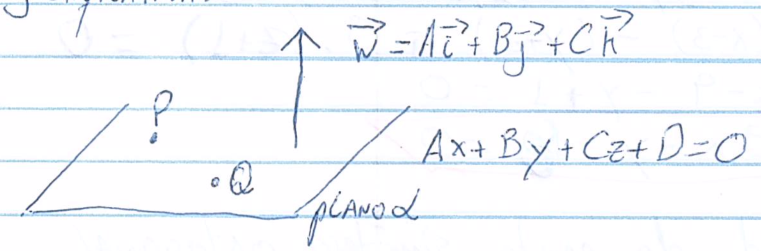
Aula 15

Consequências de um sist. de coord. ortonormal

Seja $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ um sist. de coord.

① Se $Ax + By + Cz + D = 0$ é a eq. geral de um plano em rel. a S então $(\vec{w})_S = (A, B, C)$ é ortogonal ao plano $Ax + By + Cz + D = 0$

justificativa:



$P \in$ plano α e $(P)_S = (p_1, p_2, p_3) \Rightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0$
$Q \in$ " e $(Q)_S = (q_1, q_2, q_3) \Rightarrow Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0$.

$\vec{PQ} = (q_1 - p_1)\vec{i} + (q_2 - p_2)\vec{j} + (q_3 - p_3)\vec{k}$

$\vec{w} \cdot \vec{PQ} = A \cdot (q_1 - p_1) + B(q_2 - p_2) + C(q_3 - p_3) + D - D =$
$= 0$.

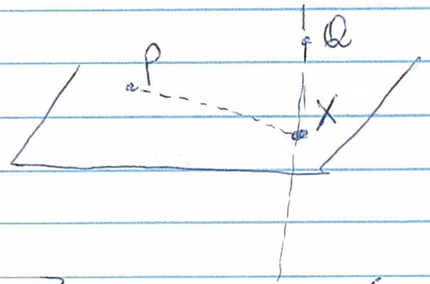
$\therefore\ w \perp \vec{PQ} \Rightarrow w \perp$ plano α.

Exercício 1: Seja r a reta $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$. Ache a eq. geral do plano perpendicular a r que passa por $(P)_S = (3, 1, -1)$

sol.

Note que $X \in$ reta $r \iff (X)_S = (x,y,z) = (2+3t, 1-t, 2)$

$$(x,y,z) = (2,1,2) + t.(3,-1,0) \quad , t \in \mathbb{R}$$
$$(X)_S = (Q)_S + t.\vec{v} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

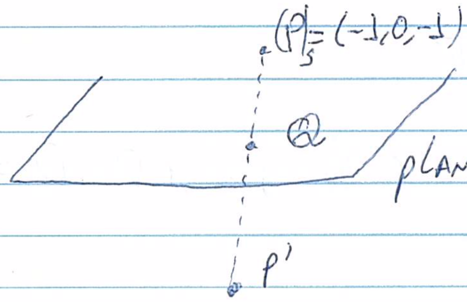


$\vec{PX} \perp$ vetor direção de r

$\vec{PX} \perp \vec{v}$

$$\vec{PX}.\vec{v} = 0 \iff (x-3, y-1, z+1).(3,-1,0) = 0$$
$$3.(x-3) - (y-1) + 0.(z+1) = 0$$
$$3x - 9 - y + 1 = 0$$
$$\boxed{3x - y - 8 = 0}$$

Exercício 2: Ache as coord. do ponto simétrico ortogonal ao ponto $P=(-1,0,1)$ em relação ao plano α, cuja equação geral em rel. à S é $4x-2y+z-3=0$.



plano $\alpha \doteq 4x-2y+z-3=0$

$Q = P + t.\vec{v}$ no qual $\vec{v}$ é ortogonal ao plano α.

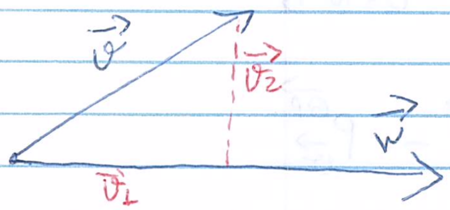
$(\vec{v})_S \doteq (4,-2,+1)$

$$(x,y,z) = (Q)_S = (-1,0,1) + t.(4,-2,+1) \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y+z-3=0 \\ x = -1+4t \\ y = -2t \\ z = 1+t. \end{cases}$$

$$4x - 2y + z - 3 = 0$$
$$4.(-1+4t) - 2.(-2t) + (1+t) - 3 = 0$$
$$-4 + 16t + 4t + 1 + t - 3 = 0$$
$$21t = 6$$
$$\boxed{t = \frac{2}{7}}$$

