Aula 11

Dependência Linear (coord.)

Seja $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ vetores e a eq. vetorial
$$x_1\vec{v_1} + \dots + x_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

- Esta eq possui sol. trivial $\Leftrightarrow \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ são L.I.
- " " " " ñ trivial $\Leftrightarrow \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ é L.D.

Teorema: No espaço qualquer conjunto de 4 vetores é sempre linearmente dependentes.

Justificativa. Sejam $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_4}$, 4 vetores e $\beta = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base p/ o espaço $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ são L.I's. Considere a eq. vetorial

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3} + x_4\vec{v_4} = \vec{0}$$
$$x_1(\vec{v_1})_\beta + x_2.(\vec{v_2})_\beta + x_3.(\vec{v_3})_\beta + x_4.(\vec{v_4})_\beta = (0,0,0)$$
$$x_1.(a_1,a_2,a_3) + x_2.(b_1,b_2,b_3) + x_3.(c_1,c_2,c_3) + x_4.(d_1,d_2,d_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 = 0 \end{cases}$$

o sist. acima possui sol $\Leftrightarrow$

$$\text{Caract}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{É verdade.}}}{=} \text{Caract}\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 \end{array}\right)$$

< 4

Logo n^{o} variáveis livres $= 4 -$ característica$(A) > 0$

$\Rightarrow$ Sist. possível e indeterminado

$\Rightarrow$ sol. não é única

$\Rightarrow$ L.D.

$\Rightarrow$ 1 vetor é C.L. dos outros.

Teorema: Seja $\beta = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base p/ o espaço e $(\vec{v_1})_\beta = (a_1, a_2, a_3)$, $(\vec{v_2})_\beta = (b_1, b_2, b_3)$ e $(\vec{v_3})_\beta = (c_1, c_2, c_3)$
Então

$$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \text{ são L.I.} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Analog.

$$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \text{ são L.D.} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Teorema (no plano). Seja $\beta = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ uma base p/ o plano e sejam $(\vec{v_1})_\beta = (a_1, a_2)$ e $(\vec{v_2})_\beta = (b_1, b_2)$

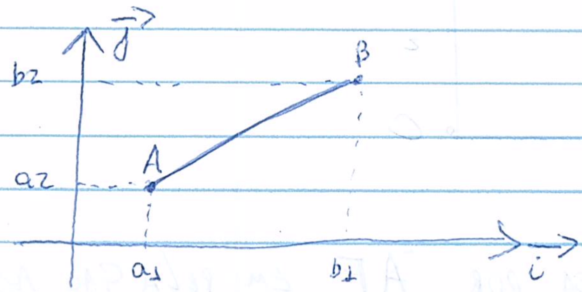
$$\vec{v_1}, \vec{v_2} \text{ são L.I} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\vec{v_1}, \vec{v_2} \text{ são L.D.} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Exercícios

(1) Considere o sistema S do plano α, $S = (O, \vec{i}, \vec{j})$ e

$(A)_S = (a_1, a_2)$ e $(B)_S = (b_1, b_2)$



Ache a eq. geral da reta que passa por A e B usando dependência linear.

sol. Se $X \in$ reta $AB \iff \vec{AX}$ e $\vec{AB}$ são L.D.

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{AX})_\beta = (X)_\beta - (A)_\beta = (x - a_1, y - a_2) \\ (\vec{AB})_\beta = (B)_\beta - (A)_\beta = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{array}\right\} \text{são L.D's}$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$(b_2 - a_2) \cdot (x - a_1) - (y - a_2) \cdot (b_1 - a_1) = 0 \quad , b_1 - a_1 \neq 0$$

