data

S T Q Q S S D

Aula 5

Coordenadas de um vetor

Def. de coordenadas de um vetor dada uma base $\beta = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ p/ um espaço usual: as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em relação a β é uma terna numérica ordenada (x_1, x_2, x_3) denotada por

$$(\vec{v})_\beta = (x_1, x_2, x_3) \text{ se, e só se, o vetor } \vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$$

- no plano e $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

$$(\vec{v})_\beta = (x_1, x_2) \text{ se e só se } \vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$$

Exemplo: Considere as bases

$$\begin{cases} \beta_1 = (\vec{AB}, \vec{AF}, \vec{AA'}) \\ \beta_2 = (\vec{AF}, \vec{AB}, \vec{AA'}) \\ \beta_3 = (\vec{CD}, \vec{DD'}, \vec{AF}) \end{cases}$$

Encontre as coordenadas dos vetores nas bases

$\vec{AB}, \vec{AC'}, \vec{F'B}$

sol.

$$\vec{AB} = 1.\vec{AB} + 0\vec{AF} + 0\vec{AA'}$$
$$\therefore (\vec{AB})_{\beta_1} = (1,0,0)$$

$$\vec{AB} = 0\vec{AF} + 1.\vec{AB} + 0.\vec{AA'} \quad \therefore (\vec{AB})_{\beta_2} = (0,1,0)$$

$$\vec{AB} = -2.\vec{CD} + 0.\vec{DD'} + 0.\vec{AF} \quad \therefore (\vec{AB})_{\beta_2} = (-2,0,0)$$

$$\vec{AC'} = 1.\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AF'} + 1.\vec{AA'}$$

$$(\vec{AC'})_{\beta_1} = (1, \tfrac{1}{2}, 1) \quad e \quad (\vec{AC'})_{\beta_2} = (1, \tfrac{1}{2}, 1)$$

⊢ continuar o resto do ex. como tarefa.

Exemplo 2: Represente os vetores $(\vec{v})_{\beta_1} = (-2, -1, 1)$, $(\vec{u})_{\beta_2} = (-2, -1, 1)$ e $(\vec{w})_{\beta_3} = (-2, -1, 1)$

sol

$$\vec{v} = -2.\vec{AB} - 1.\vec{AF} + 1\vec{AA'}$$
$$\vec{u} = -2\vec{AF} - 1\vec{AB} + 1\vec{AA'}$$
$$\vec{w} = -2\vec{CD} - 1\vec{DD'} + 1.\vec{AF}$$

Def.: sist. de coord. no espaço: é um par (O, β) no qual O é a origem e β é uma base p/ o espaço; $S = (O, \beta) = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

• no plano $S = (O, \beta) = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Coord. de um ponto no sist. de coord. no espaço:

Seja $S = (O, \beta) = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ um sist. de coord. no espaço e P um ponto qualquer. As coord. do ponto P em rel. ao sist. de coord. S é a única terna numérica (x_1, x_2, x_3) denotada por

$$(P)_S = (x_1, x_2, x_3), \text{ tal que } \vec{OP} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$$

(def. análog. p/ o plano).

