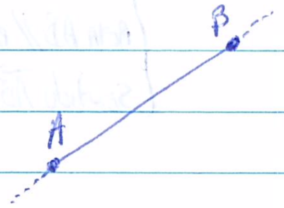
Aula 1: Vetores

A, B dois pontos distintos

"Geometria": $\exists$ uma única reta que contém os pontos A e B



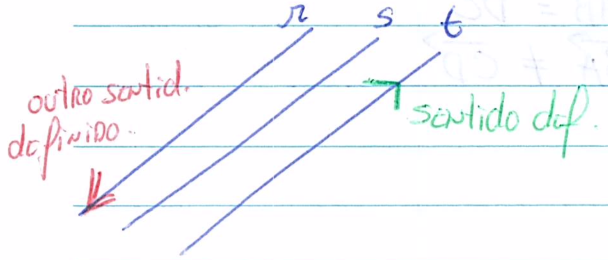
O conjunto de todos os pontos dessa reta que estão entre A e B é denominado segmento geométrico de reta.

Em matemática distinguimos dois tipos de grandezas

(a) Escalares: quando apenas um nº é suficiente para caracterizá-los

(b) Vetoriais: são caracterizados por (denotado por $\vec{v}$)

- um nº real positivo associado a $\vec{v}$, indicado por $\|\vec{v}\|$, chamado módulo de v com a propriedade que $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$.
- direção associada a $\vec{v}$ (quando $\|\vec{v}\| \neq 0$) $\doteq$ feixe de retas paralelas a uma reta
- sentido associado a $\vec{v}$ (quando $\|\vec{v}\| \neq 0$) $\doteq$ escolha de um sentido (convenção) em uma das retas paralelas a $\vec{v}$



$r // s // t$ (retas paralelas)

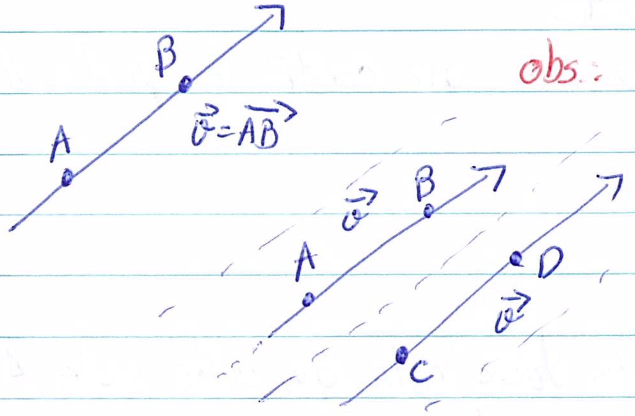
Ao longo desse curso $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no qual

(i) $\|\vec{v}\|$ = distância de A até B $= d(A,B)$

Note que $\|\vec{v}\| = 0 \iff A = B$ e $\vec{v} \doteq \overrightarrow{AA} \doteq \vec{0}$

(ii) direção de $\vec{v}$ $\doteq$ feixe de retas paralelas ao segmento AB

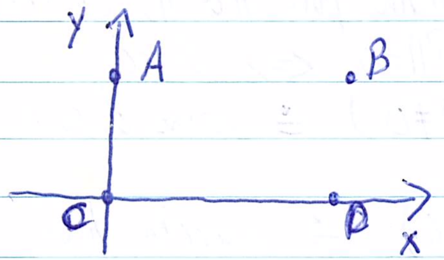
(iii) sentido de $\vec{v}$ $\doteq$ aponta de A para B



obs.: $\vec{v} = \vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} d(A,B) = d(C,D) \\ \text{reta } AB \,//\, \text{reta } CD \\ \text{sentido } \vec{AB} = \text{sentido } \vec{CD} \end{cases}$

Dessa forma vetor não é segmento orientado! Além disso segmento orientado não é vetor; é apenas um representante de um vetor!