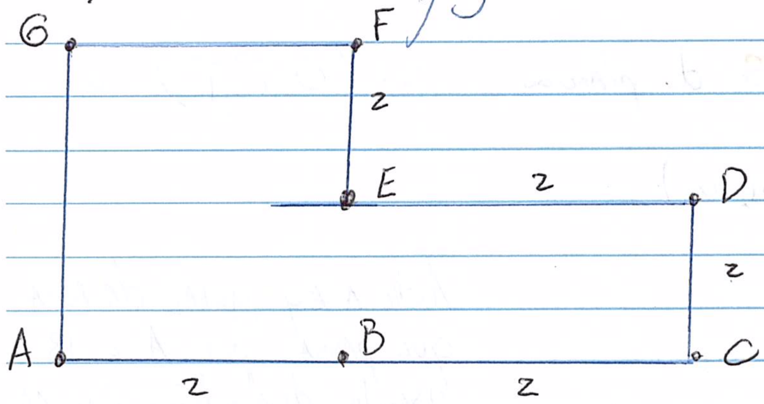
$$(y - a_2) = \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} (x - a_1)$$

$$y = \left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right) x - a_1 \cdot \left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right) + a_2$$

Eq. da reta no ref. ao sist. de coord. S.

$$y = mx + c$$

(2) Considere a fig. abaixo



Ache a eq. geral que passa por AF em relação ao sist.

$S = \left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}\right)$ e $S' = \left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$

Sol

$X \in$ reta $AF \Rightarrow \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AF}$ são L.D.

$(\overrightarrow{AF})_S = (2,4)$

$(\overrightarrow{AX})_S = (x-0, y-0)$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 4 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{4x - 2y = 0}$

$(AF)_{S'} = (F)_{S'} - (A)_{S'}$? $= (b_1, b_2)$

$\overrightarrow{AF} = b_1\,\overrightarrow{AD} + b_2\,\overrightarrow{AB}$

$(\overrightarrow{AF})_S = b_1\,(\overrightarrow{AD})_S + b_2\,(\overrightarrow{AB})_S$

$(2,4) = b_1.(4,2) + b_2.(2,0)$ $\Rightarrow \begin{cases} 4b_1 + 2b_2 = 2 \\ 2b_1 = 4 \end{cases}$

$\therefore b_1 = 2$ e $b_2 = -3$

$(\overrightarrow{AF})_{S'} = (2-3)$

$(\overrightarrow{AX})_{S'} = (x', y')$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} x' & 2 \\ y' & -3 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{-3x' - 2y' = 0}$

AULA 12

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA E DO PLANO

SEJA $S = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ UM SIST. DE COORD. NO ESPAÇO.
SEJAM $\vec{v} \neq 0$ e P UM PONTO DO ESPAÇO

$\therefore$ $X = P + t \cdot \vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ É A EQ. VETORIAL DA RETA QUE PASSA POR P E TEM A DIREÇÃO DE $\vec{v}$.

SE $(X)_S = (x, y, z)$, $(P)_S = (p_1, p_2, p_3)$ e $(\vec{v})_S = (a_1, a_2, a_3)$
ENTÃO A EQ. VETORIAL EM REL. AO SIST. S É

$$(X)_S = (P)_S + t \cdot (\vec{v})_S$$
$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = p_1 + t a_1 \\ y = p_2 + t \cdot a_2 \\ z = p_3 + t \cdot a_3 \end{cases}$$

É A EQ. PARAMÉTRICA DA RETA QUE PASSA POR P E TEM DIREÇÃO DE $\vec{v}$ EM REL. AO SIST. S tq $\text{CARAC}(a_1, a_2, a_3) = 1$. (ISTO É, $a_i \neq 0$ p/ algum i). $\vec{v} \neq \vec{0}$

Agora sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dois vetores não colineares ($\vec{v}, \vec{w}$ são L.I.).

$X = P + t_1 \cdot \vec{v} + t_2 \vec{w}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ É A EQ. VETORIAL do plano α gerado pelos vet. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ que passa pelo ponto P.