data

S T Q Q S S D

Exemplo: Considere os sist. de coordenadas

$S_1 = (A; \beta_1) = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AA'})$

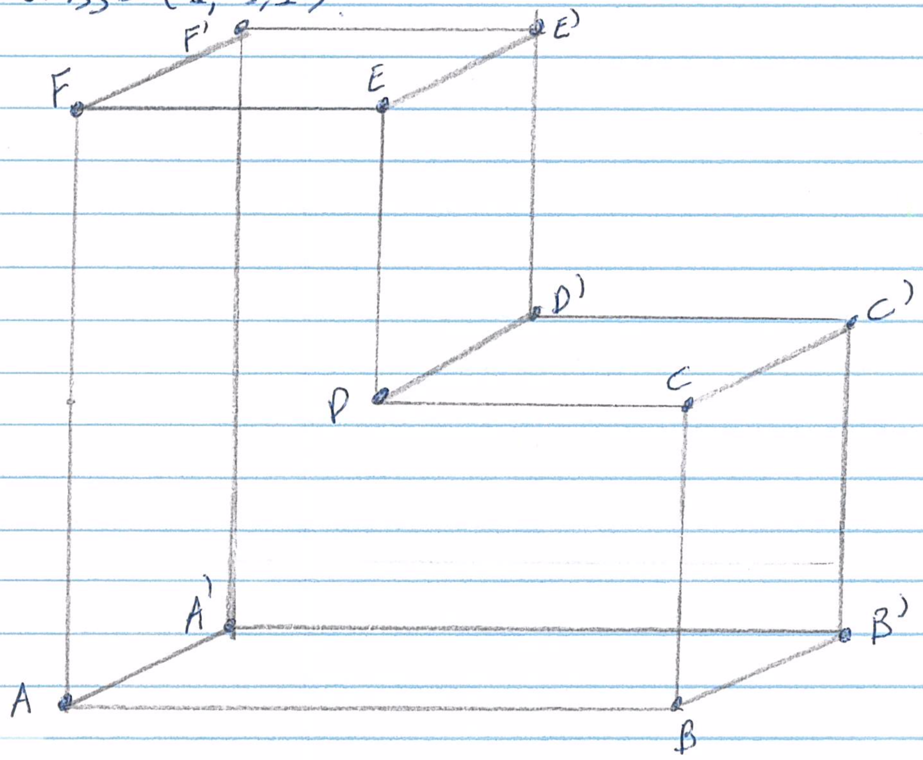
$S_2 = (D, \beta_1)$

$S_3 = (D, \beta_3) = (D; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AF})$

(a) Escreva $(E')_{S_1}$, $(E')_{S_2}$, $(E')_{S_3}$

R

(b) Localize os pontos $(P)_{S_1} = (1,-1,1)$, $(Q)_{S_2} = (1,-1,1)$ e $(R)_{S_3} = (1,-1,1)$



sol

(a) $\overrightarrow{AE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AF} + 1\overrightarrow{AA'} \therefore (E')_{S_1} = (\frac{1}{2}, 1, 1)$

Q

$\overrightarrow{DE'} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + 1\overrightarrow{AA'} \therefore (E')_{S_2} = (0, \frac{1}{2}, 1)$

$\overrightarrow{DE'} = 0\overrightarrow{CD} + 1\overrightarrow{DD'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} \therefore (E')_{S_3} = (0, 1, \frac{1}{2})$

P

data

Aula 6

Operações c/ vetores em termos de suas coordenadas

Seja $\beta = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base p/ o espaço
Sejam $(\vec{v})_\beta = (x_1, x_2, x_3)$ e $(\vec{u})_\beta = (y_1, y_2, y_3)$

Pergunta: como achar $(\vec{u}+\vec{v})_\beta$?

$(\vec{v})_\beta = (x_1, x_2, x_3) \iff \vec{v} = x_1 . \vec{e_1} + x_2 . \vec{e_2} + x_3 . \vec{e_3}$
$(\vec{u})_\beta = (y_1, y_2, y_3) \iff \vec{u} = y_1 . \vec{e_1} + y_2 . \vec{e_2} + y_3 . \vec{e_3}$

$\vec{u}+\vec{v} = (x_1+y_1)\vec{e_1} + (x_2+y_2)\vec{e_2} + (x_3+y_3)\vec{e_3}$

$\therefore (\vec{u}+\vec{v})_\beta = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

Analog. $(\lambda \vec{v})_\beta = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

+ Operação soma de ponto c/ vetor em termo de suas coord.

$S = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ sist. de coord.
$(P)_S = (p_1, p_2, p_3)$
$(\vec{u})_S = (y_1, y_2, y_3)$

$Q = P + \vec{u} \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{u} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}$

+ $(Q)_S$?

Jandaia

data

$(Q)_s = (q_1, q_2, q_3)$ (QUEREMOS ENCONTRAR q_1, q_2, q_3).

$\vec{OQ} = q_1\vec{e_1} + q_2\vec{e_2} + q_3\vec{e_3}$

$\vec{OP} = p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3 \cdot \vec{e_3}$

$\vec{OP} + (\vec{PQ}) = \vec{OQ} \iff (\vec{OP})_s + (\vec{PQ})_s = \vec{OQ}$

MAS $(\vec{PQ})_s = (\vec{u})_s$ pois $\vec{PQ} = \vec{u}$

$\therefore \quad q_1 = y_1 + p_1$
$\quad\; q_2 = y_2 + p_2$
$\quad\; q_3 = y_3 + p_3$

CONCLUSÃO: $(P + \vec{u})_s = \underbrace{(P)_s + (\vec{u})_s}_{\text{ponto}}$

PROLEMA: SEJAM $(A)_s = (a_1, a_2, a_3)$ e $(B)_s = (b_1, b_2, b_3)$
QUAL AS COORD. DE $\vec{AB}$ EM RELAÇÃO A S? isto é, $(\vec{AB})_s$?

sol. $(A)_s = (a_1, a_2, a_3) \iff (\vec{OA})_s = (a_1, a_2, a_3)$
$(B)_s = (b_1, b_2, b_3) \iff (\vec{OB})_s = (b_1, b_2, b_3)$