Exemplo: No sistema cartesiano considere os pontos



$A = (0,2)$

$B = (5,2)$

$C = (0,0)$

$D = (5,0)$

Então $\vec{AB} = \vec{CD}$ mas $\vec{AB} = \vec{DC}$

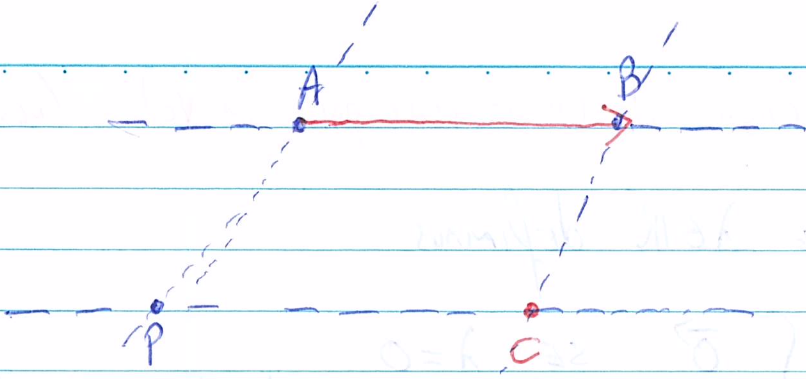
$\vec{BA} = \vec{DC}$ $\qquad$ $\vec{BA} \neq \vec{CD}$

Operação com vetores

(I) Ponto + vetor (nesta ordem)

Seja P um ponto e $\vec{v} = \vec{AB}$. O ponto C dado por

$C = P + \vec{v} = P + \vec{AB}$ é o ponto que satisfaz $\vec{PC} = \vec{AB}$



$\vec{AB} = \vec{PC}$

Propriedades

(i) $P + \vec{0} = P + \vec{PP} = P$

(ii) $A + \vec{AB} = B$

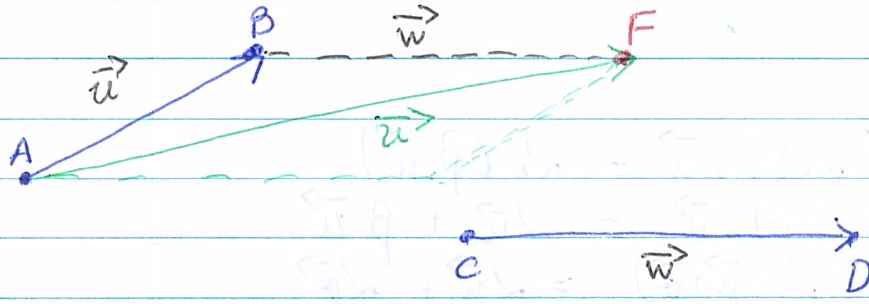
Resumo: pto + vetor = pto

(II) Vetor + Vetor

Sejam $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{w} = \vec{CD}$. Então

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$ tal que $\vec{u} = \vec{AF}$ satisfazendo

$F = B + \vec{CD}$



Propriedades

(i) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ associatividade

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(iv) $\forall \vec{u}$ existe um vetor $\vec{w}$ tq $\vec{u} + \vec{w} = \vec{0}$ e $\vec{w} = -\vec{u}$

Exemplo: $\vec{u} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{w} = -\vec{BA}$

(v) $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$

(vi) $P + \vec{u} = Q + \vec{u} \iff P = Q$

(III) Multiplicação de um nº real por um vetor (nesta ordem)

Dado $\vec{u}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos

$$\lambda\vec{u} \equiv \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \lambda = 0 \\ \lambda > 0 & \begin{cases} \|\lambda\vec{u}\| = \lambda\,\|\vec{u}\| \\ \text{direção de } \lambda\vec{u} = \text{direção de } \vec{u} \\ \text{sentido de } \lambda\vec{u} = \text{sentido de } \vec{u} \end{cases} \\ \lambda < 0 & \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\| \\ & \text{direção de } \lambda\vec{u} = \text{direção de } \vec{u} \\ & \text{sentido de } \lambda\vec{u} = \text{sentido oposto de } \vec{u} \end{cases}$$

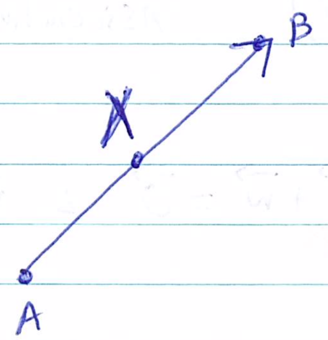
Propriedades:

(i) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$

(ii) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(iii) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(iv) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$



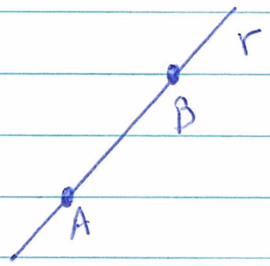
$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \in [0,1]$ são todos os ptos da semi reta $\overline{AB}$.

obs.: $X = A + t\,\overrightarrow{AB}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ são todos os pontos da reta AB.

tilibra

AULA 2: EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA E DO PLANO

AXIOMA: dados dois pontos A e B distintos então existe uma única reta r tal que A, B ∈ reta r.



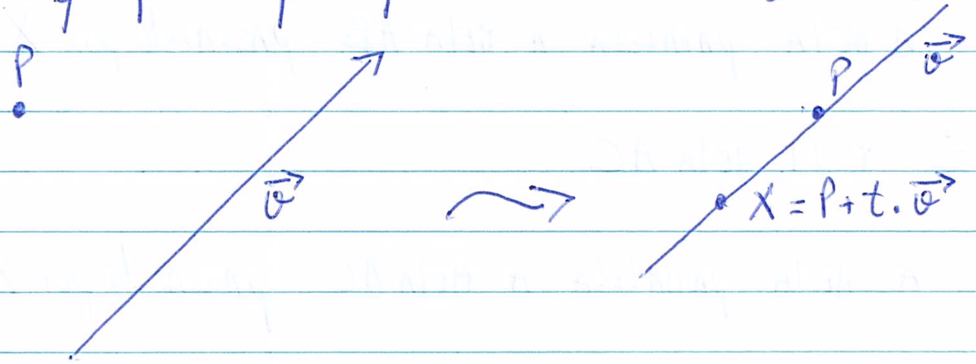
∴ É natural que qualquer ponto X ∈ a reta r possa ser determinado em função dos pontos A e B $(A \neq B)$

Como vimos na aula passada se $A \neq B$ então a reta r = a reta AB que é identificada com a equação

$$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}$$

denominada a eq. da reta que passa pelos pontos A e B.

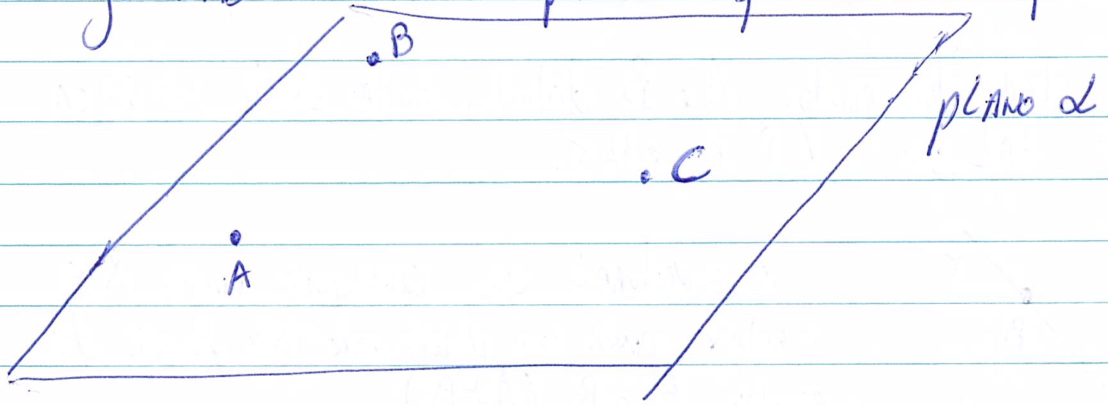
A expressão $X = P + t \cdot \vec{v}$ no qual P é um ponto e $\vec{v} \neq 0$ é um vetor, $t \in \mathbb{R}$ é chamada EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA que passa pelo ponto P e tem direção de $\vec{v}$



Equação vetorial no plano

Considere 3 pontos A, B, C não colineares (não pertencem simultaneamente a uma reta)