$(\vec{v})_S = (a_1, a_2, a_3)$
$(\vec{w})_S = (b_1, b_2, b_3)$
então aplicando o sist. de coord na eq acima temos

$$\begin{cases} x = p_1 + t_1 a_1 + t_2 b_1 \\ y = p_2 + t_1 a_2 + t_2 b_2 \\ z = p_3 + t_1 a_3 + t_2 b_3 \end{cases}$$

EQ. PARAMÉTRICA do plano α ref. no sist. S tq $\text{CARAC}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$ (pois $\vec{v}$ e $\vec{w}$ LI's).

Equação geral de um plano no espaço

Seja P um ponto e $\vec{v}, \vec{w}$ vetores L.I. Considere $X \in$ ao plano gerado por $\vec{v}, \vec{w}$ passando por P. Logo $\overrightarrow{XP}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D.

$$X = P + t_1 \vec{v} + t_2 \vec{w} \quad \therefore \quad \overrightarrow{XP} = -t_1 \vec{v} - t_2 \vec{w}.$$

Seja $S = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ um sist. de coord. no espaço e sejam

$(P)_S = (p_1, p_2, p_3)$ $\qquad$ $(X)_S = (x, y, z)$.

$(\vec{v})_S = (a_1, a_2, a_3)$

$(\vec{w})_S = (b_1, b_2, b_3)$

$(\overrightarrow{XP})_S = (p_1 - x, p_2 - y, p_3 - z)$

$\overrightarrow{XP}, \vec{v}, \vec{w}$ L.D. $\iff$ em termos do sist. de coord. o sist. linear em t_1, t_2, t_3,

$$\begin{pmatrix} p_1 - x & a_1 & b_1 \\ p_2 - y & a_2 & b_2 \\ p_3 - z & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

não tem sol. única.

$$\iff \text{caract.} \begin{pmatrix} p_1 - x & a_1 & b_1 \\ p_2 - y & a_2 & b_2 \\ p_3 - z & a_3 & b_3 \end{pmatrix} < 3$$

$$\therefore \det \begin{pmatrix} p_1 - x & a_1 & b_1 \\ p_2 - y & a_2 & b_2 \\ p_3 - z & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 0.$$

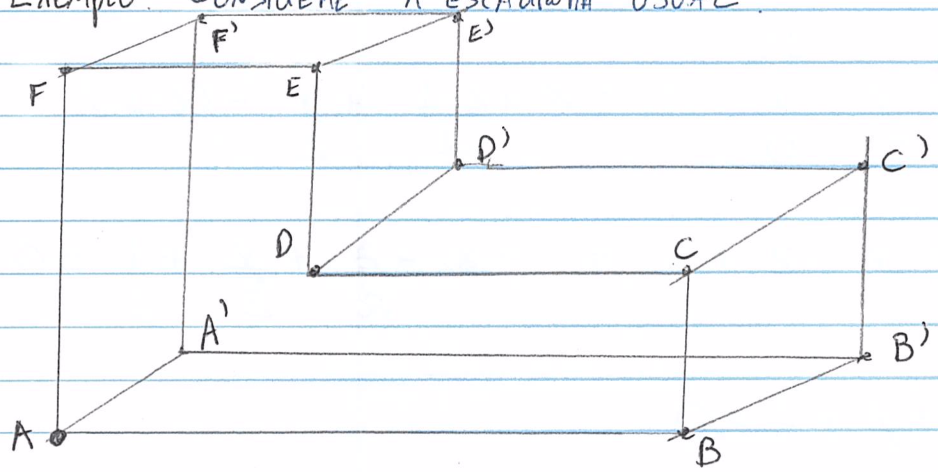
Aplicando o determinante geraremos uma equação do tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Eq. geral do plano que passa por P e tem vetores geradores $\vec{v}, \vec{w}$ L.I.'s em rel. ao sist. de coord. S.

Exercício: Calcule A, B, C, D em função das coord. na expressão acima.

Exemplo: Considere a escadinha usual.



