

AULA 19

CÔNICA c/o termo misto

CONSIDERE AGORA A FUNÇÃO

$$f(x,y) \doteq (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} (x,y) + 2(a_{13} \ a_{23}) + a_{33} = 0$$

c/ $a_{12} \neq 0$, isto é, c/o termo misto $2a_{12}xy$.

LEMBRANDO QUE $A = A^t$ MATRIZ SIMÉTRICA.

Def.: DADA UMA MATRIZ QUADRADA A DE ORDEM n , UM AUTOVALOR DA MATRIZ A É A RAÍZ DO POLINÔMIO DE GRAU n EM λ DADO POR

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

• CASO $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$$

$$A = A^t \Leftrightarrow b=c \Rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - c^2 = 0.$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - c^2)$$

$$\Delta = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2$$

$$\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2$$

$$\Delta = (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Def.: Se λ é um autovalor da matriz quadrada A de ordem n (isto é, $\det(A - \lambda I) = 0$). Um autovetor de A associado a λ é $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tal que

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \text{isto é} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

obs.: sempre existe autovetor associado a um autovalor λ . De fato, queremos encontrar \vec{v} t.q. $A \vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$.

Mas como $\det(A - \lambda I) = 0$ (λ é autovalor).

$\Rightarrow \text{CARACT}(A - \lambda I) < n$ e como $\text{CARACT}(A - \lambda I) = 0$
 $\text{CARACT}(A - \lambda I) = 0$

\Rightarrow que o sist. $(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

possui infinitas soluções.

Exercício: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) calcule seus autovalores

(b) e os autovetores correspondentes

(c) ache os autovetores correspondentes unitários.

sol.

$$(a) \det |A - \lambda I| = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 1 = 0$$

$$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

$$\lambda = -(-5) \pm \sqrt{5}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

(b) Autovalores associados a λ_1 . Sabemos que $\vec{v} = (x, y)$ é aut. vet. ASSOCIADO A $\lambda_1 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

DA primeira eq. temos $(2-\lambda_1)x + y = 0 \Rightarrow y = - (2-\lambda_1)x$

Logo $\vec{v} = (x, y) = (x, -(2-\lambda_1)x) = x \cdot (1, \lambda_1 - 2) = x \cdot \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$

$\vec{v}_{\lambda_1} = x \cdot \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ SÃO OS AUTOVELORES ASSOCIADOS A $\lambda_1, x \neq 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

TAREFA: ENCONTRAR OS AUTOVELORES ASSOCIADOS A λ_2 (denotado por \vec{v}_{λ_2})

(c) Digamos $\vec{v}_{\lambda_1} = 2 \cdot \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = (2, 3+\sqrt{5})$

BASTA ENCONTRARMOS $\vec{u}_{\lambda_1} = \frac{\vec{v}_{\lambda_1}}{\|\vec{v}_{\lambda_1}\|} = \frac{(2, 3+\sqrt{5})}{\sqrt{2^2 + (3+\sqrt{5})^2}}$

$$\vec{u}_{\lambda_2} = \frac{\vec{v}_{\lambda_2}}{\|\vec{v}_{\lambda_2}\|}$$

EXERCÍCIO 2: Desenhe a cônica dada por

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 10 = 0$$

A cônica é dada por $(x \ y) \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+3y \end{pmatrix} - 10 = 0$

$$2x^2 + xy + yx + 3y^2 - 10 = 0$$

$$2x^2 + 3y^2 + 2xy - 10 = 0$$

NOTE QUE
ESTA CÔNICA
POSSUI TERMO MISTO.

$$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$$

$$S' = \{O; \vec{u}_{A1}, \vec{u}_{A2}\}$$

$$(P)_S = (x, y) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Aqui } \vec{i} = (1, 0) \\ \vec{j} = (0, 1) \end{array} \right)$$

$$(P)_S = M_S^{S'} (P)_{S'} + (O)_S \quad \text{Mas } (O)_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_{A1} & \vec{u}_{A2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{e } (x, y) = (x', y') \cdot (M_S^{S'})^t \quad \text{pois}$$

$$\boxed{X = R X'}$$

CÔNICA EM S $(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 10 = 0.$

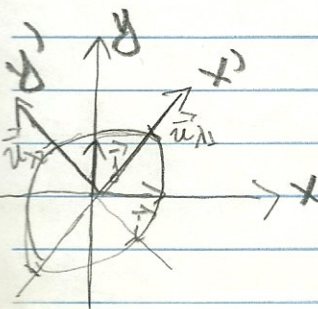
CÔNICA EM S' $(x' \ y') (M_S^{S'})^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M_S^{S'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 10 = 0$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 10 = 0$$

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 10$$

$$\left(\frac{x'}{a} \right)^2 + \left(\frac{y'}{b} \right)^2 = 1$$

$$p/ \quad a = \sqrt{\frac{\lambda_1}{10}}; \quad b = \sqrt{\frac{\lambda_2}{10}}$$



Elipse
c/ notação.