

Processos Estocásticos com Reforço

Passeios Interagentes em Grafos

Rafael A. Rosales

Departamento de Computação e Matemática
Universidade de São Paulo

25 de março de 2022

Palestra apresentada durante o verão do Programa de Pós-Graduação em Matemática
DCM - USP.

Introdução

Definição: processo com reforço

Sejam

$W = (W_n), n \geq 0$ uma sequência de variáveis aleatórias, cada uma assume valores em V (enumerável)

$\mathfrak{F}_n = \sigma(W_0, W_1, \dots, W_n), n \geq 0$ filtro gerado por W

W é um *processo com reforço* se as suas probabilidades de transição dependem da história do processo via uma função de reforço g . Tipicamente, g é uma função da *fração do "tempo"* que W permanece em $v \in V$,

$$\mathbb{P}(W_{n+1} = v \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{g\left(\sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{W_k=v\}}\right)}{\sum_{u \in V} g\left(\sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{W_k=u\}}\right)}$$

Introdução

Exemplo: urna de Pólya

Suponhamos que uma urna apresenta inicialmente

B_0 bolas brancas

A_0 bolas azuis

Retiramos uma bola (ao acaso): se a bola é branca repomos $b \geq 1$ bolas brancas; caso contrário repomos b azuis.

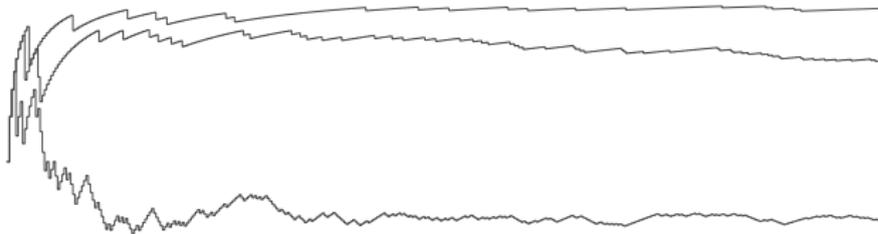
Seja $N = B_0 + A_0$, logo

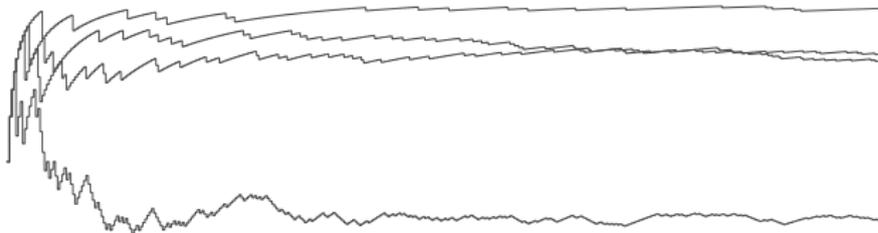
$$X_n = \frac{B_n}{B_n + A_n} = \frac{B_n}{N + nb}.$$

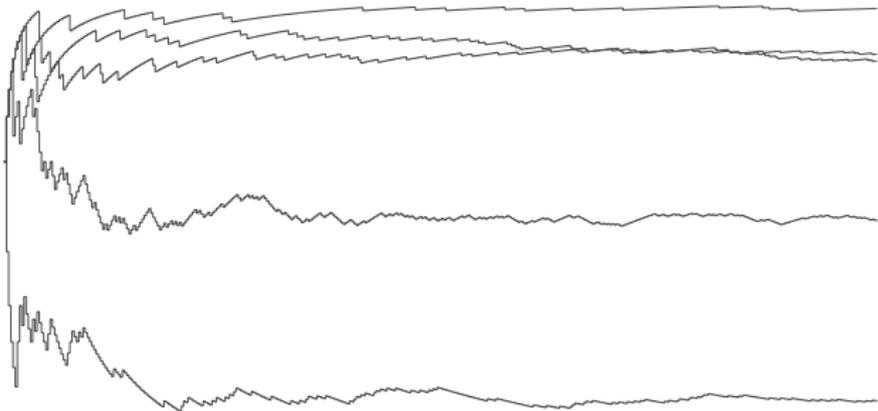
Que ocorre com X_n quando $n \rightarrow \infty$?

