data

# Aula 8

## Sist. de Eq. Lineares I

Um sist. linear com n-icógnitas e n-equações é um sist. do tipo

$$\text{I}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Todo sist. I pode ser visto como sendo uma eq. vetorial

$$\text{II}\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}}_{B}$$

$$\boxed{AX = B}$$

$X, B$ matrizes coluna.

Casos particulares

(1) $n=1$

$[a]\,[x] = [b]$ tem $\begin{cases} \text{sol. única} \iff a \neq 0 \text{ e } \therefore x = a^{-1}b \\ \tilde{n} \text{ tem sol se } a=0 \text{ e } b\neq 0 \\ \text{infinitas sol. se } a=0 \text{ e } b=0. \end{cases}$

Exemplos de sist. não lineares

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^{-1} = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Transf. em um linear.

Definisão: A característica de uma matriz A é a ordem da maior submatriz quadrada de A cujo determinante é diferente de zero.

Exemplos

(1) $A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 24 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} L_1 \\ 2L_1 \\ \\ \end{array}$

carac(A) = 3? Não pois $\det A = 0$

carac(A) = 2 pois $\det\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$.

(2)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_1 + L_2 \\ L_4 = 2L_1 \end{array}$

carac(A) = 4? Não pois $\det A = 0$.

carac(A) = 3? Não pois qualquer submatriz de ordem 3 envolve $L_3$ e $L_4$

carac(A) = 2 pois $\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Exercício: Resolva o sistema

$$\mathrm{I}\begin{cases} x + 0y - z + 2w = 0 \\ 3x + y + 2z - w = 0 \\ 4x + y + z + w = 0 \\ 2x + 0y - 2z + 4w = 0 \end{cases} \iff \mathrm{II}\begin{cases} x + 0y - z + 2w = 0 \\ 3x + y + 2z - w = 0 \end{cases}$$

Claramente os sistemas são equivalentes isto é solusão de I = solusão de II, olhando o sist II na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

Como $\det B \neq 0 \Rightarrow$ existe $B^{-1}$

Lembrando $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ... pois $\det B = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - 2w \\ 5z + 7w \end{pmatrix}$$

$$\therefore (x, y, z) = (z - 2w, -5z + 7w, \underbrace{z, w}_{\text{variáveis livres}})$$

Portanto esse sist. possui infinitas soluções.

Pergunta: dado um sist. linear de ordem n, como saber se existe solução única, infinitas sol. ou ñ possui sol.?

Resposta: resolva o sistema!

(2) $n = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Se $A \neq 0 \Rightarrow$ carac$(A) = 1$ ou $2$

data

CARACT $A = 2 \Rightarrow \det A \neq 0$ e ...

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0 \Rightarrow$ sist. impossível ou infinitas sol. (depende de $f$).

(3) $n > 2$ ? Como resolver sist. lineares?

Método do Escalonamento.

# Aula 9

## Sistemas de Eq. Lineares II (Escalonamento)

Uma eq linear em n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma eq. da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

em que $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

Um sistema de eq. lineares ou sist. linear é um conj. de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ $\quad i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$

Como eq. matricial o sist. pode ser escrito da forma

$$A.X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Referência: Elon, Álgebra Linear.

**Pergunta:** como resolver os sist. lineares?

**Idéia:** trocar o sist. original por outro equivalente que possua a mesma solução.

**Fatos:** operações elementares

(i) trocar a posição de duas eq.'s não altera o sist.
(ii) multiplicar a eq. por um escalar $\neq 0$ " " " "
(iii) somar a uma eq. outra eq. multiplicada por um escalar. " " "

**Técnica:** Escalonamento

Considere o sistema $AX = B$

$A = [A]_{m \times n}$ ; $B = [B]_{m \times 1}$ ;

**Ex:**
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} = A \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

**1º passo:** criar a matriz $(A \vdots B)$

chamada **matriz aumentada**

$$[A \vdots B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

data

2º passo) Verifique se $a_{11} \neq 0$, caso contrário troque de posição duas linhas tal que a prop. seja satisfeita.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

3º passo) torne os termos $a_{i1} = 0$ para $i \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4L_1 - 2L_4]{3L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

4º passo) torne os termos $a_{i2} = 0$ para $i > 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{5L_2 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

passo livre

$$\begin{array}{c} \\ \\ \div 3 \\ \div 2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

5 passo-) torne os termos $a_{i3} = 0$ p/ $i > 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{6L_3 - 5L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 7 \end{array}\right)$$

Repete os passos até que torne todos os termos $a_{ij} = 0$ $i > j$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 7 \end{array}\right) \doteq [A' \vdots B']$$

$$\underbrace{\quad}_{A'} \qquad \underbrace{\quad}_{B'}$$

$AX = B \Leftrightarrow A'X = B' \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ y + 2z + 3w = 1 \\ 5z + 5w = 2 \\ 35w = 7 \end{cases}$$

$w = \frac{1}{5}$ ; $z = \frac{1}{5}$ , $y = 0$ ; $x = \frac{1}{5}$

Exemplo 2: Seja o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - 2z &= 12 \end{aligned}$$

O escalonamento da sua matriz aumentada é :

data

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

. Então o sistema anterior é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 0x - y + 10z &= -3 \\ 0x + 0y + 0z &= -1 \end{aligned}$$

o qual é obviamente impossível $\therefore$ o sistema não tem solução

Exemplo 3: Considere o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\ 5x + 6y + 7z + 8t &= 2 \\ 9x + 10y + 11z + 12t &= 3 \end{aligned}$$

Escalonando a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

E portanto temos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ -4y - 8z - 12t = -3 \end{cases}$$

sistema possível e indeterminado.

Se $z$ e $t$ são variáveis livres $\Rightarrow$

$$x = z + 2t - \frac{1}{2} \quad e \quad y = -2z - 3t + \frac{3}{4}$$

ou seja, temos infinitas soluções.

Exercícios

1-) Use escalonamento p/ resolver os seguintes sist. lineares.

data

# Aula 10

## Sist. de Eq. Lineares (III)

Teorema de Rouché-Cappelli: Seja $AX=B$ um sist. linear no qual $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $X=(x_{ij})_{m\times 1}$, $B=(b_{ij})_{m\times 1}$. Então:

(a) Se caract $(A)$ = caract $(A \vdots B)$ o sist. é possível
(b) Se " $\neq$ " então " " " impossível
(c) Se " = " $< n$ então o número de variáveis livres é $n -$ caract$(A)$.

Exemplo: Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 0y - z + 2w = 0 \\ 3x + y + 2z - w = 0 \\ 4x + y + z + w = 1 \\ 2x + 0y - 2z + 4w = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Como vimos caract. $A = 2$. E caract $A \vdots B = ?$

- caract de $A \vdots B \neq 4$ pois $\det A = 0$. Ver $A \vdots B$ na outra folha
- caract $A \vdots B = 3$?

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= 1 - 3 - 2 + 4 = 0$. Mas $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & +2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & +1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & +4 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$ CARACT $A \vdots B = 3$

Neste caso o sist. É impossível.