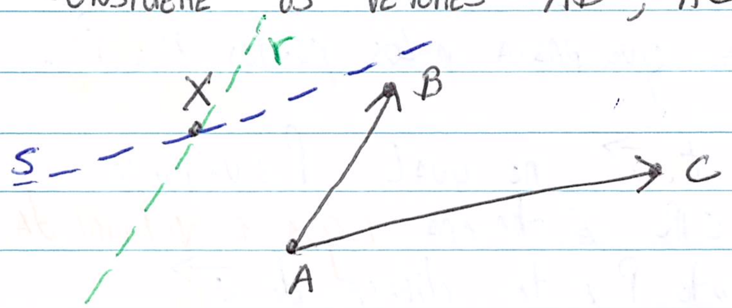
Logo existe um único plano α que contêm os pontos A, B, C



Seja X um ponto qualquer do plano α

Pergunta: como determinar X em função dos pontos A, B, C não colineares?

Considere os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AX}$



Seja r a reta paralela a reta AB passando por X

$X_1 \doteq r \cap$ reta AC

Seja s a reta paralela a reta AC passando por X

$X_2 \doteq s \cap$ reta AB

Agora

$X_1 \in$ reta $AC \Rightarrow \exists\, t_1 \in \mathbb{R}$ tq $X_1 = A + t_1 . \overrightarrow{AC}$

$X_2 \in$ reta $AB \Rightarrow \exists\, t_2 \in \mathbb{R}$ tq $X_2 = A + t_2 . \overrightarrow{AB}$

Pela regra do paralelogramo

$$\vec{AX} = \vec{AX_1} + \vec{AX_2}$$
$$= t_1 \vec{AC} + t_2 \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \quad X = A + t_1 \vec{AC} + t_2 \vec{AB}$$

Conclusão: qualquer ponto $X \in$ plano $\alpha =$ plano ABC ñ coli. é da forma

$$X = A + t_1 \vec{AC} + t_2 \vec{AB} \quad ; \; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

A, B, C não colineares

Analog. poderíamos escrever

$$X = B + s_1 \vec{BA} + s_2 \vec{BC} \quad ; \; s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Def.: A expressão $X = P + t_1 \vec{v} + t_2 \vec{u}$ c/ $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}, \vec{u}$ não representados na mesma reta (isto é, não possuem a mesma direção) é chamada equação vetorial do plano que contém o ponto P e os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são representantes do plano.

Exemplos: Considere a escadinha padrão. Determine:

(a) A equação vetorial da reta FB'

(b) " " " " paralela a reta FB' que passa por C

(c) " " " do plano $A'BF$

(d) A eq. do plano // plano $A'BF$ passando por F'

(e) A entidade geométrica que representa a intersecção do plano $A'BF$ com a reta AC'

(f) A entidade algébrica que representa o plano $A'BF \cap CEE'$

sol.

(a) $X = F + t \cdot \overrightarrow{FB'}$, $t \in \mathbb{R}$

(b) $X = C + t \cdot \overrightarrow{FB'}$, $t \in \mathbb{R}$

(c) $X = A' + t_1 \overrightarrow{A'B} + t_2 \overrightarrow{A'F}$

(d) $X = F' + t_1 \overrightarrow{A'B} + t_2 \overrightarrow{A'F}$

(e) $\begin{cases} X = A' + t_1 \overrightarrow{A'B} + t_2 \overrightarrow{A'F} \\ X = A + s \cdot \overrightarrow{AC'} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} X = A' + t_1 \overrightarrow{A'B} + t_2 \overrightarrow{A'F} \\ X = C + s_1 \cdot \overrightarrow{CE} + s_2 \cdot \overrightarrow{CE'} \end{cases}$

tilibra

Aula 3: Combinação Linear de vetores e base

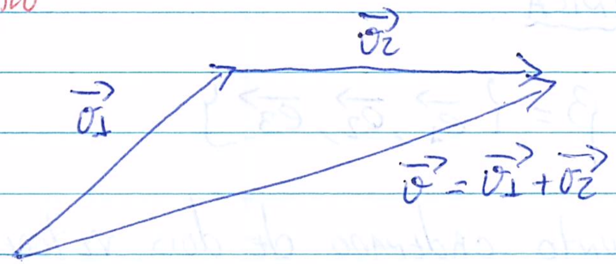
Def.: Um vetor $\vec{v}$ é combinação linear (CL) dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ se existirem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_n \vec{v_n}$$