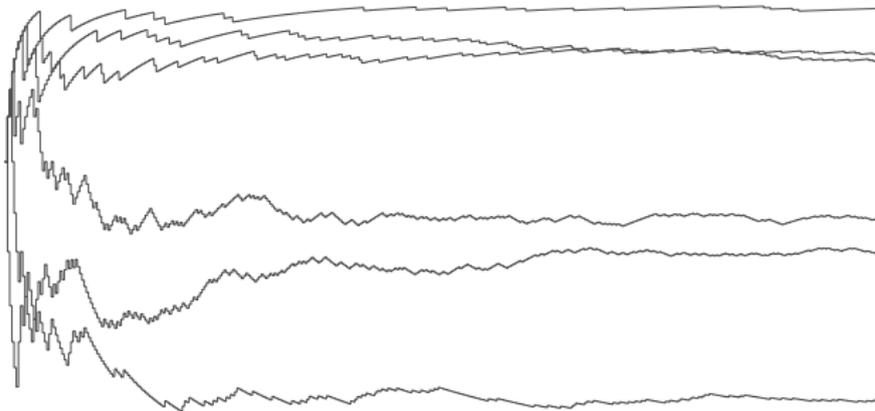


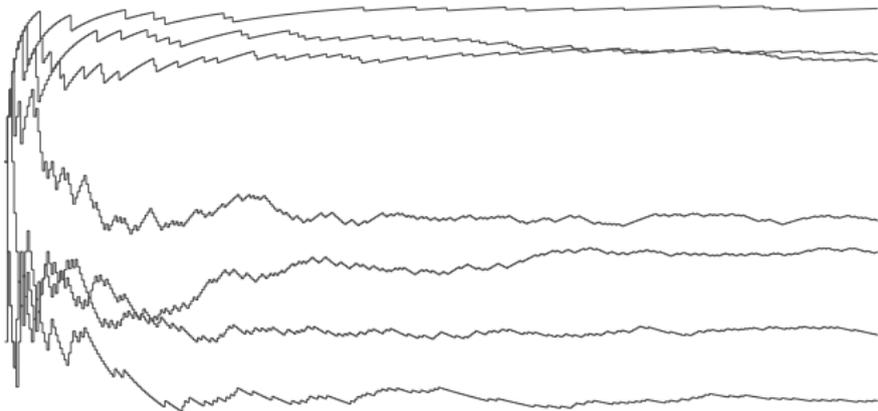


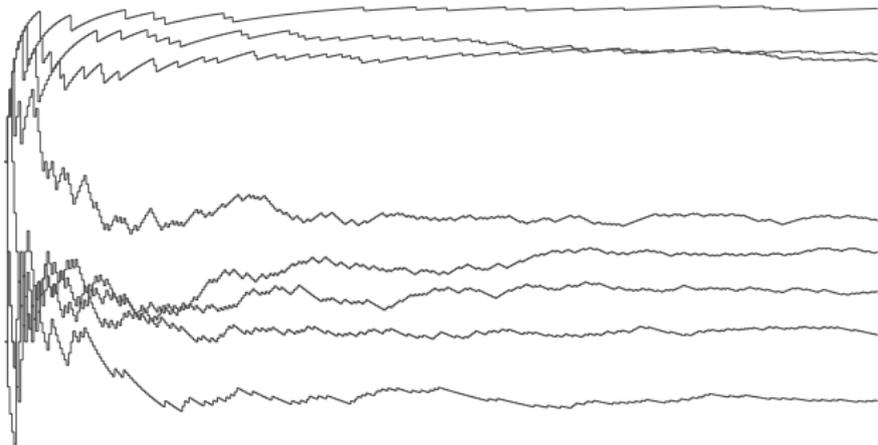


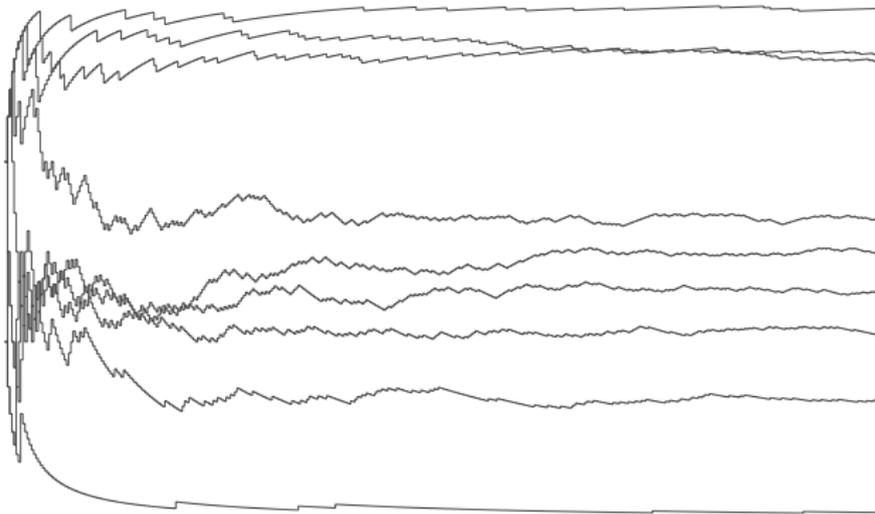












Introdução

X_n é um martingal

X_{n+1} é um *martingal* a respeito de \mathfrak{F}_n . Seja

$$\xi_n = \mathbf{1}\{\text{escolhemos uma bola branca em } n\}$$

logo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{B_{n+1}}{N + b(n+1)} \mid \mathfrak{F}_n\right] = \frac{1}{N + b(n+1)} \mathbb{E}[B_n + \xi_n \mid \mathfrak{F}_n] \\ &= \frac{1}{N + b(n+1)} \left(B_n + \frac{B_n}{N + bn}\right) = X_n.\end{aligned}$$

Como $|X_n| \leq 1$, utilizando o teorema básico de convergência de martingais, concluímos que existe X (v.a.) tal que

$$X_n \longrightarrow X \quad \text{q.c.}$$

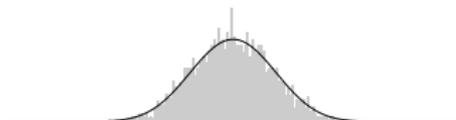
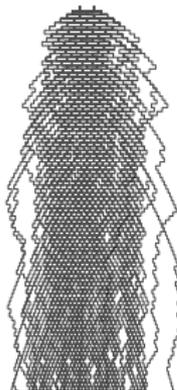
Teorema (G. Pólya, ≈ 1930)

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \text{Beta}(B_0/d, A_0/d)$$

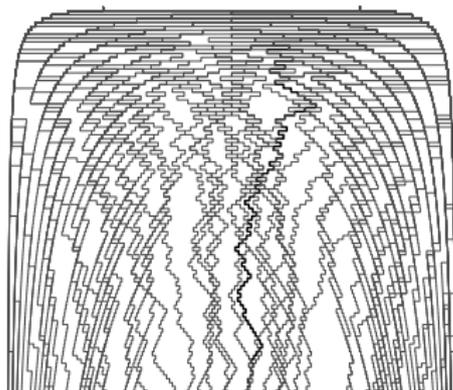