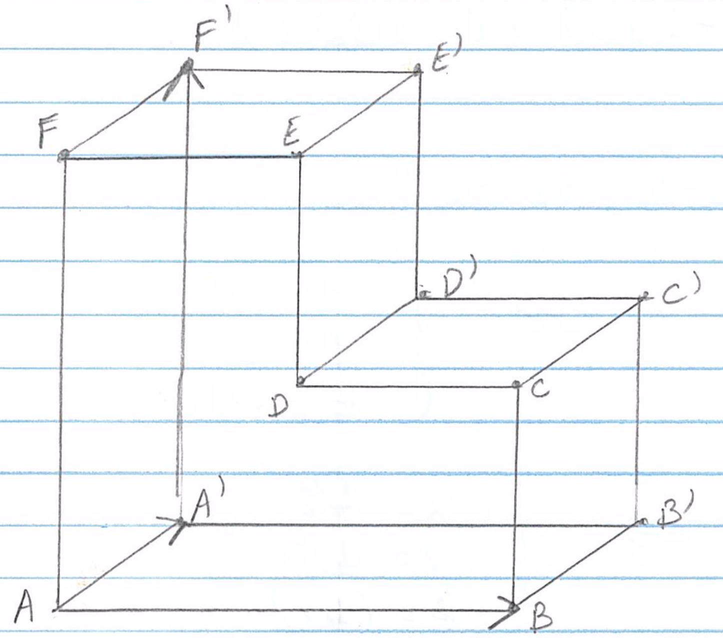
$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \iff \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$(\vec{AB})_s = (\vec{OB})_s + (-\vec{OA})_s = (b_1, b_2, b_3) + (-a_1, -a_2, -a_3)$

$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

data

Exercício: Colo que um sistema de coord. na figura abaixo e ache as coord. dos pontos de interseção da reta AC' c/ o plano BA'F'.



s/ sistema de coordenadas

$$\begin{cases} X = A + t\,\overrightarrow{AC'} \\ X = B + t_1\,\overrightarrow{BA'} + t_2\,\overrightarrow{A'F'} \end{cases}$$

$S = \{A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{A'F'}\}$

$(X)_S = (A)_S + t.(\overrightarrow{AC'})_S$

$(X)_S = (B)_S + t_1(\overrightarrow{BA'})_S + t_2.(\overrightarrow{A'F'})_S$

$(X)_S = (x, y, z)$?

$(A)_S = (0,0,0)$

$(B)_S = (1,0,0)$

$(\overrightarrow{AC'})_S = (1, 1, 1/2)$

$(\overrightarrow{BA'}) = (-1, 1, 0)$

$(\overrightarrow{A'F'})_S = (0,0,1)$

Lembrando $(\overrightarrow{PQ})_S = (Q)_S - (P)_S$.

data

substituindo nas eq. temos

$$\begin{cases}(x,y,z)=(0,0,0)+t.(1,1,\frac{1}{2})\\(x,y,z)=(1,0,0)+t_1.(-1,1,0)+t_2.(0,0,1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y,z)=(t,t,t/2)\\(x,y,z)=(1-t_1,t_1,t_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=x=1-t_1\\t=y=t_1\\t/2=z=t_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1-t_1\\t=t_1\\t=2t_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=1/2\\t_1=+1/2\\t_2=1/4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1/2\\y=1/2\\z=(1/4)\end{cases}$$

Exercício: Descreva as coordenadas dos planos $A'BF' \cap DF'D'$.

$$\begin{matrix}X=B+t_1\overrightarrow{BA'}+t_2.\overrightarrow{A'F'}\\X=F+s_1\overrightarrow{FD}+s_2.\overrightarrow{FD'}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}(X)_s=(B)_s+t_1.(\overrightarrow{BA'})_s+t_2(\overrightarrow{A'F'})_s\\(X)_s=(F)_s+s_1.(\overrightarrow{FD})_s+s_2.(\overrightarrow{FD'})_s\end{matrix}$$

$$(x,y,z)=(1-t_1,t_1,t_2)$$
$$(x,y,z)=(0,0,1)+s_1.(1/2,0,-1/2)+s_2.(1/2,1,-\tfrac{1}{2})$$
$$=(\tfrac{s_1+s_2}{2},s_2,\tfrac{-s_1-s_2}{2}+1)$$

$$\begin{matrix}x=1-t_1\\y=t_1\\z=t_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}x=\frac{s_1+s_2}{2}\\y=s_2\\z=\frac{-s_1-s_2}{2}+1\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}t_1=s_2\\2-2t_1=s_1+s_2\\2t_2-2=-s_1-s_2\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}s_2=t_1\\s_1=-3t_1+2\\t_2=t_1\end{matrix} \quad \therefore (x,y,z)=(1-t_1,t_1,t_1)$$
$$=(1,0,0)+t_1(-1,1,1)$$
$$X=B+t_1.\overrightarrow{BF'}$$

data

S T Q Q S S D

Aula 7

Dependência e independência linear de vetores (Geometricamente)

Def.: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente ~~in~~dependentes (L.D.) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são representados na mesma reta. Caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não sejam L.D. eles não representam na mesma reta.