($\vec{v}$ é C.L. de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$)

Exemplo

(1)



- $\vec{v}$ é CL de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ pois $\vec{v} = 1.\vec{v_1} + 1.\vec{v_2}$
- $-\vec{v}$ é CL de " " $-\vec{v} = (-1).\vec{v_1} + (-1).\vec{v_2}$
- $\vec{v_1}$ é " " $\vec{v}$ e $\vec{v_2}$ pois $\vec{v_1} = 1.\vec{v} + (-1)\vec{v_2}$
- $\vec{v_2}$ é " " $\vec{v}$ e $\vec{v_1}$ " $\vec{v_2} = \vec{v} + (-1)\vec{v_1}$

Pergunta: $\vec{0}$ é C.L. de $\vec{v}$? $\vec{0} = \lambda_1.\vec{v}$ para $\lambda_1 = 0$ $\forall \vec{v}$.

Conclusão: $\vec{0}$ é C.L. de qualquer conjunto de vetores

Nomenclatura: se $\vec{u}$ é C.L. de vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ diz-se que $\vec{u}$ é gerado por $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$.

obs.: $\vec{v}$ é sempre C.L. de $\vec{v}$ pois $\vec{v} = 1.\vec{v}$

(ii) se $\vec{v}$ é C.L. de $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ podem não ser únicos.

/ /

Ex: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} = 0.\vec{u} + 1.\vec{w} + 0.\vec{v}$

Conceito de base

Uma base para o

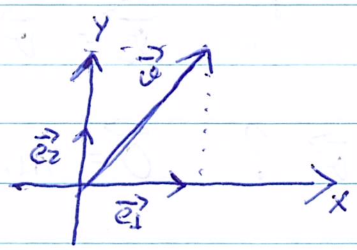
- ESPAÇO USUAL é o conjunto ordenado de três vetores de modo que qualquer vetor $\vec{v}$ se escreve como C.L. desses três vetores de maneira única.

Denotamos a base por $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

- plano α é um conjunto ordenado de dois vetores de modo que qualquer vetor $\vec{v}$ que é representado no plano se escreve como C.L. destes dois vetores de maneira única

Exemplo:

plano $\alpha = \mathbb{R}^2$



$\vec{e_1} = (1,0)$
$\vec{e_2} = (0,1)$

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ é base para o $\mathbb{R}^2$ pois

$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ (Pitágoras)

$= \lambda_1.\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2}$ $\therefore$ $\vec{v}$ é C.L. de $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$

Além do mais, λ_1 e λ_2 são únicos

$\vec{v} = \gamma_1 \vec{e_1} + \gamma_2 . \vec{e_2}$ temos $\vec{0} = (\gamma_1 - \lambda_1)\vec{e_1} + (\gamma_2 - \lambda_2)\vec{e_2}$

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2}$ $\Updownarrow$

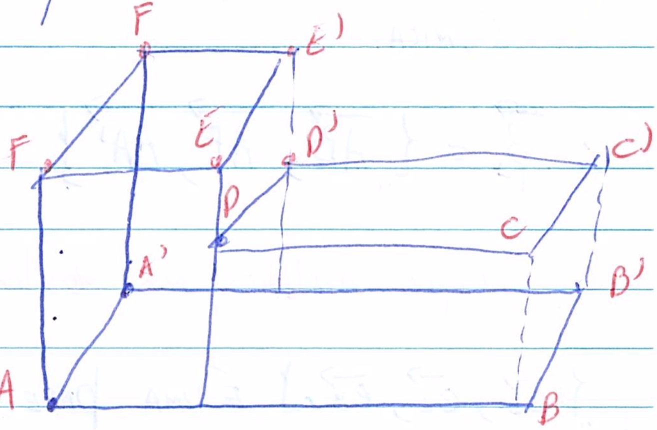
$(\lambda_1 - \gamma_1)\vec{e_1} = (\gamma_2 - \lambda_2)\vec{e_2}$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1 - \gamma_1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = \gamma_1$

$\gamma_2 - \lambda_2 = 0$ $\lambda_2 = \gamma_2$.