Teorema (G. Pólya, ≈ 1930)

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \text{Beta}(B_0/d, A_0/d)$$

$$B_0 = A_0 = 15, b = 2$$



$$B_0 = A_0 = 3, b = 8$$



Introdução

Urna como um processo com reforço

Sejam para qualquer $n \geq 1$,

$W_n \in V = \{B, A\}$ B : branca, A : azul

$\xi_n = \mathbf{1}_{\{W_n=B\}}$,

logo

$$\mathbb{P}(W_{n+1} = B \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{\sum_{k=0}^n \xi_k}{\sum_{k=0}^n \xi_k + \sum_{k=0}^n 1 - \xi_k} = \frac{\sum_{k=0}^n \xi_k}{n}.$$

Neste caso $g(x) = x$.

Passeio aleatório com reforço em grafos

Pemantle 1991, [5]: "Vertex Reinforced Random Walk"

Sejam

- $\mathcal{G} = (E, V)$, $|V| = d$, um grafo localmente finito, conexo, não direcionado.

Passeio aleatório com reforço em grafos

Pemantle 1991, [5]: "Vertex Reinforced Random Walk"

Sejam

- $\mathcal{G} = (E, V)$, $|V| = d$, um grafo localmente finito, conexo, não direcionado.
- $v \sim u$ a relação de vizinhança em \mathcal{G} : $v \sim u \leftrightarrow \{v, u\} \in E$.