$\therefore P' = P + 2.\overrightarrow{PQ} \Rightarrow (P')_S = (-1,0,1) + 2.(\ldots$ Completar!
$\quad = Q + \overrightarrow{PQ}$

② Calcular a projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{w} \neq 0$:



$P_{\vec{w}}^{\vec{v}} \doteq$ vetor proj. ortog. de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$
$= \vec{v_1}$

Como calcular $P_{\vec{w}}^{\vec{v}}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$?

$$\begin{cases} P_{\vec{w}}^{\vec{v}} = \alpha \vec{w} \\ \vec{v} = \alpha \vec{w} + \vec{v_2} \quad \text{com } v_2 \perp \vec{w} \end{cases}$$

Mas $\vec{w} . \vec{v} = \vec{w} . (\alpha \vec{w} + \vec{v_2}) = \alpha . \vec{w} . \vec{w} + \cancel{\vec{w} . \vec{v_2}} = \alpha . \|w\|^2$

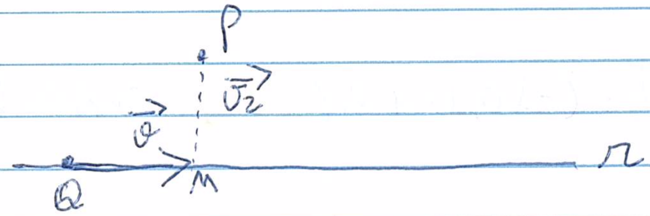
$\therefore \alpha = \dfrac{\vec{w} . \vec{v}}{\|w\|^2}$ e assim $P_{\vec{w}}^{\vec{v}} = \left(\dfrac{\vec{w} . \vec{v}}{\|w\|^2} \right) . \vec{w}$.

Exemplo. Seja $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $(P)_S = (1,-1,1)$,

e a reta $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$.

(a) Ache a reta perpendicular a reta r que passa por P
(b) O pto simétrico ortogonal no ponto P em rel. a reta r.
(c) distância de P a reta r.

sol.
(a)



reta r : $(X)_S = (x,y,z) = (-1, 2+3t, 1+4t)$
$= (-1,2,1) + t.(0,3,4)$
$= (Q)_S + t.(\vec{v})_S$

Mas,

$$\vec{QP} = P_{\vec{v}}^{\vec{QP}} + \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_2} = \vec{QP} - P_{\vec{v}}^{\vec{QP}}$$

$\therefore$ reta $\perp$ a r passando por $P \doteq$ $X' \doteq P + s.\vec{v_2}$
$X' = P + s.(\vec{QP} - P_{\vec{v}}^{\vec{QP}})$

$$(\vec{QP})_S = (P)_S - (Q)_S = (1,-1,1) - (-1,2,1)$$
$$= (2,-3,0)$$

$$P_{\vec{v}}^{\vec{QP}} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{QP}}{\|v\|^2}\right) . \vec{v} = \left(\frac{-9}{25}\right) . (0,3,4) = \left(0, \frac{-27}{25}, \frac{36}{25}\right)$$

(b) TAREFA

(c) $d(P,r) = \|PM\|$ tq $M = Q + P_{\vec{v}}^{\vec{QP}}$

AULA 16

Fórmula da distância

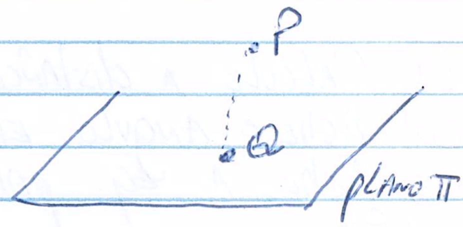
(3) Fórmula da distância de um pto P a um plano π em rel. a um sist. de coord. S.

$S = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$(P)_S = (x_0, y_0, z_0)$

plano π : $Ax + By + Cz + D = 0$

$(\vec{n})_S = (A, B, C)$ é o vet. normal ao plano π.



$d(P, \pi) = \|\vec{PQ}\|$ tq

Q = plano π $\cap$ reta normal a π passando por P

Eq. paramétrica da reta π passando por P em rel. a S

$$X = P + t \cdot \vec{n}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot A \\ y = y_0 + t \cdot B \\ z = z_0 + t \cdot C \end{cases}$$

Logo $Ax + By + Cz + D = 0$.

