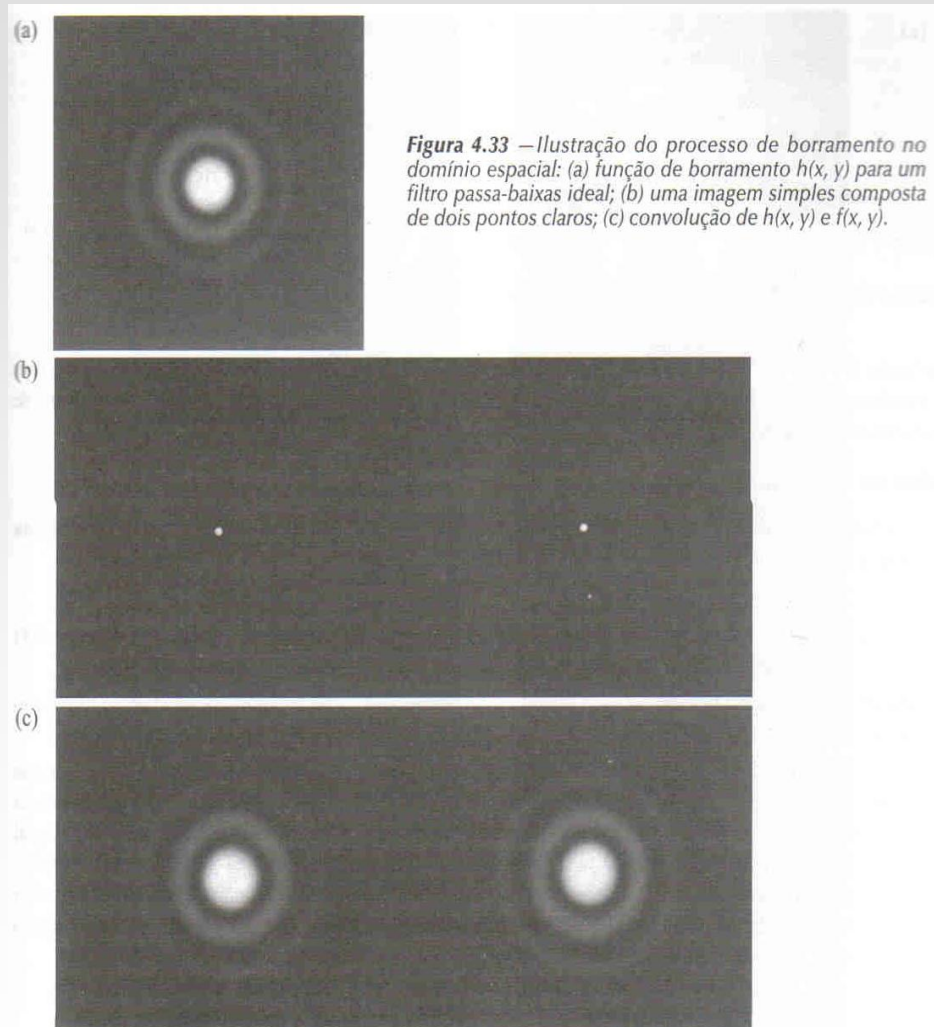


Figura 4.32 — (a) Imagem original; (b)-(f) resultados da filtragem passa-baixas ideal com frequências de corte correspondendo aos raios da Fig. 4.31(b).

