Aula 18

Cônicas

Conj. universo é o plano.

Seja $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ um sist. de coord. ortonormal.
Uma cônica num plano é o conj. dos pts P cuja coord. em rel. a S é $P = (P)_S = (x, y)$ satisfaz uma eq. do tipo

$$f(x,y) \doteq a_{11}x^2 + 2a_{12}x.y + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

que pode ser calculada na forma matricial:

$$(x, y).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (2a_{13} \quad 2a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

$(P)_S = X^t = (x, y)$ p/ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$X^t \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} X + 2\underbrace{(a_{13} \quad a_{23})}_{B} X + a_{33} = 0.$$

$X^t . A . X + 2 . B + a_{33} = 0$. Note que $A = A^t$ matriz simétrica

Exemplo: (a) $f(x,y) = 4x^2 + 5xy + 3y^2 + 5x - y + 3 = 0$

$$= X^t \begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} X + 2.(5/2 \quad -1/2) X + 3 = 0.$$

(b) $f(x,y) = (x \ y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0$

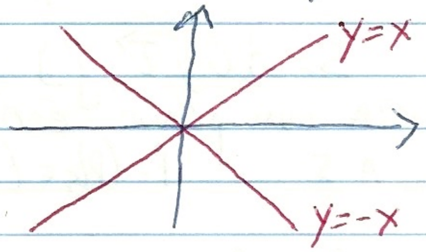
$$= 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0.$$

(c) $h(x,y) = (x \;\; y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$= x^2 + y^2 = 0$

$0 = x^2 + y^2 = (x+y).(x-y)$

$\Rightarrow y = -x$ ou $y = x$



Objetivo: descrever os ptos $(P)_S = (x,y)$ que satisfazem a cônica $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C} = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$.

Vamos estudar as cônicas que não têm o termo misto $x.y$, ou seja, $a_{12} = 0$ ($\tilde{n}$ possui o termo misto).

Ex: $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 + 3y + 4x - 8$.

Idéia: eliminar os termos lineares (fazendo uma translação de sistema de coord., isto é,

$S = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$
$S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$

$(P)_S = M_S^{S'}(P)_{S'} + (C)_S$

$(P)_S = Id.\,(P)_{S'} + (C)_S$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = x' + c_1 \\ y = y' + c_2 \end{cases}$

Cônica em (x,y) na forma matricial

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2.(2\ \ 3/2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 8 = 0$$

$\Downarrow$ cônica em $(x'\ y')$

$$(x'+c_1\ \ y'+c_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'+c_1 \\ y'+c_2 \end{pmatrix} + 2(2\ \ 3/2)\begin{pmatrix} x'+c_1 \\ y'+c_2 \end{pmatrix} - 8 = 0$$

$$(X'^t + C^t).A.(X'+C) + 2.B.(X'+C) - 8 = 0$$

$$(X'^t + C^t)AX' + (X'^t + C^t)AC + 2BX' + 2BC - 8 = 0$$

$$\underbrace{X'^tAX'}_{\text{parte quadrática}} + \underbrace{C^tAX' + X'^tAC + 2BX'}_{\text{linear}} + \underbrace{C^tAC + 2BC - 8}_{\text{cte.}} = 0$$

Como C^tAX' e X'^tAC são matrizes 1×1 $\Rightarrow$

$$(X'^tAC)^t = C^tA^tX' \quad (X'^{t\,t} = X')$$

Mas $A^t = A$ (A matriz simétrica) $\therefore$ $C^tAX' = X'^tAC$

Substituindo na eq. temos

$$X'^tAX' + C^tAX' + C^tAX' + 2BX' + C^tAC + 2BC - 8 = 0.$$

$$X'^tAX' + 2.C^tAX' + 2BX' + C^tAC + 2BC - 8 = 0$$

$$X'^tAX' + 2.(C^tA + B)X' + \underbrace{C^tAC + 2BC - 8}_{f(c_1,c_2)} = 0$$

Com a intensão de eliminar os termos lineares, devemos procurar C tq

$$C^t A + B = 0 \iff C^t A = -B \iff A^t C = -B^t$$

Como $A = A^t$ temos $\boxed{AC = -B^t}$

No exemplo: $A^t \cdot C + B^t = 0 \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -8 \\ c_2 = -3/2 \end{matrix}$$

Conclusão: No sist. $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$ onde $(C)_S = (-8 \; -3/2)$ a cônica se escreve

$$(x' \; y') \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-8 \; -3/2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -3/2 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (2 \; 3/2) \begin{pmatrix} -8 \\ -3/2 \end{pmatrix} - 8 = 0$$

$\iff$

$$\frac{(x')^2}{4} + (y')^2 + \frac{64}{4} + \frac{9}{4} - 32 - \frac{9}{2} - 8 = 0$$

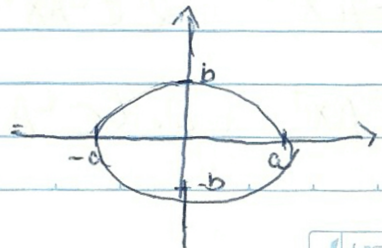
$$\iff \frac{(x')^2}{4} + (y')^2 - \frac{105}{4} = 0$$

$$\iff \frac{(x')^2}{105} + \frac{4}{105}(y')^2 = 1$$

Elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$a = \sqrt{105}$ deslocada no pto $(-8, -1{,}5)$.

$b = \frac{\sqrt{105}}{2}$



EXERCÍCIO: DESENHE A CÔNICA DE EQ.

$$(x\ y)\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+6x-12y=0.$$

sol.

$S=\{O;\vec{i},\vec{j}\}$ $\quad (P)_S = M_S^{S'}(P)_{S'}+(C)_S$

$S'=\{C;\vec{i},\vec{j}\}$ $\quad \boxed{X=X'+C}$

Eq. em S: $\begin{cases} X^tAX+2.BX=0, \text{ com } A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, B=(3\ -6 \\ X=X'+C\end{cases}$

$$X'^tAX'+2.(C^tA+B)X'+\underbrace{C^tAC+2BC}_{f(C)}=0$$

$C=?$ $\quad C^tA+B=0$

$A^tC+B^t=0$

$A^tC=-B^t$

$$\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ +6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\overbrace{\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}}^{\text{MATRIZ INVERSA}}\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-12\\ -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3/2\end{pmatrix}.$$

Logo $X'^tAX'+C^tAC+2BC=0$ em rel. a S' é

$$(x'\ y')\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+(1\ 3/2)\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3/2\end{pmatrix}+2.(3\ -6)\begin{pmatrix}1\\ 3/2\end{pmatrix}$$

$$(x'\ y')\begin{pmatrix}-3x'\\ 4y'\end{pmatrix}+(1\ 3/2)\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}+2.\{+3+(-9)\}$$

$$-3(x')^2+4.(y')^2-3+9+2.(-6)$$

$$-3(x')^2+4.(y')^2-6=0$$

SEMI EIXO IMAGINÁRIO a
" " REAL b

data

S T Q Q S S D

$$-\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{3/2} = 1$$

hipérbole $-\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$

$a = \sqrt{2}$ deslocada no

$b = \sqrt{\frac{3}{2}}$ pto C.