$A \cdot (x_0 + tA) + B \cdot (y_0 + tB) + C \cdot (z_0 + tC) + D = 0$

$Ax_0 + t \cdot A^2 + By_0 + t \cdot B^2 + Cz_0 + t \cdot C^2 + D = 0$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} = t_0$$

$\therefore (Q)_S = (x_0 + t_0 A, y_0 + t_0 B, z_0 + t_0 C)$.

data

$$d(P,\pi) = d(PQ) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ}\cdot\vec{PQ}}$$

$$= \sqrt{t_0^2A^2+t_0^2B^2+t_0^2C^2} = |t_0|\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$= \frac{|x_0A + y_0B + z_0C + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

obs.: Analog. podemos fazer a mesma arg. quando $S=\{O;\vec{i},\vec{j}\}$ (o universo é uma reta) cuja eq. da reta é $Ax+By+C=0$ e $(\vec{n})_S=(A,B)$ e eq. da reta normal.

Exercício

(a) Calcule a distância do pto F ao plano F'DC'

(b) Ache o ângulo entre as retas FE' e FB.

(c) Ache a eq. paramétrica da reta bissetriz do ângulo E'FB.

(d) Ache um plano paralelo ao plano F'DC' cuja distância é 2.

sol..

$$S=\left\{A;\ \frac{1}{4}\vec{AB},\ \frac{1}{2}\vec{AA'},\ \frac{1}{4}\vec{AF}\right\}$$

(a) $(F)_S=(0,0,4)$

$(\vec{F'D})_S=(2,-2,-2)$

$(\vec{DC'})_S=(2,2,0)$

$(\vec{DX})_S=(x-2,y,z-2)$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & x-2 \\ -2 & 2 & y \\ -2 & 0 & z-2 \end{pmatrix} = 0$$

$4\cdot(z-2)-4y+4(z-2)+4\cdot(x-2)=0$

$2z-4-y+x-2=0$

$$\boxed{x-y+2z-6=0.}$$

Eq. geral do plano F'DC'

$A=1,\ B=-1,\ C=+2,\ D=-6$

$$d(F, \text{plano } F'DC') = \frac{|0.1 + (-1).0 + 4.2 - 6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

(b)

$(\vec{FE'})_S = (2,2,0) \Rightarrow \|\vec{FE'}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$(\vec{FB})_S = (4,0,-4) \Rightarrow \|\vec{FB}\| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

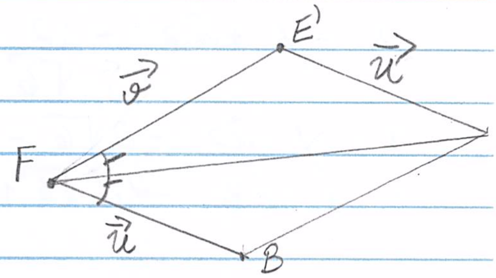
$$\vec{FE'} . \vec{FB} = \|\vec{FE'}\| . \|\vec{FB}\| . \cos\theta$$

$$8 = 4\sqrt{2}.2\sqrt{2}. \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$$

(c) Considere os vetores

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{FB}\|}\vec{FB} \Rightarrow (\vec{u})_S = \frac{(4,0,-4)}{\sqrt{32}}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{FE'}\|}\vec{FE'} \Rightarrow (\vec{v})_S = \frac{(2,2,0)}{\sqrt{8}}$$



Vetor da reta bissetriz de $E'\hat{F}B$ $= \vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{32}}(8,4,-4)$

$\Rightarrow (2,1,-1)$ (multiplica por $\frac{\sqrt{32}}{2}$)

$$(X)_S = (F)_S + t.(2,1,-1)$$

$(x,y,z) = (0,0,4) + t.(2,1,-1)$ ← eq. paramétrica.

(d) $d(G, \text{plano } F'DC) = 2 \Rightarrow G = F' + 2.\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

data

MAS $\{\vec{n}\}_S = (1,-1,2) \Rightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{6}$ e $\{F'\}_S = (0,2,4)$

$$(G)_S = (0,2,4) + 2 \cdot \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 2-\frac{2}{\sqrt{6}}, 4+\frac{4}{\sqrt{6}}\right).$$

$X \in$ plano // ao plano $F'DC'$

$$\Rightarrow \vec{GX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\left(x-\frac{2}{\sqrt{6}}, y-2+\frac{2}{\sqrt{6}}, z-4-\frac{4}{\sqrt{6}}\right) \cdot (1,-1,2) = 0.$$

$$x-\frac{2}{\sqrt{6}} - y+2-\frac{2}{\sqrt{6}} + 2z - 8 - \frac{8}{\sqrt{6}} = 0$$

$$x-y+2z-\frac{12}{\sqrt{6}}-6=0$$

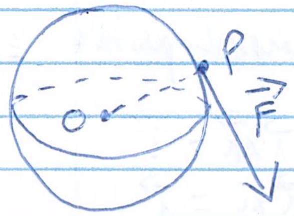
$$x-y+2z-2\sqrt{6}-6=0$$

$$x-y+2z-2\cdot(\sqrt{6}+3)=0.$$

Aula 17

Produto Vetorial (só vale p/ o espaço)

Motivação: como descrever o movimento de rotação de uma bola de centro O e raio R que sofre a ação de uma força F num ponto P da superfície?