Filtro Passa-baixas



Filtro de Butterworth passa-baixas

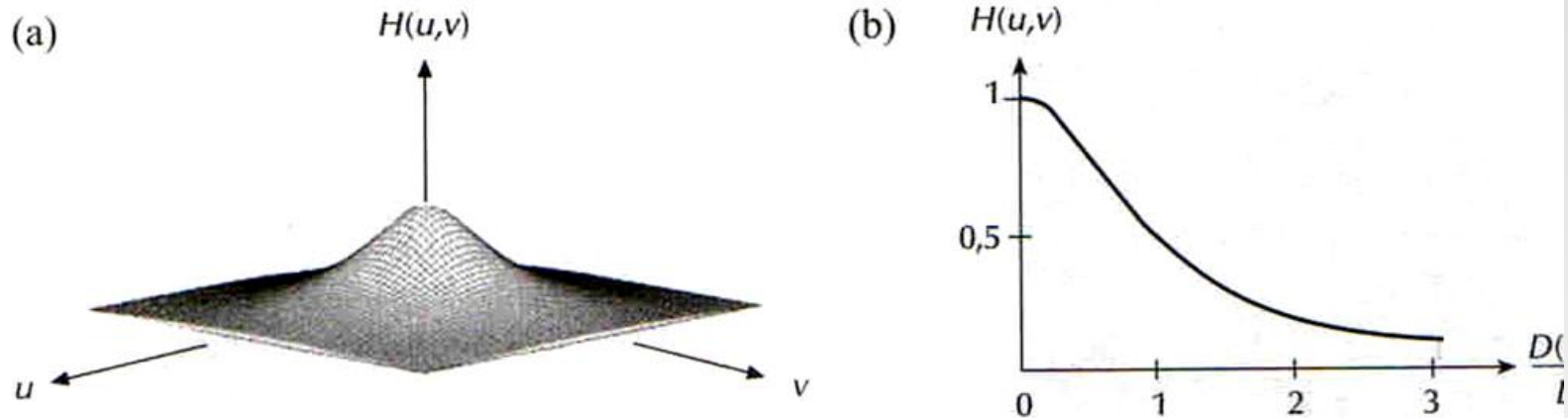


Figura 4.34 — (a) Filtro passa-baixas de Butterworth; (b) seção transversal radial para $n = 1$.

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v) / D_0]^{2n}}$$

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D(u,v) / D_0]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0,414[D(u,v) / D_0]^{2n}}$$

