Lista 6

1. Determinar a região de integração $\mathcal{R}$ (escrever na forma $\mathcal{R} = \{(x,y) : .....\}$ ou desenhar) e mudar a ordem de integração das seguintes integrais:

   (a) $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx = \int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dydx = \int_?^? \int_?^? f(x,y)dxdy$,

   (b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$.

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos(x)}^1 f(x,y)dydx$.

2. Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que f não depende de x, ou seja $f(x,y) = f(x,c)$ para todo $y \in [c,d]$. Mostre que $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = (d-c)\int_a^b f(x,c)dx$

3. As seguintes integrais não podem ser calculadas na ordem de integração dada. Calcule.

   (a) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$.

   (b) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin(y)}{y} dydx$.

4. Sejam $f, g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, continuas e suponha que $f(x,y) = f(x,c)$ para todo $y \in [c,d]$ e que $g(a,y) = g(x,y)$ para todo $x \in [a,b]$. Mostre que

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)g(x,y)dxdy = \int_a^b f(x,c)dx \int_c^d g(a,y)dy$$

   e calcule $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} \sin(x)\cos(y)dxdy$. Que pode dizer no caso de integrais da forma $\int_a^b \int_{\delta(x)}^{\gamma(x)} f(x)g(y)dydx$.

5. Use que: Se $\mathcal{R}$ é uma região de $\mathbb{R}^2$ como as estudadas em aula, a integral $\int\int_{\mathcal{R}} dxdy$ é a área de $\mathcal{R}$. Fazer um desenho da região $\mathcal{R}$ e calcular a área sendo

   (a) $\mathcal{R}$ é a região do primeiro quadrante limitada pela curva $y^2 = x^3$ e a reta $y = x$.

   (b) $\mathcal{R}$ é a região do primeiro quadrante limitada pela curva $yx = 16$ e as retas $y = x$, $x = 8$.

   (c) $\mathcal{R}$ é a região limitada pela curva $y = x^2$ e a reta $y = 2x + 3$.

6. Achar a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = 4 - x$ e $y^2 = 4 - 4x$.

7. Achar o volume da região limitada pelo paraboloide $x^2 + y^2 = 8z$ e os planos $z = 0$, $z = 8$.

8. Achar o volume da região limitada pelo cilíndro $x^2 + y^2 = 8y$ e o plano $z = 0, z = 8$.

9. Achar o volume da região limitada

   (a) por $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ e $z = 0$. $(R : 3\pi)$

   (b) por $x^2 + x = 9$, $3x + 4y = 24$ e $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 8$. $(R : \frac{1485}{16})$

   (c) por $x^2 + z^2 = 16$, $x - y = 0$, x, y, z positivos. $(R : \frac{64}{3})$

   (d) pelo paraboide $4x^2 + y^2 = 4z$ e o plano $z - y = 2$. $(R : 9\pi)$

10. Calcular as integrais, para regiões D indicadas:

    (a) $\int\int_D y^2\sin(x^2)dxdy$; D limitada por $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = -x^{\frac{1}{3}}$ para x entre 0 e 8.

    (b) $\int\int_D \cos(y)dxdy$; D limitada por $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = 2$ e $x = 0$.

    (c) $\int\int_D (x + 2y)dxdy$; D limitada por $y = x^{-2}$, $y = 1$ e $y = 4$.

11. Use mudança de coordenadas para calcular,

   (a) $\int\int_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$ onde D é a região limitada por $x+y=2$ $x=0, y=0$.

   (b) $\int\int_D \frac{y+2x}{\sqrt{y-2x-1}} dxdy$ onde D é a região limitada por $y-2x=2$, $y+2x=2$, $y-2x=1$ e $y+2x=1$.

   (c) $\int\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ onde $D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$

   (d) $\int\int_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$ onde D é a região no primeiro quadrante do plano xy limitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$ e $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

   (e) $\int\int_D x^2 y dxdy$ onde $D=\{(x,y) : (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$

12. Calcular $\int\int\int_W zdxdydz$ onde W é a região no primeiro octante limitada pelos planos $y=0, z=0$, $x+y=2$, $2y+x=6$ e o cilindro $y^2+z^2=4$ R:$\frac{26}{3}$.

13. Calcular o volume do sólido W

   (a) limitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e o paraboloide $z=x^2+y^2$. R:$\frac{\pi}{6}$.

   (b) W é limitado pelas superficies $z=8-x^2-y^2$ e $z=x^2+3y^2$. R:$8\sqrt{2}\pi$.

14. Calcular $\int\int\int_W zdxdydz$ onde $W=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0, x^2+y^2 \geq \frac{1}{4}\}$ R:$\frac{9\pi}{64}$.

15. Calcular $\int_\gamma f(\cdot)d\gamma$, onde

   (a) $F(x,y)=(x^2-2xy, y^2-2xy)$ e a curva γ é a parabola $y=x^2$ de $(-2,4)$ ate $(1,1)$.

   (b) $F(x,y)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ e a curva γ é a circunfêrencia de centro zero raío r, percorrida no sentido anti-horário.

   (c) $F(x,y)=(3x+y, 2y-x)$ e a curva γ é a elipse $4x^2+y^2=4$, percorrida no sentido anti-horário.

   (d) $F(x,y,z)=(x,y,xz-y)$ e a curva γ é segmento de reta de $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$.

   (e) $F(x,y,z)=(yz, xz, x(y+1))$ e a curva γ é a fronteira do trianguo de vertices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$ percorrida no sentido anti-horário.