Def.: Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são L.D. se são representados num mesmo plano, caso contrário diremos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são L.I.

Com essas def. podemos redefinir base

Base no espaço: conj. ord. de 3 vetores não coplanares
ou " " " " " L.I.

Objetivo: procurando uma outra def. de vetores L.I. e L.D. de forma a não fazer apelo geométrico e que seja fácil de generalizar.

Teorema: Dependência linear.

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D. então um deles se escreve como C.L. do outro. Reciprocamente, se um deles é C.L do outro $\Rightarrow$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.

Jandaia

data

b-) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D. $\Leftrightarrow$ um deles é C.L. dos outros dois
NO ESPAÇO.

justificativa de a-)

Suponhamos $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$. pois se um deles é $\vec{0}$ então o resultado é trivialmente válido.

Considere os versores $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Por hipótese, ambos possuem a mesma direção e possuem modulos iguais a 1 $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{ou} \quad \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{u} = \left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \left(-\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Recíproca.

Suponhamos $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Mas $\Rightarrow$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem a mesma direção (mas ñ necessariamente o mesmo sentido) $\Rightarrow$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.

Justificativa de b-)

$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L.D.
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. $\Rightarrow$ $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta\vec{v}$

para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema:

(i) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D. $\Leftrightarrow$ a eq. vetorial $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} = \vec{0}$ tenha uma solução não trivial (ñ nula)

(ii) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. $\Leftrightarrow$ a eq. vet. $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} = \vec{0}$ só tenha solução trivial.

Analogamente,

(iii) $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são L.D. $\Leftrightarrow$ a eq. vet. $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w} = \vec{0}$ tenha uma sol. ñ trivial

(iv) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I $\Leftrightarrow$ a eq. vet. $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w} = \vec{0}$ só tenha uma sol. trivial.

Justificativa de (i)

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D. e $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$. então $\begin{cases} \vec{u} = \alpha . \vec{v} \\ \vec{v} = \beta . \vec{u} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \vec{u} - \alpha\vec{v} = \vec{0} & (I) \\ -\beta\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} & (II) \end{matrix}$

p/ alg. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(I) $x_1 = 1$ e $x_2 = -\alpha$ $\Rightarrow$ $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

(II) $x_1 = -\beta$ e $x_2 = 1$ $\Rightarrow$ $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Reciprocamente,

$\exists\ (x_1, x_2) \neq (0,0)$ tq $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{u} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)\vec{v}$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.

data

S T Q Q S S D

Def.: Sejam $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$, n vetores. Diremos que $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ são L.D. $\iff$ a sol. da eq. vetorial $x_1\vec{v_1} + \dots + x_n\vec{v_n} = \vec{0}$ possui sol. não trivial.

Analog. $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ são L.I. $\iff$ a sol. da eq. $x_1\vec{v_1} + \dots + x_n\vec{v_n} = \vec{0}$ só possui sol. trivial.

Exercício: Verifique se os vetores $\vec{DF}, \vec{DF'}, \vec{DE'}$ são coplanares $\iff$ L.D.?

$$x_1 \cdot \vec{DF} + x_2 \vec{DF'} + x_3 \vec{DE'} = \vec{0}$$

Considere a base do espaço $\beta = \{\vec{AF}, \vec{AA'}, \vec{AB}\}$. Então

$$(x_1 \cdot \vec{DF} + x_2 \vec{DF'} + x_3 \vec{DE'})_\beta = (\vec{0})_\beta \iff x_1 \cdot (\vec{DF})_\beta + x_2 (\vec{DF'})_\beta + x_3 \cdot (\vec{DE'})_\beta = \vec{0}$$
$$\iff x_1 \cdot (1/2, 0, -1/2) + x_2 \cdot (1/2, 1, -1/2) + x_3 \cdot (1/2, 1, 0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ \dfrac{-x_1 - x_2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$\therefore$ sol. trivial $\Rightarrow$ vetores L.I.

Em geral: seja eq. vetorial $x_1\vec{v_1} + \dots + x_n\vec{v_n} = \vec{0}$ e considere uma base β. Logo

$$(x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \dots + x_n\vec{v_n})_\beta = (\vec{0})_\beta = (0, 0, \dots, 0)$$
$$x_1(\vec{v_1})_\beta + x_2(\vec{v_2})_\beta + \dots + x_n(\vec{v_n})_\beta = (0, 0, \dots, 0)$$
$$x_1 \cdot (a_1, b_1, c_1) + x_2 \cdot (a_2, b_2, c_2) + \dots + x_n \cdot (a_n, b_n, c_n) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$