Fitro de Butterworth passa-baixas

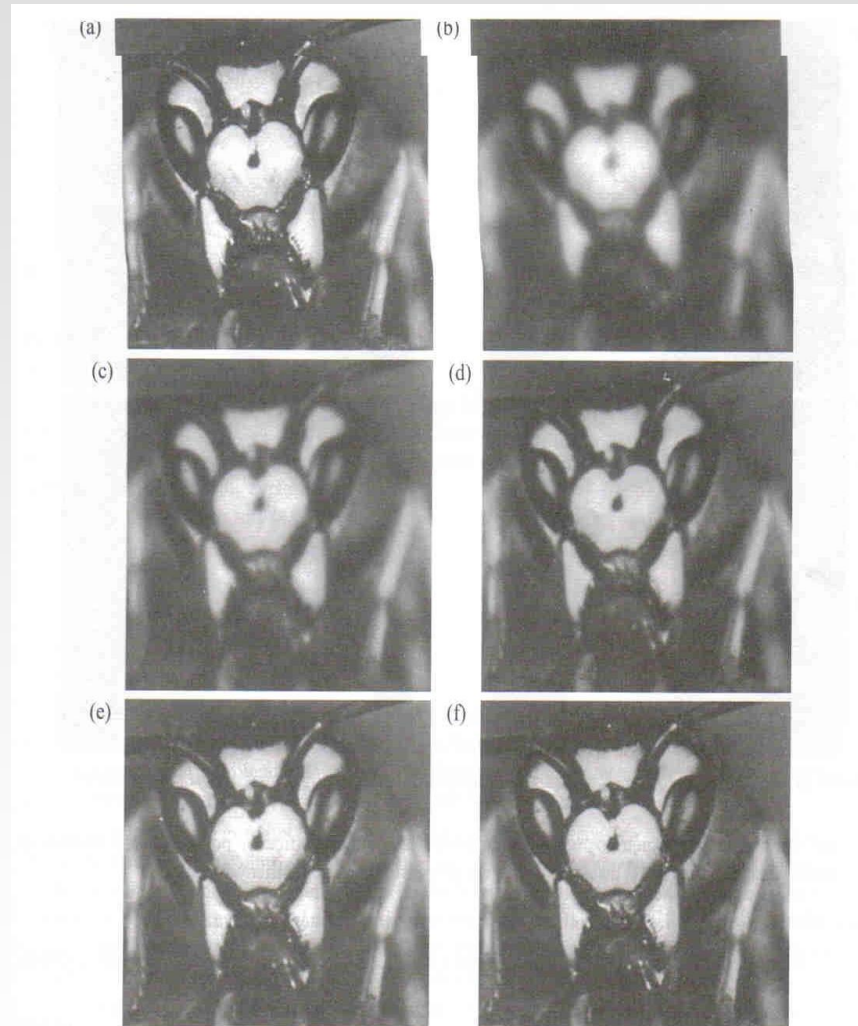


Figura 4.35 — (a) Imagem original; (b)-(f) resultados da filtragem passa-baixas de Butterworth com o ponto de corte definido pelos raios mostrados na Fig. 4.31(b).

- Filtro Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- Filtro de Butterworth

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

Filtro Passa-altas

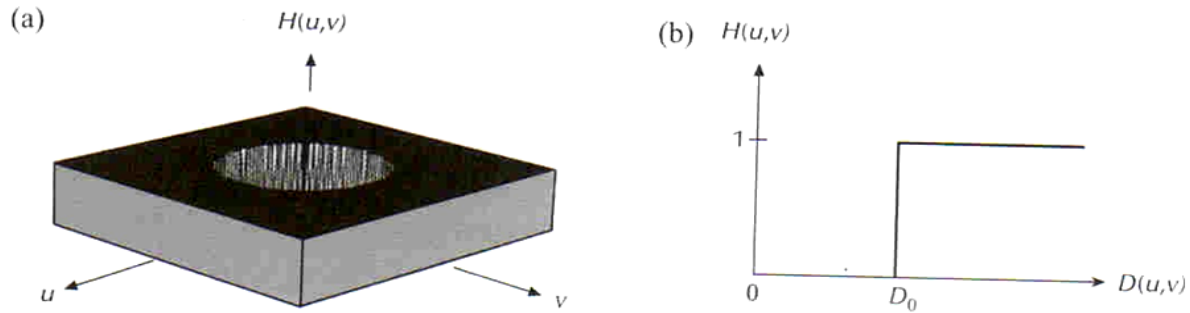


Figura 4.37 — Gráfico em perspectiva e seção transversal radial de um filtro passa-altas ideal.

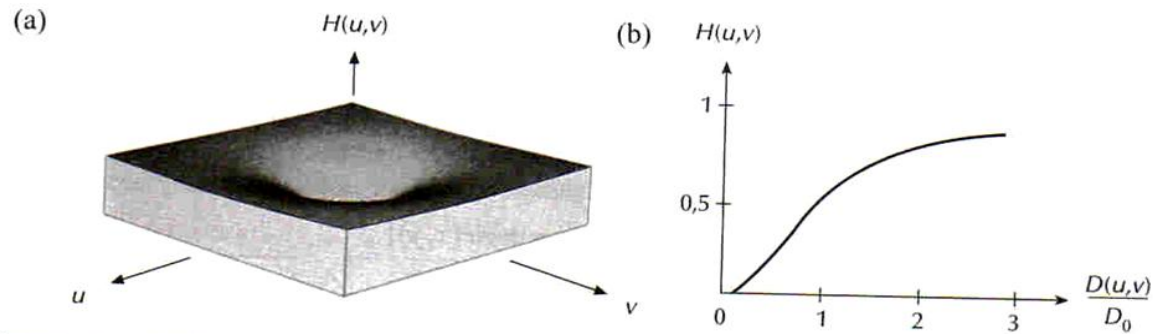


Figura 4.38 — Gráfico em perspectiva e seção transversal radial do filtro passa-altas de Butterworth para $n = 1$.