(a) coloque um sist. de coord. na figura

(b) em rel. ao sist. S de coord. ache a eq. geral do plano FB'E'

(c) ache o ponto de interseção da reta A'C com o plano "

(d) em relação ao sistema S descreva geometricamente a equação $2x + y = 0$.

(e) ache a eq. paramétrica da reta determinada por FB'E' $\cap$ plano $(2x + y = 0)$

(f) esboce (e).

sol

(a) $S = \{A; \vec{AB}, \vec{AA'}, \vec{AF}\}$

(b)

plano FB'E'

$(\vec{FB'})_S = (1,1,-1)$
$(\vec{FE'})_S = (1/2,1,0)$
$(F)_S = (0,0,1)$
$(X)_S = (x,y,z) \in$ plano FB'E'

$\therefore \vec{FX}, \vec{FE'}, \vec{FB'}$ são L.D. $\iff \det\begin{pmatrix} x & 1/2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

$$\det\begin{pmatrix} x & 1/2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x & 1/2 \\ y & 1 \\ z-1 & 0 \end{matrix} = -x + \frac{z-1}{2} + \frac{y}{2} - (z-1)$$

$$-x + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y}{2} - z + 1 = -x - \frac{z}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Eq. geral $-2x - z + y + 1 = 0$

C-) plano FB'E $\quad -2x + y - z + 1 = 0$

reta A'C $\quad X = A' + t.\vec{A'C}, \; t \in \mathbb{R}$ — Eq. vetorial

$(X)_S = (A')_S + t.(\vec{A'C})_S$ — Eq. paramétrica

$(x,y,z) = (0,1,0) + t.(1,-1,1/2)$

$(A')_S = (0,1,0)$
$(\vec{A'C})_S = (1,-1,1/2)$

$$\begin{cases} -2x + y - z + 1 = 0 \\ x = t \\ y = 1 - t \\ z = t/2 \end{cases}$$

$-2.t + (1-t) - \frac{t}{2} + 1 = 0$

$-2.t + 1 - t - \frac{t}{2} + 1 = 0$

$\boxed{t = \frac{4}{7}}$

$(X)_S = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$

d) $2x + y = 0$ É UMA EQ. do tipo $Ax + By + Cz + D = 0$

$(X)_S = (x, y, z)$ ∈ plano $(2x + y = 0)$

$$2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

$(X)_S = (x, y, z) = \left(\frac{y}{2}, y, z\right) = \left(\frac{y}{2}, y, 0\right) + (0, 0, z) =$

$$= (0,0,0) + = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) y + (0, 0, 1) . z$$

$(\vec{v})_S \doteq \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$; $(\vec{w})_S \doteq (0, 0, 1)$

$\vec{v} = \frac{1}{2} . \overrightarrow{AB} + 1 . \overrightarrow{AA'} + 0 . \overrightarrow{AF}$

$\vec{w} = 0 . \overrightarrow{AB} + 0 . \overrightarrow{AA'} + 1 . \overrightarrow{AF}$

$X = A + t_1 . \vec{v} + t_2 . \vec{w} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

e) $\begin{cases} -2x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + y + 0z + 0 = 0 \end{cases}$ Eq. geral do plano $FB'E'$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$\text{CARACT}(A) = 2 = \text{CARACT}(A:B) < 3$ ∴ 1 variável livre

$$\begin{cases} y - z = -1 + 2x \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} y = -2x \\ z = -4x + 1 \end{matrix}$$

$(x, y, z) \in$ plano $FB'E' \cap$ plano $(2x + y = 0)$

$$(x, y, z) = (x, -2x, -4x + 1)$$
$$= (0, 0, 1) + (1, -2, -4).x$$

$$(X)_S = (F)_S + t.(\vec{u})_S \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = 1.\overrightarrow{AB} + (-2).\overrightarrow{AA'} + (-4).\overrightarrow{AF}.$$