Lista 3

1. Usando a definiçaõ, estude se as seguintes funções são diferenciáveis.
   (a) $f(x,y) = xy^2 + e^{xy}$
   (b) $f(x,y) = xy$
   (c) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$
   (d) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

2. Estude se as seguintes funções são diferenciáveis. Justifique suas afirmações.
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Achar uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não exista.

4. Usando a regra da cadeia (sem achar a formula explicita de $f \circ g$), calcule $\frac{d}{dt}(f \circ g)$ para as seguintes funções:
   (a) $f(x,y) = xy^2 + e^{xy}$ e $g(t) = (t^2, t)$
   (b) $f(x,y) = e^{xy^2+xy}$ e $g(t) = (t^2, t)$
   (c) $f(x,y) = \frac{ln(x+yx)}{x}$ e $g(t) = (0, t^2)$

5. Usando a regra da cadeia, achar as derivadas parciais para $g \circ f$ nos seguintes casos:
   (a) $f(x,y) = y^2$ e $g(t) = t^2$
   (b) $f(x,y) = y^2 + x^2$ e $g(t) = t^2 + t$
   (c) $f(x,y) = x^3$ e $g(t) = ln(t)t^2$
   (d) $f(x,y) = x^3$ e $g(t) = t^3 + t$

6. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ é uma função diferenciavel, $\frac{\partial f}{\partial w}(u,v) \neq 0$ para todo $(u,v), w \in \mathbb{R}^2$, e que $z = z(x,y)$ é uma função diferenciável dada implicitamente pela equação $f(\dfrac{x}{y}, z) = 0$. Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

7. Estude a existência das derivadas parciais de segunda ordem das funções.
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se as parciais da segunda ordem existem, estude a continuidade das parciais de primeira e segunda ordem.

8. Seja $u(x,t) = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin(\lambda x)$ sendo λ, A, a e φ constantes. Mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciavel e suponha que x_0 é um ponto onde f tem valor máximo. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$ para todo vetor $v \in \mathbb{R}^2$. Lembre que x_0 é ponto de máximo de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

10. Achar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ talque $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 0$, mas x_0 não é ponto de máximo, nem de mínimo.

11. Achar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ talque $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$, mas x_0 não é ponto de máximo, nem de mínimo.

12. Achar os pontos críticos de para as seguintes funções:

    (a) $f(x) = (x-y)^4 + (x+y+2)^2$

    (b) $f(x) = 1 - x^4 - y^4$

    (c) $f(x) = x^3 + (x-y)^2$

    (d) $f(x) = x^3 + y^3 - 3xy$ na região triangular de vertices $(0,0), (0,1)$ e $(1,0)$.