Filtro Passa-altas

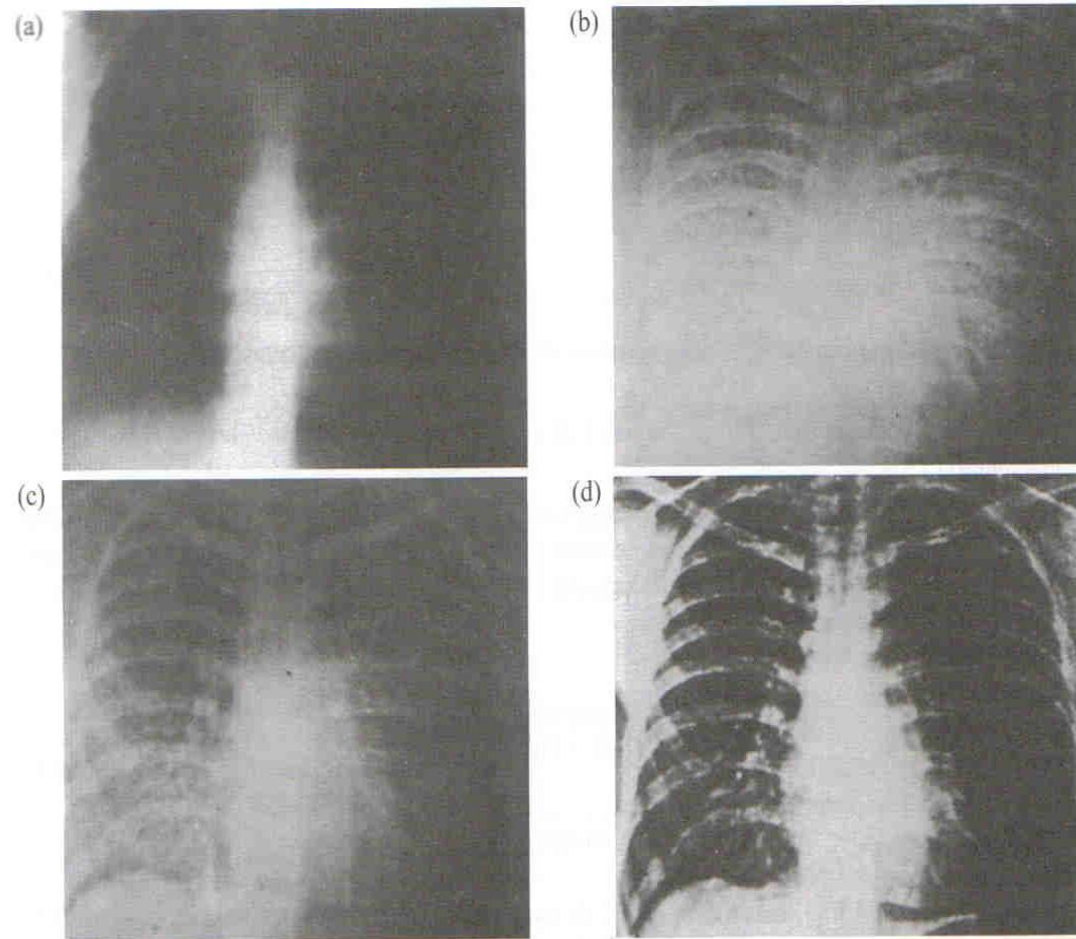


Figura 4.39 — Exemplo de filtragem passa-altas: (a) imagem original; (b) imagem processada com filtro de Butterworth passa-altas; (c) resultado da ênfase de alta frequência; (d) ênfase de alta frequência e equalização de histograma [De Hall et al. (1971).]