Exemplo 2:

$\beta_1 = \{\vec{AB}, \vec{AF}, \vec{AA'}\}$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$



$\forall \vec{v}, \exists\, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$\vec{v} = t_1 \vec{AB} + t_2 \vec{AF} + t_3 \vec{AA'}$

- Mostrando que t_1, t_2, t_3 são únicos

$\vec{v} = t_1 \vec{AB} + t_2 \vec{AF} + t_3 \vec{AA'}$

$\vec{v} = s_1 \vec{AB} + s_2 \vec{AF} + s_3 \vec{AA'}$

$\vec{v} - \vec{v} = 0 \Rightarrow (t_1 - s_1) . \vec{AB} + (t_2 - s_2)\vec{AF} + (t_3 - s_3)\vec{AA'} = 0.$

Suponhamos $(t_1 - s_1) \neq 0 \Rightarrow$

$$\vec{AB} = -\frac{(t_2 - s_2)}{(t_1 - s_1)} \vec{AF} - \frac{(t_3 - s_3)}{(t_1 - s_1)} \vec{AA'}$$

$\Leftrightarrow$

$$B = A - \frac{(t_2 - s_2)}{t_1 - s_1} \vec{AF} - \frac{t_3 - s_3}{(t_1 - s_1)} \vec{AA'}$$

$\Leftrightarrow$ $B \in$ plano $AA'F$ que é um absurdo $\therefore t_1 - s_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = s_1$

tilibra

De modo análogo se $t_2 - s_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $A' \in$ plano ABF que é um absurdo $\therefore$ $t_2 - s_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $t_2 = s_2$

$(t_3 - s_3)\overrightarrow{AA'} = 0 \underset{\overrightarrow{AA'} \neq \vec{0}}{\Rightarrow} (t_3 - s_3) = 0 \therefore t_3 = s_3$

Conclusão: $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2$ e $t_3 = s_3$, isto é, a decomposição é única.

$\therefore \beta_1 = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AA'}\}$ é uma base para o espaço.

O exemplo anterior nos mostra mais!

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é uma base e Q um ponto qualquer defina

$P_1 \doteq Q + \vec{e_1}$
$P_2 \doteq Q + \vec{e_2}$
$P_3 \doteq Q + \vec{e_3}$

$\Rightarrow$ P_1, P_2, P_3 e Q não podem estar no mesmo plano (não coplanares)

Analogamente,

P_1, P_2, P_3 e Q são não coplanares $\Rightarrow$ $\overrightarrow{QP_1}$, $\overrightarrow{QP_2}$ e $\overrightarrow{QP_3}$ formam uma base

Exemplo:

(1) $\{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EE'}, \overrightarrow{ED}\}$ determinam uma base?

Sim! pois E, F, E', D são não coplanares.

(2) $\{\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FE}\}$ é uma base?

Sim! pois P_1, P_2, P_3, E são não coplanares p/

$P_1 = E + \overrightarrow{B'B}$
$P_2 = E + \overrightarrow{DE}$
$P_3 = E + \overrightarrow{FE}$

obs.: A ordem dos elementos de uma base é importante. Logo se trocarmos a ordem nos vetores obtemos outra base.

Analogamente do que foi feito anteriormente temos que

$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\}$ é uma base do plano ABB'
pois A, B e B' são não colineares

Regra geral: Uma base $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ para um plano α ocorre quando os pontos Q, $P_1 \doteq Q + \vec{e_1}$, $P_2 \doteq Q + \vec{e_2}$ são não colineares ($Q \in$ plano α)

Exercício: Mostre que $\beta_2 = \{\overrightarrow{EE'}, \overrightarrow{DC}\}$ é uma base para o plano ABB'.

Exercício 2: Mostre que $\beta_3 = \{\overrightarrow{EE'}, \overrightarrow{AA'}\}$ não é uma base para o plano ABB'.