Passeio aleatório com reforço em grafos

Pemantle 1991, [5]: "Vertex Reinforced Random Walk"

Sejam

- $\mathcal{G} = (E, V)$, $|V| = d$, um grafo localmente finito, conexo, não direcionado.
- $v \sim u$ a relação de vizinhança em \mathcal{G} : $v \sim u \leftrightarrow \{v, u\} \in E$.
- $W = (W(n))$, $n \geq 0$ uma sequência de v.as. com valores em V , e seja para $v \in V$,

$$X_v(n) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{W(k)=v\}}$$

Passeio aleatório com reforço em grafos

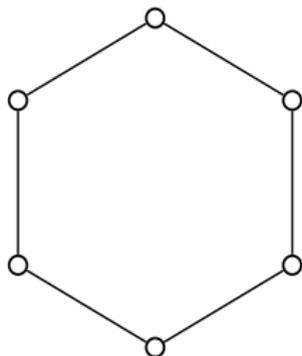
Pemantle 1991, [5]: "Vertex Reinforced Random Walk"

Sejam

- $\mathcal{G} = (E, V)$, $|V| = d$, um grafo localmente finito, conexo, não direcionado.
- $v \sim u$ a relação de vizinhança em \mathcal{G} : $v \sim u \leftrightarrow \{v, u\} \in E$.
- $W = (W(n))$, $n \geq 0$ uma sequência de v.as. com valores em V , e seja para $v \in V$,

$$X_v(n) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{W(k)=v\}}$$

- A probabilidade de transição é definida por



$$\mathbb{P}(W_{n+1} = v \mid \mathfrak{F}_n) = \mathbf{1}_{\{v \sim W_n\}} \frac{g(X_v(n))}{\sum_{u \sim W(n)} g(X_u(n))}$$

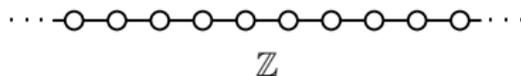
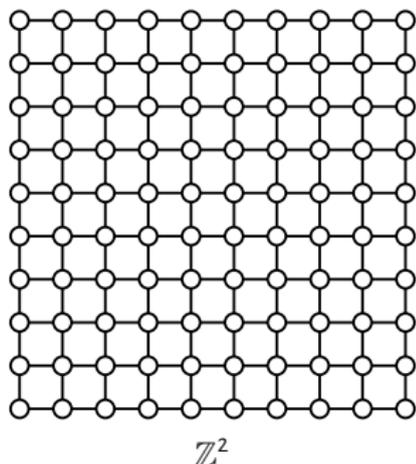
$g(x) = x$ ou $g(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, ou ...

Passeio aleatório com reforço em grafos

Seja

$$X(n) = (X_v(n) : v \in V) \quad \text{fração relativa de ocupação dos vértices de } \mathcal{G}$$

A depender da estrutura de \mathcal{G} , por exemplo,



e a depender de g , o que podemos dizer sobre $X(n)$ quando $n \rightarrow \infty$?

Passeio aleatório com reforço em grafos

Alguns resultados: **localização**

Seja

$\mathcal{G}_\infty =$ grafo (aleatório) formado pelos elos de \mathcal{G} , percorrido por W infinitas vezes

Passeio aleatório com reforço em grafos

Alguns resultados: **localização**

Seja

\mathcal{G}_∞ = grafo (aleatório) formado pelos elos de \mathcal{G} , percorrido por W infinitas vezes

Teorema (S. Volkov (2001) [8], e (2006) [9])

Sejam $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ e $g(x) = x^\alpha$. Neste caso, se $\alpha > 2$

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_\infty \text{ possui exatamente dois vértices}) = 1.$$

Passeio aleatório com reforço em grafos

Alguns resultados: **localização**

Seja

\mathcal{G}_∞ = grafo (aleatório) formado pelos elos de \mathcal{G} , percorrido por W infinitas vezes

Teorema (S. Volkov (2001) [8], e (2006) [9])

Sejam $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ e $g(x) = x^\alpha$. Neste caso, se $\alpha > 2$

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_\infty \text{ possui exatamente dois vértices}) = 1.$$

Teorema (M. Benaim, O. Raimond e B. Schapira (2013), [3])

Seja \mathcal{G} um grafo completo com $|V| = d$. Seja $g(x) = x^\alpha$. Se $1 < \alpha \leq 2$, então

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_\infty \text{ possui no máximo } k + 1 \text{ vértices}) > 0,$$

onde $k \leq n - 1$.