Filtragem homomórfica

- **Modelo de iluminação:**

$i \rightarrow$ iluminação; $r \rightarrow$ refletância

$$f(x,y) = i(x,y) r(x,y)$$

A transformada de Fourier não ajuda muito

$$F\{ f(x,y) \} \neq F\{ i(x,y) \} F\{ r(x,y) \}$$

Mas transformando f em z :

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \ln f(x,y) \\ &= \ln i(x,y) + \ln r(x,y) \end{aligned}$$

Filtragem homomórfica

É possível então separar as duas componentes:

$$\begin{aligned} F\{z(x,y)\} &= F\{\ln f(x,y)\} \\ &= F\{\ln i(x,y)\} + F\{\ln r(x,y)\} \end{aligned}$$

Então a variável Z é:

$$Z(u,v) = I(u,v) + R(u,v)$$

Supondo S a solução no espaço de Fourier:

$$\begin{aligned} S(u,v) &= H(u,v)Z(u,v) \\ &= H(u,v)I(u,v) + H(u,v)R(u,v) \end{aligned}$$

Filtragem homomórfica

E “s” no espaço direto:

$$\begin{aligned}s(x,y) &= \mathbf{F}^{-1}\{ S(u,v) \} \\ &= \mathbf{F}^{-1}\{ H(u,v)I(u,v) \} + \mathbf{F}^{-1}\{ H(u,v)R(u,v) \}\end{aligned}$$

Então a iluminação:

$$i'(x,y) = \mathbf{F}^{-1}\{ H(u,v)I(u,v) \}$$

E a refletância:

$$\begin{aligned}r'(x,y) &= \mathbf{F}^{-1}\{ H(u,v)R(u,v) \} \\ s(x,y) &= i'(x,y) + r'(x,y)\end{aligned}$$

Filtragem homomórfica

E finalmente i_o e r_o :

$$g(x,y) = \exp[s(x,y)]$$

$$= \exp[i'(x,y)] \cdot \exp[r'(x,y)]$$

$$= i_o(x,y) r_o(x,y)$$

$$i_o(x,y) = \exp[i'(x,y)]$$

$$r_o(x,y) = \exp[r'(x,y)]$$

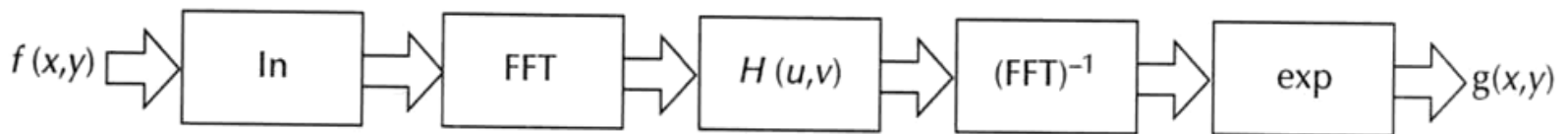


Figura 4.40 – Abordagem da filtragem homomórfica para realce de imagens.

Filtragem homomórfica

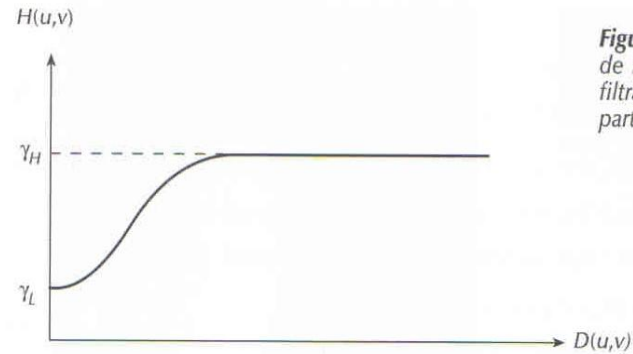


Figura 4.41 — Seção transversal de uma função de filtro circularmente simétrica para uso em filtragem homomórfica. $D(u, v)$ é a distância a partir da origem.