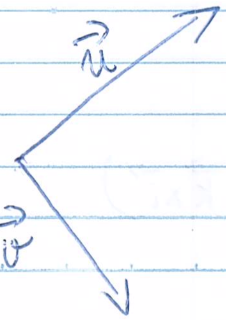
Claramente a resultante é uma grandeza vetorial

$$\vec{\Sigma} = \vec{OP} \times \vec{F}$$

Definição: dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço, o produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ (nesta ordem) denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vetor caracterizado por

$$\vec{u} \times \vec{v} \iff \begin{cases} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \operatorname{sen}\theta \quad (\theta \text{ é o ang. entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v}) \\ \text{direção de } \vec{u} \times \vec{v} \text{ é perpendicular a } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \\ \text{sentido de } \vec{u} \times \vec{v} = \text{regra da mão direita.} \end{cases}$$

Regra da mão direita: dados dois vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ nesta ordem a regra é a seguinte: coloque a mão aberta no sentido do vetor $\vec{u}$ de forma que a palma da mão aponte p/ o segundo vetor. Para onde o polegar apontar é o que chamamos de sentido da regra direita.



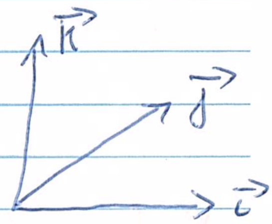
Pergunta: Como calcular efetivamente $\vec{u} \times \vec{v}$?

Def: Uma base ortonormal positiva é uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de modo que $\vec{k}$ o sentido de, é o sentido da regra da mão direita de $(\vec{i}, \vec{j})$.

Consequências

1-) Se $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal positiva então

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



2-) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

$\lambda \vec{u} \times \vec{w} = \lambda (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \lambda \vec{v} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

3-) Seja $\beta = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva e $(\vec{u})_\beta = (x_1, x_2, x_3)$ e $(\vec{v})_\beta = (y_1, y_2, y_3)$

$\vec{u} \times \vec{v} = ?$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k})$$
$$= y_1 . (\vec{u} \times \vec{i}) + y_2 (\vec{u} \times \vec{j}) + y_3 . (\vec{u} \times \vec{k}).$$

Mas

$$\vec{u} \times \vec{i} = (x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}) \times i$$
$$= x_1 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_2 . (\vec{j} \times \vec{i}) + x_3 (\vec{k} \times \vec{i})$$
$$= 0 - x_2 \vec{k} + x_3 \vec{j}$$

data

S T Q Q S S D

$$\vec{u} \times \vec{j} = x_1.(\vec{i} \times \vec{j}) + x_2(\vec{j} \times \vec{j}) + x_3.(\vec{k} \times \vec{j})$$
$$= x_1 \vec{k} + 0 - x_3.\vec{i}$$

$$\vec{u} \times \vec{k} = x_1.(\vec{i} \times \vec{k}) + x_2(\vec{j} \times \vec{k}) + x_3.(\vec{k} \times \vec{k})$$
$$= -x_1 \vec{j} + x_2 \vec{i} + 0$$

Substituindo temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = y_1.(-x_2 \vec{k} + x_3 \vec{j}) + y_2(x_1 \vec{k} - x_3 \vec{i}) + y_3.(-x_1 \vec{j} + x_2 \vec{i})$$
$$= -x_2 y_1 \vec{k} + x_3 y_1 \vec{j} + x_1 y_2 \vec{k} + x_3 y_2 \vec{i} - x_1 y_3 \vec{j} + x_2 y_3 \vec{i}$$
$$= (-x_3 y_2 + x_2 y_3)\vec{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

$\therefore$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} -\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\doteq \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$ determinante simbólico.

Exercício 1: Seja $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal não positiva. Sejam $(\vec{u})_\beta = (2, -1, 1)$ e $(\vec{v})_\beta = (3, 1, 2)$. Calcule

(a) $\vec{u} \times \vec{v}$

(b) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Sol.

(a) Considere a nova base $\beta' = \{\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k}\}$ que é ortonormal positiva.

Logo $(\vec{u})_\beta = (2,-1,1) \Rightarrow (\vec{u})_{\beta'} = (2,-1,-1)$

$(\vec{v})_\beta = (3,1,2) \Rightarrow (\vec{v})_{\beta'} = (3,1,-2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{i}' + 1\vec{j}' + 5\vec{k}' = 3\vec{i} + 1\vec{j} - 5\vec{k}.$$

b-) Área do paralelog $= \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$.

Exercício 2: Seja $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ um sist. ortonormal positivo.

(a) Em rel. ao sist. de coord. considere as retas

$$r_1 \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Mostre geometricamente que estas retas pertencem a um mesmo plano

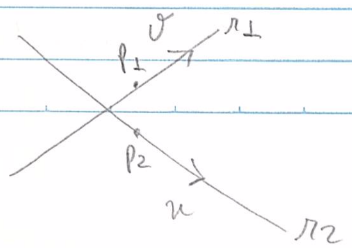
(b) Ache uma eq. paramétrica de uma reta perpendicular comum as retas r_1 e r_2

(c) Calcule a distância do ponto $P = (2,-1,0)$ a reta r_2 e a distância de P ao reta r_1.

Sol.

(a) $r_1 : (x,y,z) = \overbrace{(2,-1,3)}^{P_1} + t.\overbrace{(2,-3,1)}^{\vec{v}}$

$r_2 : (x',y',z') = \underbrace{(1,0,3)}_{P_2} + t'\underbrace{(-1,2,-1)}_{\vec{u}}$



Determinando se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são L.D. ou L.I.

$$\det\begin{pmatrix} +2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$ As retas r_1 e r_2 não são reversas

$\Downarrow$

$(P_1P_2)_s = (P_2)_s - (P_1)_s$

$r_1 // r_2$ ou $r_1 = r_2$ (coincidentes).

Verificando se as retas r_1 e r_2 são paralelas

$$\text{CARACT}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$ r_1 e r_2 são concorrentes.

b-)

A perpendicular comum é a interseção do plano Π_1 e plano Π_2

plano $\Pi_1 \doteq$ contem a reta r_1 e $\vec{v} \times \vec{u}$

" $\Pi_2 \doteq$ " " " r_2 e "

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & +1 \end{vmatrix} = -1\vec{i} - 1\vec{j} - \vec{k} = (-1,-1,-1).$$

Eq. geral do plano Π_1

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & x-2 \\ -1 & -3 & y+1 \\ -1 & 1 & z-3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{u}\times\vec{v} & \vec{v} & \overrightarrow{P_1X} \end{array}$$

$-4x - y + 5z - 8 = 0$

Eq. geral do plano Π_2

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ -1 & -1 & z-3 \end{pmatrix} = 0$$

$3x + 0y - 3z + 6 = 0.$

data

plano $\pi_1 \wedge$ plano π_2 $= \begin{cases} -4x - y + 5z - 8 = 0 & (I) \\ 3x + 0y - 3z + 6 = 0 & (II) \end{cases}$

(II) $x - z + 2 = 0$

$\boxed{x = z - 2}$

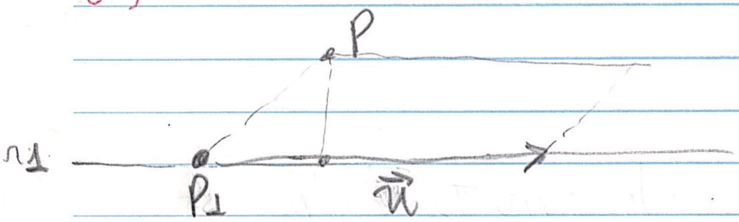
(I) $-4.(z-2) - y + 5z - 8 = 0$

$-4z + \cancel{8} - y + 5z - \cancel{8} = 0$

$\boxed{y = z}$

$(x,y,z) = (z-2, z, z) = (-2,0,0) + z.(1,1,1)$ eq. da reta $\perp$ ao plano $\pi_1 \wedge$ plano π_2

(c)



Área do paralelogramo acima $= d(P, r_1) . \|\vec{u}\|$

$\|\overrightarrow{PP_1} \times \vec{u}\|$ $\therefore$ $d(P, r_1) = \dfrac{\|\overrightarrow{PP_1} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Analog. $d(P, r_2) = \dfrac{\|\overrightarrow{PP_2} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

fim da matéria 2ª prova.