Teorema (C. Cotar e D. Tacker (2017), [4])

Seja \mathcal{G} um grafo infinito, conexo, e de grau limitado. Se g é tal que

$$\sum_{x=1}^{\infty} x/g(x) < \infty, \quad (1)$$

então, quase certamente, W atravessa exatamente dois vértices vizinhos para todo n suficientemente grande,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_{\infty} \text{ possui exatamente dois vértices}) = 1$$

(1) é satisfeita se $g(x)$ é pelo menos da ordem $\mathcal{O}(x^2 \log^2 x)$.

Passeios aleatórios com reforço *interagentes*

Sejam $W_n^1, W_n^2, \dots, W_n^m, n \in \mathbb{N}$, com valores nos vértices de $\mathcal{G} = (E, V)$, tais que para cada $i \in [m] = 1, \dots, m$, e $v \in V, W_0^i = v$, e

$$\mathbb{P}(W_{n+1}^i = v \mid \mathfrak{F}_n) = \mathbf{1}_{\{v \sim W_n^i\}} \frac{g(\sum_{j \neq i} X_v^j(n))}{\sum_{u \sim W_n^i} g(\sum_{j \neq i} X_u^j(n))}$$

onde

$$X_v^i(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{W_k^i = v\}}$$

e

g é uma função $\begin{cases} \text{estritamente } \textit{crescente}: \text{ modelo } \textit{cooperativo/atrator} \\ \text{estritamente } \textit{decrecente}: \text{ modelo } \textit{competitivo/repulsivo} \end{cases}$

Dependendo de \mathcal{G} e g , o que podemos dizer sobre

$$X_v^i(n) \longrightarrow ?$$

Passeios aleatórios com reforço interagentes

Exemplo: $m = 2$, $|V| = 2$

Trabalho em conjunto com F.P.A. Prado e C. Coletti (REF here).

Passeio aleatório simples em \mathbb{Z}

Sejam $\xi_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, independentes, tais que $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = -1)$.
O passeio aleatório simples em \mathbb{Z} é o processo

$$S_n = S_{n-1} + \xi_n = S_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad S_0 = 0.$$

S_n é dito recorrente se para qualquer $v \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(\{S_n = v\} \text{ ocorre para uma infinidade dos índices } n) = 1.$$

Se $p = \frac{1}{2}$, então S_n é recorrente. Caso contrário, se $p \neq \frac{1}{2}$, então S_n é transitório.

Suponhamos que S_n^1 e S_n^2 , em \mathbb{Z} , sejam reforçados a se repelirem exponencialmente segundo um parâmetro $\alpha > 0$.

Sejam $\xi_\ell^i(n) = \mathbf{1}\{S_{k+1}^i - S_k^i = -1\}$, $\xi_r^i(n) = \mathbf{1}\{S_{k+1}^i - S_k^i = 1\}$, e

$$X_r^i(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_r^i(k), \quad X_\ell^i(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_\ell^i(k).$$

As probabilidades de transição são definidas por

$$\mathbb{P}(S_{n+1}^i = S_n^i + 1 \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{e^{-\alpha X_r^i(n)}}{e^{-\alpha X_r^i(n)} + e^{-\alpha X_\ell^i(n)}} = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1}^i = S_n^i - 1 \mid \mathfrak{F}_n)$$

Neste caso estamos considerando $g(x) = e^{-\alpha x}$.

Suponhamos que S_n^1 e S_n^2 , em \mathbb{Z} , sejam reforçados a se repelirem exponencialmente segundo um parâmetro $\alpha > 0$.

Sejam $\xi_\ell^i(n) = \mathbf{1}\{S_{k+1}^i - S_k^i = -1\}$, $\xi_r^i(n) = \mathbf{1}\{S_{k+1}^i - S_k^i = 1\}$, e

$$X_r^i(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_r^i(k), \quad X_\ell^i(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_\ell^i(k).$$

As probabilidades de transição são definidas por

$$\mathbb{P}(S_{n+1}^i = S_n^i + 1 \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{e^{-\alpha X_r^i(n)}}{e^{-\alpha X_r^i(n)} + e^{-\alpha X_\ell^i(n)}} = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1}^i = S_n^i - 1 \mid \mathfrak{F}_n)$$

Neste caso estamos considerando $g(x) = e^{-\alpha x}$.

Teorema (F.P.A. Prado, C. Coletti, R. Rosales, 2021, [6])

S_n^1 e S_n^2 são recorrentes se $\alpha \in [0, 1]$. S_n^1 e S_n^2 são transitórios se $\alpha \in [2, \infty)$ e neste caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^1 = - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^2 = \pm \infty \quad \text{q.c.}$$

O caso $\alpha \in (1, 2)$ é atualmente um problema em aberto.

Esboço da demonstração

Seja $X(n) = (X_\ell^1(n), X_r^1(n), X_\ell^2(n), X_r^2(n)) \in S \times S$, $S=1$ -simplice. Observamos que $X(n)$ é o processo constituído por dois passeios aleatórios com repulsão exponencial em um grafo \mathcal{G} de dois vértices.

Esboço da demonstração

Seja $X(n) = (X_\ell^1(n), X_r^1(n), X_\ell^2(n), X_r^2(n)) \in S \times S$, $S=1$ -simplice. Observamos que $X(n)$ é o processo constituído por dois passeios aleatórios com repulsão exponencial em um grafo \mathcal{G} de dois vértices.

Passo a. $X_\ell^i(n)$ e $X_r^i(n)$ são *aproximações estocásticas*, isto é

$$X_\ell^i(n+1) - X_\ell^i(n) = \gamma_n \left(F_\ell^i(X_\ell^i(n)) + U_n \right) \quad (2)$$

Esboço da demonstração

Seja $X(n) = (X_\ell^1(n), X_r^1(n), X_\ell^2(n), X_r^2(n)) \in S \times S$, $S=1$ -simplice. Observamos que $X(n)$ é o processo constituído por dois passeios aleatórios com repulsão exponencial em um grafo \mathcal{G} de dois vértices.

Passo a. $X_\ell^i(n)$ e $X_r^i(n)$ são *aproximações estocásticas*, isto é

$$X_\ell^i(n+1) - X_\ell^i(n) = \gamma_n \left(F_\ell^i(X_\ell^i(n)) + U_n \right) \quad (2)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1},$$

Esboço da demonstração

Seja $X(n) = (X_\ell^1(n), X_r^1(n), X_\ell^2(n), X_r^2(n)) \in S \times S$, $S=1$ -simplice. Observamos que $X(n)$ é o processo constituído por dois passeios aleatórios com repulsão exponencial em um grafo \mathcal{G} de dois vértices.

Passo a. $X_\ell^i(n)$ e $X_r^i(n)$ são *aproximações estocásticas*, isto é

$$X_\ell^i(n+1) - X_\ell^i(n) = \gamma_n \left(F_\ell^i(X_\ell^i(n)) + U_n \right) \quad (2)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1},$$

$$U_n = \xi_\ell^i(n) - \mathbb{E}[\xi_\ell^i(n) \mid \mathfrak{F}_n],$$

Esboço da demonstração

Seja $X(n) = (X_\ell^1(n), X_r^1(n), X_\ell^2(n), X_r^2(n)) \in S \times S$, $S=1$ -simplice. Observamos que $X(n)$ é o processo constituído por dois passeios aleatórios com repulsão exponencial em um grafo \mathcal{G} de dois vértices.

Passo a. $X_\ell^i(n)$ e $X_r^i(n)$ são *aproximações estocásticas*, isto é

$$X_\ell^i(n+1) - X_\ell^i(n) = \gamma_n \left(F_\ell^i(X_\ell^i(n)) + U_n \right) \quad (2)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1},$$

$$U_n = \xi_\ell^i(n) - \mathbb{E}[\xi_\ell^i(n) \mid \mathfrak{F}_n],$$

$$F_\ell^i(X(n)) = -X_\ell^i(n) + \frac{e^{-\alpha X_\ell^j(n)}}{e^{-\alpha X_r^j(n)} + e^{-\alpha X_\ell^j(n)}}.$$

É conveniente pensar em F_ℓ^i, F_r^i como as coordenadas do campo vetorial $F : S \times S \rightarrow T(S \times S)$

$$F = (F_\ell^1, F_r^1, F_\ell^2, F_r^2).$$

Seja $x = (x_\ell^1, x_r^1, x_\ell^2, x_r^2) \in S \times S$.

Se $\gamma_n U_n \rightarrow 0$, então (2) reduz a

$$X(n+1) - X(n) = \gamma_n F(X(n)),$$

uma aproximação de Cauchy-Euler para a resolução da equação

$$\dot{x} = F(x).$$

É suficiente considerar a dinâmica induzida em $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, pelas coordenadas

$$x = (x_r^1, x_r^2), \quad F = (F_r^1, F_r^2).$$

Neste caso, como $\operatorname{div} F(x) < 0$, utilizando os argumentos em Benaïm e Hirsh 1997, [2], concluímos que

$$\mathfrak{L}(\{X(n)\}) = \mathbf{E}(F) \quad \text{q.c.}$$

onde $\mathfrak{L}(\{X(n)\})$ é o conjunto dos pontos de acumulação de $X(n) = (X_r^1(n), X_r^2(n))$.

Passo b. Estudamos o conjunto $\mathbf{E}(F)$.

- Se $\alpha \in [0, 2]$, então $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o único elemento de $\mathbf{E}(F)$.
- Se $\alpha \in (2, \infty)$, então

$$\mathbf{E}(F) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), (a, 1-a), (1-a, a) \right\}, \quad a \in \left[0, \frac{1}{2} \right).$$

- todos os elementos de $\mathbf{E}(F)$ são hiperbólicos. Em particular,

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \text{é estável se } \beta \in [0, 2] \text{ e instável se } \beta \in (2, \infty) \\ (a, 1-a), (1-a, a) & \text{são estáveis se } \beta \in (2, \infty) \end{array}$$

Utilizando argumentos desenvolvidos por Pemantle 1990, é possível mostrar que $X(n)$ não converge a os equilíbrios instáveis de F , portanto

$$\begin{aligned} X(n) &\xrightarrow[\text{q.c.}]{} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ quando } \alpha \in [0, 2] \\ X(n) &\xrightarrow[\text{q.c.}]{} (a, 1 - a) \text{ ou } (1 - a, a) \text{ quando } \alpha \in (2, \infty). \end{aligned} \tag{3}$$

Consideramos o deslocamento relativo de S_n^i ,

$$\frac{S_n^i - S_0^i}{n} = 2X_r^i(n) - 1.$$

De (3), quando $\alpha > 2$, obtemos

$$S_n^i \xrightarrow[\text{q.c.}]{} +\infty \text{ ou } -\infty.$$

Isto conclui a prova sobre a transitoriedade.

Passo c. Para mostrarmos

$$\mathbb{P}(\{S_n^i = v\} \text{ ocorre para uma infinidade dos índices } n) = 1,$$

é suficiente considerar $v = 0$, a origem de \mathbb{Z} .

Seja $i = 1$. Utilizamos as seguintes desigualdades,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_n \{S_n^1 = 0\}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{S_n^1}{\sigma_n} = +\infty, \liminf_n \frac{S_n^1}{\sigma_n} = -\infty\right) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{S_n^1}{\sigma_n} \geq c, \liminf_n \frac{S_n^1}{\sigma_n} \leq -c\right) \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\sigma_n = \text{Var}(Z_n)^{1/2}$,

$$Z_{n+1} = Z_0 + \sum_{k=1}^n Y_k, \quad Z_0 \in \mathbb{Z}$$

Y_n é uma sequência de v.as. independentes tais que para $b > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = -1), \quad p_n = \frac{1}{2} - \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{b}{\sqrt{n}}\right\}. \quad (5)$$

A recorrência de S_n^1 é mostrada se o limite da última expressão em (4) é 1.

Considerando um acoplamento entre S_n e Z_n obtemos

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{S_n^1}{\sigma_n} \geq c\right) \geq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{Z_n}{\sigma_n} \geq c\right)$$

Utilizando a Lei 0-1 de Kolmogorov e o Teorema Central do Limite obtemos

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{Z_n}{\sigma_n} \geq c\right) = 1$$

sempre e quando

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n]/\sigma_n < \infty.$$

A existência do acoplamento e a finitude de ℓ depende criticamente da velocidade com a qual $X_r^1(n)$ converge a $\frac{1}{2}$, o qual por sua vez determina a velocidade da ordem $n^{-1/2}$, com a qual p_n converge a $\frac{1}{2}$ em (5).

Utilizando técnicas de *shadowing*, específicas para processos de aproximação estocásticas desenvolvidas por Benaïm, 1999, [1], é possível mostrar que

$$\left|X_r^1(n) - \frac{1}{2}\right| = \mathcal{O}(n^{-1/2}) \quad \text{q.c.} \quad \text{quando } \alpha \in [0, 1].$$

Isto ultimo fornece exatamente a velocidade apropriada.