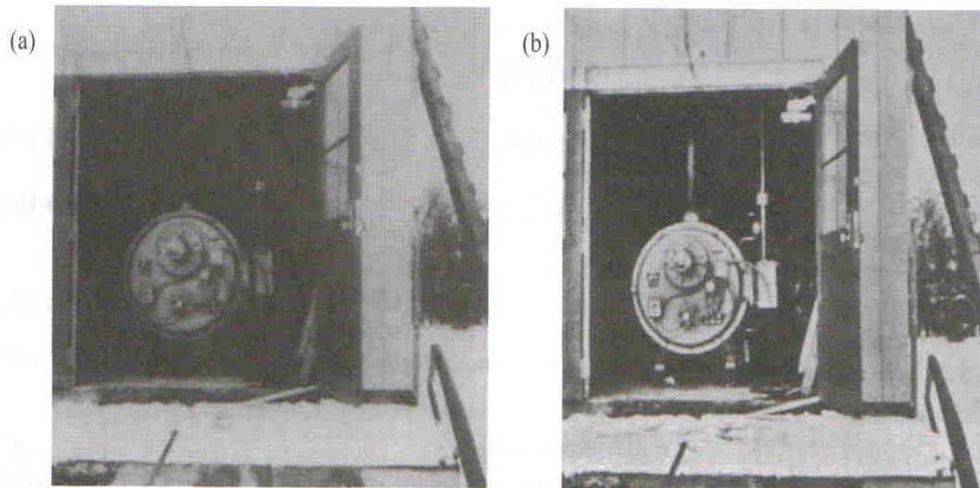


Figura 4.42 — (a) Imagem original; (b) imagem processada por filtragem homomórfica para alcançar compressão da escala dinâmica e realce do contraste simultâneos. (De Stockham [1972].)

Geração de máscaras espaciais

Equação do filtro no domínio da frequência:

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v)$$

Filtro no domínio espacial:

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(x-i, y-k) f(i, k)$$

H é a transformada de Fourier de h:

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} h(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

Geração de máscaras espaciais

Se $h(x,y)$ é restrito a zero para valores $x > n$ e $y > n$, com $N > n$.

Máscara de convolução h de tamanho $n \times n$.

$$\hat{H}(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{h}(x,y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)}$$

O objetivo é encontrar os coeficientes $h(x,y)$ que tenha menor erro:

$$e^2 = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left| \hat{H}(u,v) - H(u,v) \right|^2$$

Geração de máscaras espaciais

Considerando o erro:

$$e^2 = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left| \hat{H}(u, v) - H(u, v) \right|^2$$

A função de resposta estimada pode ser obtida como o produto da matriz de base pela função espacial:

$$\hat{H} = C\hat{h}$$

$$\hat{H}(u, v) \Rightarrow \hat{H}(i)$$

Geração de máscaras espaciais

$$\hat{h}(x, y) \Rightarrow \hat{h}(k) \quad \frac{1}{N} e^{-j2\pi \left(\frac{ux+vy}{N} \right)} \Rightarrow C(i, k)$$

Impondo a base de funções:

$$\begin{aligned} e^2 &= (\hat{H} - H)^* (\hat{H} - H) \\ &= \|\hat{H} - H\|^2 \\ &= \|C\hat{h} - H\|^2 \end{aligned}$$

