A MATEMÁTICA AUXILIANDO NA TOMADA DE DECISÃO DO MELHOR INVESTIMENTO: O CASO DA TAXA INTERNA DE RETORNO.

Taiane Lopes de Oliveira Terassaka

Orientador: Prof. Américo López Gálvez

FFCLRP-Departamento de Computação e Matemática
Universidade de São Paulo

taianeterassaka@usp.br

Objetivos

Entre os diversos desafios que um gestor precisa enfrentar, existe a necessidade de encontrar ferramentas que lhe auxiliem na tomada de decisão racional em relação à analise de projetos de investimento. Nesse sentido, a Matemática Financeira proporciona diversos métodos que auxiliam o investidor na tomada da melhor decisão. Naturalmente não é difícil imaginar que entender adequadamente os fundamentos envolvidos poderemos conhecer os impactos e limitações dos referidos métodos. Entre os índices que auxiliam na tomada de decisão o mais discutível é a Taxa Interna de Retorno (TIR). Podemos dizer que a TIR de um projeto fornece sua rentabilidade e encontrá-la passa por uma questão matemática de existência e unicidade da solução de uma equação. No entanto, por falta de conhecimento matemático, observamos que muitas vezes existem interpretações erradas do problema matemático e, como consequência, o abandono prematuro da análise da viabilidade do projeto via a TIR. Sendo assim, este trabalho tem como objetivo 1º evidenciar e destacar como resultados matemáticos aparentemente abstratos permitem concluir importantes resultados práticos. 2º Mostrar a importância de uma leitura matemática adequada do problema para o analise da TIR. 3º Apresentar alguns resultados existentes para a análise da existência e unicidade da TIR.

Métodos e Procedimentos

Para realização dessa pesquisa, além de abordar vários conceitos de matemática financeira, alguns conceitos de cálculo diferencial foram necessários. Também foi necessário estudar alguns teoremas que permitiram determinar a "localização" de raízes de polinômios, cota de raízes e, existência e unicidade de raízes positivas para certos polinômios. Entre eles podemos citar o Teorema de mudança de sinal de Descartes, Teorema de Sturm, Teorema de Budan, e Teorema de Bernhard. Também estudamos e apresentamos o Teorema de De Faro, como um modo prático de garantir a existência e unicidade da TIR, viabilizando, desse modo, a aplicação prática do método.

Teorema de De Faro: "Seja [A_0, A_1,...,A_n] o fluxo de caixa de um projeto do tipo investimento, isto é $A_0 < 0$, cujo lucro contábil é positivo. A condição suficiente para a existência de uma única taxa interna de retorno positiva é que haja apenas uma variação de sinal na sequência $A_0^{(n+1)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n-1)}, \ldots, A_n^{(1)}$, onde"

$$A_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{l+k-j-1}{k-j} a_j \qquad (1)$$

Resultados

Resumidamente, a Taxa Interna de Retorno de um projeto de investimento é uma taxa de juros (*i*) que igualará, na data zero, o valor de todas as entradas (recebimentos) com as saídas (pagamentos) prevista no fluxo de caixa. Mais precisamente, se {A_0, A_1, ..., A_n} representa os valores do fluxo de caixa de um projeto, i será a TIR se:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{(1+i)^k} = 0 \qquad (2)$$

Matematicamente encontrar essa taxa de juros equivale a buscar raízes reais e não negativas de um polinômio. Nesse sentido, através do Teorema de Descartes, é possível concluir que ao desenvolver todos os binômios do polinômio que representa o valor presente líquido, a quantidade de inversões de sinal dos coeficientes desse novo polinômio coincide com a quantidade máxima de TIRs que o projeto pode ter. No entanto, o Teorema de Descartes além de não fornecer o valor exato de TIRs de um projeto, ele também não é capaz de fornecer uma localização aproximada da TIR. Com isso, inicia-se o estudo do Teorema de Budan que, assim como o Teorema de Descartes, fornece a quantidade máxima possível de raízes que um polinômio pode ter e consegue fornecer uma localização aproximada das raízes. Após isso, começa o estudo do Teorema de Sturm que além de fornecer uma localização aproxima das raízes, consegue determinar o número exato de raízes, permitindo concluir, com certeza, se o projeto é um caso em que a unicidade da TIR é verificada. Além disso, foram estudadas condições que permitam garantir a existência da TIR, chegando-se no seguinte resultado: "Se [CF_0, CF_1, ...,CF_n] é um fluxo de caixa (convencional ou não convencional) no qual $CF_0 < 0$, então existirá, pelo menos uma TIR se for verdade que:

$$\sum_{i=0}^{n} a_j > 1 \qquad (3)$$

onde $a_j = CF_j / CF_0$. Na procura de condições para garantir a unicidade da TIR estudamos a condição de Bernhard- de Faro. De início, aborda-se a interpretação de Bernhard, que encontra uma condição para garantir a unicidade e existência da TIR, estabelecendo o seguinte:

"Seja [A_0, A_1,..., A_n] o fluxo de caixa de um projeto do tipo investimento ($A_0 < 0$) e com lucro contável positivo. A existência e unicidade de uma TIR positiva é garantida se na sequência {B_0, B_1,..., B_n} houver uma única variação de sinal." Onde:

$$B_t = \sum_{i=0}^{t} \binom{n-j}{t-j} A_j \qquad (4)$$

Por fim, abordou-se a interpretação feita por De Faro, veja na seção Métodos e Procedimentos, que fornece o mesmo tipo de informação, porém mostra-se mais vantajoso por ser um método mais prático do ponto de vista computacional.

Conclusões

Assim, torna-se evidente a importância da matemática como importante ferramenta na procura de respostas racionais para problemas envolvendo a TIR, originados na área de investimento.

Referências Bibliográficas

[1] Assaf Neto, Alexandre. *Os métodos quantitativos de análise de investimentos. Caderno de estudos, SciELO Brasil (1992).*

[2] Basu, Udayan Kumar. Condition For Existence & Uniquenes Of IRR – Descartes Rule Of Signs & Other Ther Issues, *Hyperion International Journal of Econophysics & New Economy, v.* ***9*** *(2016).*

[3] Barbieri, José Carlos and Alvares, Antônio Carlos Teixeira and Machline, Claude. Taxa Interna de Retorno: controvérsias e interpretações, *Revista Gestão da Produção Operações e Sistemas, (2007).*

[4] Blank, Leland and Tarquin, Anthony. Engenharia econômica. *AMGH Editoral, (2009).*

[5] Faro, Paula ML. Projetos de investimento com mais de duas variações de sinal: sobre a aplicação do Teorema de Vincent e suas extensões, *(1998).*

[6] Panton, Don B. Descartes, Budan, and Sturm on multiple internal rates of return, *Journal of Financial Education, (1999).*

[7] Rafaeli, Fernando Rodrigo, Teorema de e zeros de polinômios ortogonais. *UNESP(2007)*