O resultado descrito é um exemplo de um programa mas amplo, direcionado ao estudo de passeios com reforço e urnas interagentes em grafos.

O resultado descrito é um exemplo de um programa mas amplo, direcionado ao estudo de passeios com reforço e urnas interagentes em grafos.

Teorema (R. Rosales, F.P.A. Prado, B. Pires, 2022, [7])

Seja $\mathcal{G} = (E, V)$, $|V| = d$, um grafo completo, e $W(n) = (W^1(n), \dots, W^m(n))$ passeios aleatórios com função de reforço $g(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $\mathbf{E}_e(F)$ o conjunto dos equilíbrios estáveis do campo vetorial F induzido por g . Se $\mathbf{E}_e(F)$ esta constituído por pontos isolados, então

$$\sum_{x \in \mathbf{E}_e(F)} \mathbb{P}(X(n) \rightarrow x) = 1.$$

A demonstração esta baseada na existência de uma função de Lyapunov estrita para o campo F .

O resultado descrito é um exemplo de um programa mas amplo, direcionado ao estudo de passeios com reforço e urnas interagentes em grafos.

Teorema (R. Rosales, F.P.A. Prado, B. Pires, 2022, [7])

Seja $\mathcal{G} = (E, V)$, $|V| = d$, um grafo completo, e $W(n) = (W^1(n), \dots, W^m(n))$ passeios aleatórios com função de reforço $g(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $\mathbf{E}_e(F)$ o conjunto dos equilíbrios estáveis do campo vetorial F induzido por g . Se $\mathbf{E}_e(F)$ esta constituído por pontos isolados, então

$$\sum_{x \in \mathbf{E}_e(F)} \mathbb{P}(X(n) \rightarrow x) = 1.$$

A demonstração esta baseada na existência de uma função de Lyapunov estrita para o campo F .

F. Prado e eu temos conseguido estudar diversos grafos \mathcal{G} (ciclos, estrelas, grafos completos), quando cada passeio $W^i(n)$, $i = 1, \dots, m$, esta restrito a um sub-grafo completo de \mathcal{G} , e g é da forma

$$g^1(x) = x^1(m - \sum_{k \neq 1} x^k)^\alpha.$$

As nossas técnicas estão restritas a grafos completos. Uma questão interessante seria a extensão a grafos não completos.

Paulo Rodrigues tem conseguido caracterizar a convergência de um modelos de urnas com duas cores interagentes de acordo a geometria definida por \mathcal{G} . Em particular, quando \mathcal{G} é o grafo completo de 3 vértices e quando \mathcal{G} é uma estrela de 3 vértices.

Referências I

- [1] M. Benaïm.
Dynamics of stochastic approximation algorithms.
In *Séminaire de Probabilités XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–68. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [2] M. Benaïm and M. W. Hirsch.
Asymptotic pseudotrajectories and chain recurrent flows, with applications.
J. Dynam. Differential Equations, 8(1):141–176, 1996.
- [3] M. Benaïm, O. Raimond, and B. Schapira.
Strongly vertex-reinforced-random-walk on a complete graph.
ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., 10(2):767–782, 2013.
- [4] C. Cotar and D. Thacker.
Edge- and vertex-reinforced random walks with super-linear reinforcement on infinite graphs.
Ann. Probab., 45(4):2655–2706, 07 2017.
- [5] R. Pemantle.
Vertex reinforced random walk.
Probab. Theory Related Fields, 92(1):117–136, 1992.

Referências II

- [6] F. A. P. Prado, C. F. Coletti, and R. A. Rosales.
Two repelling random walks on \mathbb{Z} , 2021.
[arXiv:2005.00666](#) [math.PR].
- [7] R. A. Rosales, F. A. P. Prado, and B. Pires.
Vertex reinforced random walks with exponential interaction on complete graphs.
Stoch. Process. Their Appl., 2022.
in press.
- [8] S. Volkov.
Vertex-reinforced random walk on arbitrary graphs.
Ann. Probab., 29(1):66–91, 02 2001.
- [9] S. Volkov.
Phase transition in vertex-reinforced random walks on \mathbb{Z} with non-linear reinforcement.
J. Theoret. Probab., 19(3):691–700, 2006.