Geração de máscaras espaciais

Fazendo a derivada do erro quadrático igual a zero

$$\frac{\partial e^2}{\partial \hat{h}} = 2C * (C\hat{h} - H) = 0$$

Resulta no produto da matriz de base por H

$$\hat{h} = (C * C^{-1})C * H = C * H$$

Geração de máscaras espaciais

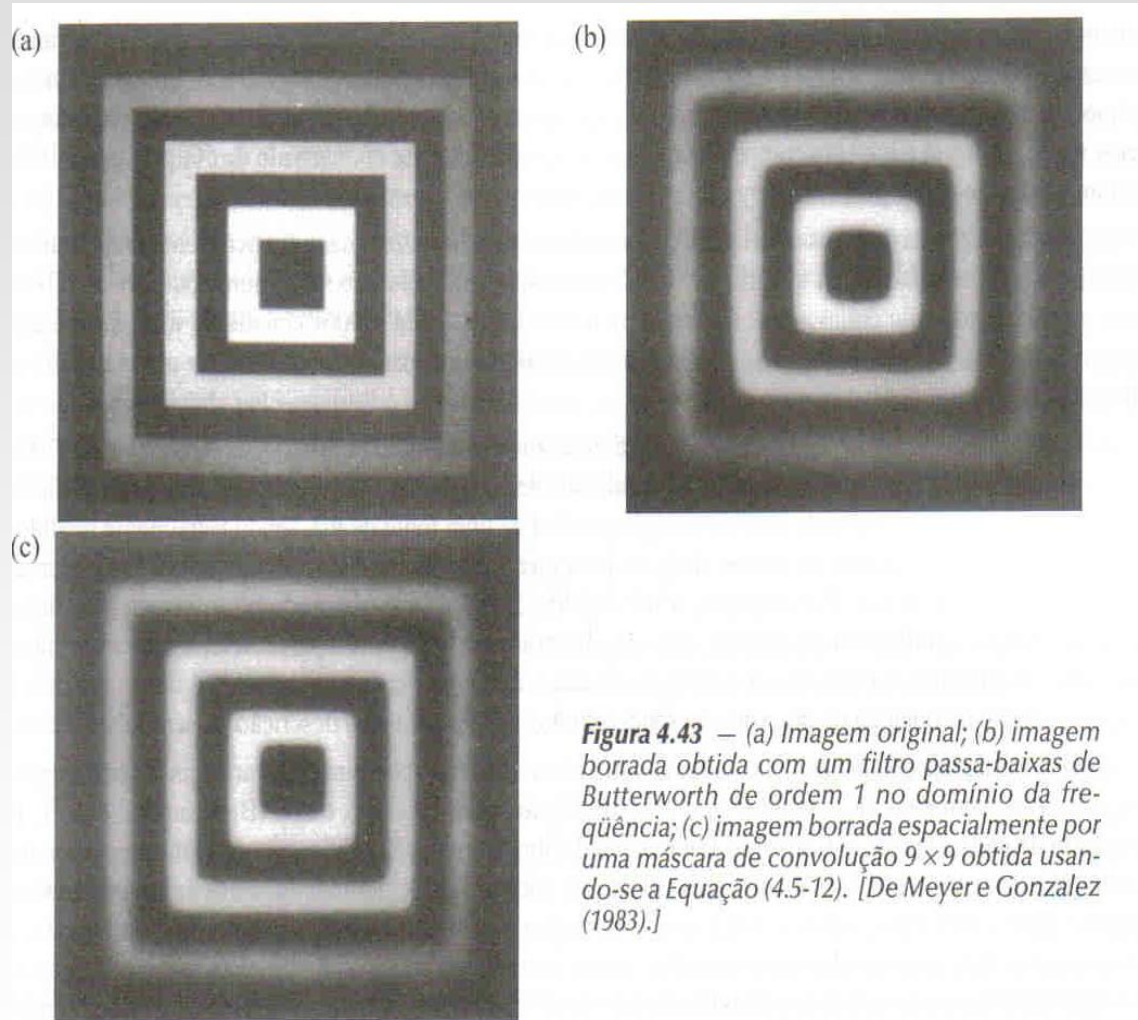


Figura 4.43 — (a) Imagem original; (b) imagem borrada obtida com um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 1 no domínio da frequência; (c) imagem borrada espacialmente por uma máscara de convolução 9×9 obtida usando-se a Equação (4.5-12). [De Meyer e Gonzalez (1983).]

Restauração de imagens (introdução)

Modelo de degradação:

