CAPÍTULO

2

UM ESTUDO GEOMÉTRICO DAS CÔNICAS

Neste capítulo abordaremos o estudo das Cônicas, que é um assunto bem antigo segundo a história da Matemática. Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380 - 320 a.C. aproximadamente), discípulo de Eudóxio na Academia de Platão, a descoberta das curvas cônicas ou seções cônicas quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que elipses, parábolas e hipérboles são obtidas como seções de um cone quando seccionado por planos não paralelos à sua base.

Nos escritos de Pappus de Alexandria, credita-se ao geômetra grego Aristeu (370-300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Seções Cônicas*.(DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013)

2.1 Elipse

Nesta seção realizaremos um estudo sobre elipses, definindo-as inicialmente do ponto de vista geométrico. Posteriormente com elementos de Geometria Analítica, obteremos uma expressão algébrica que as representem.

Definição 12. Considere α um plano e $0 \leq c < a$. Considere dois pontos F_1 e F_2 distintos pertencentes ao plano α e $d(F_1,F_2) \doteq 2c$. Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos P pertencente ao plano α cuja soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 é igual a constante $2a$, isto é

$$\mathscr{E}_{lip} = \{P \in \alpha \,:\, d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}. \tag{2.1}$$

Uma pergunta natural é a seguinte: como podemos encontrar tais pontos do conjunto $\mathscr{E}_{lip}$? Sejam C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ e r a reta mediatriz ao segmento passando por C.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da elipse e a reta passando por F_1 e F_2 é chamada de reta focal.

Por construção geométrica existem pontos B_1 e B_2, denominados vértices da elipse, pertencentes a reta ortogonal à reta focal, passando por C, denominada reta não focal r tal que $d(B_1,F_1)+d(B_2,F_2)=2a$, uma vez que $a>c$. De fato, como a reta r é a mediatriz ao segmento F_1F_2, temos que $B_1,B_2 \in r \cap \mathscr{E}_{lip}$ se e somente se $d(B_1,F_1)=d(B_2,F_2)=a$. Logo pelo Teorema de Pitágoras temos $b=\sqrt{a^2-c^2}$ é a distância de B_1 e B_2 ao centro C da elipse.

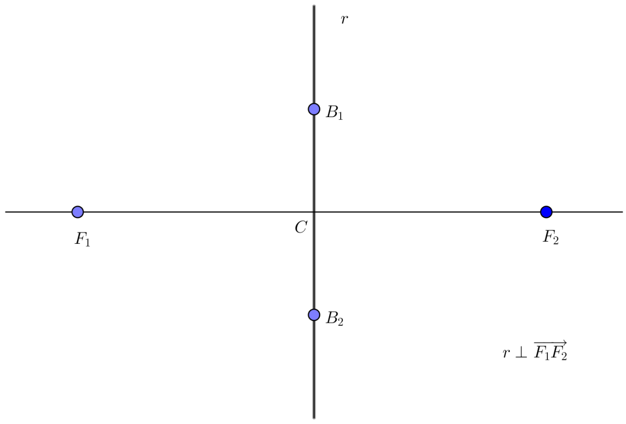


Figura 25 – Vértices sobre a reta não focal

Note que existem somente dois pontos distintos pertencentes a elipse e a reta focal, denotados por A_1 e A_2, chamados de vértices da elipse sobre a reta focal. Vamos agora determinar a localização do vértice A_1 sobre a reta focal, por simplicidade (análogo para A_2).

Inicialmente suponhamos que A_1 pertença ao segmento F_1F_2. Então,

$$\begin{aligned} d(F_1,A_1) &= d(F_1,F_2)-d(A_1,F_2) \\ d(F_1,A_1)+d(A_1,F_2) &= d(F_1,F_2) \\ 2a &= 2c \\ a &= c, \end{aligned}$$

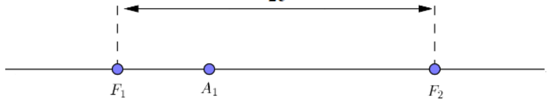


Figura 26 – Vértice entre os focos

contradição. Logo A_1 e A_2 não pertencem ao segmento F_1F_2.

Afirmamos que existe um ponto A_1 a esquerda de F_1, pertencente a elipse tal que $d(A_1,F_1)=a-c>0$. De fato,

$$
\begin{aligned}
d(A_1, F_2) &= d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) \\
d(A_1, F_2) &= a - c + 2c = a + c \\
d(A_1, F_2) &= 2a - a + c \\
d(A_1, F_2) &= 2a - d(A_1, F_1) \\
d(A_1, F_2) + d(A_1, F_1) &= 2a.
\end{aligned}
$$

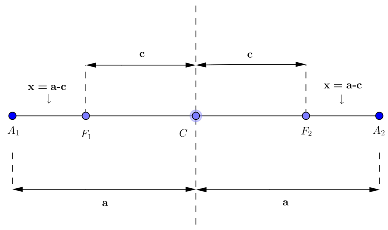


Figura 27 – Elementos da elipse

Portanto $A_1 \in \mathscr{E}_{lip}$.

Analogamente, podemos mostrar que o simétrico ao ponto A_1 em relação a C denominado A_2, distante $a - c$ do foco F_2 também pertence a elipse. Consequentemente o tamanho do segmento $\overline{A_1A_2}$ é $2a$, conforme a Figura 27 acima.

Vamos agora encontrar outros pontos pertencentes à elipse distintos dos anteriores. Para isso façamos o uso da Geometria Analítica. Definimos o sistema de coordenadas dado por $S = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual $\vec{u}_1$ é o versor de $\overrightarrow{CA_2}$ e $\vec{u}_2$ é o versor de $\overrightarrow{CB_1}$. Por definição, em coordenadas em relação ao sistema S, um ponto $P = (x, y)$ pertence ao conjunto $\mathscr{E}_{lip}$ quando:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{2.2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \tag{2.3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando e reagrupando os termos temos,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$\Updownarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx. \tag{2.4}$$

Elevando novamente ao quadrado temos,

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2-cx)^2 \tag{2.5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2). \end{aligned}$$

De fato, como $a > c > 0$, segue que $a^2 - c^2 > 0$. Logo,

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{(a^2-c^2)} = a^2.$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ segue

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Esta é a chamada equação geral da elipse $\mathscr{E}_{lip}$ na sua forma reduzida referente ao sistema S.

Vamos agora justificar que de fato as passagens (2.2) $\Rightarrow$ (2.3) e (2.4) $\Rightarrow$ (2.5) são equivalentes. Precisamos mostrar que se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Então,

$$a^2 - cx \geq 0 \text{ e } 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \geq 0.$$

Com efeito, como $0 < c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a \\ \Rightarrow a^2 - cx \geq a^2 - ca > a^2 - a^2 \Rightarrow a^2 - cx \geq 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow -b^2 + y^2 \leq 0 \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \leq a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 \leq 4a^2 \\ 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Em resumo temos a representação da elipse com seus elementos.

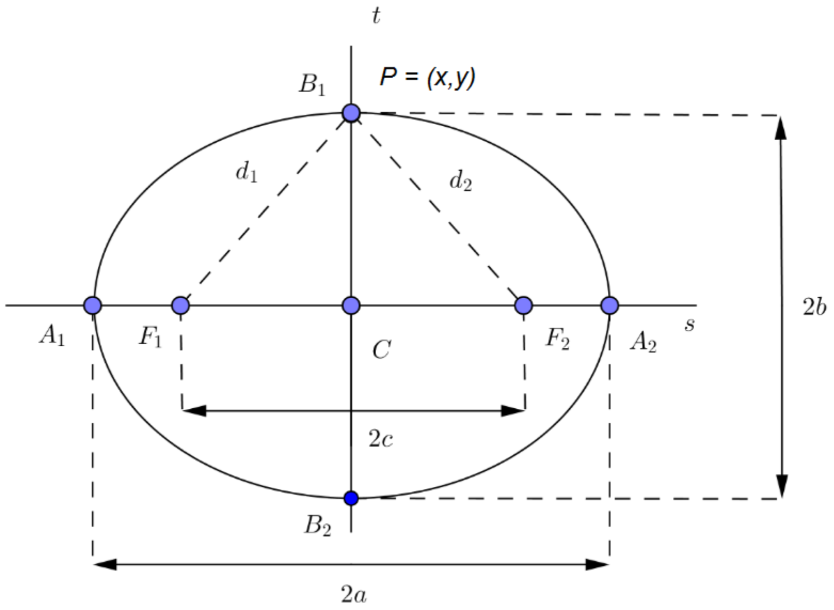


Figura 28 – Elipse

Nomenclatura:

- F_1, F_2 : focos.
- A_1, A_2 : vértices sobre a reta focal.
- B_1, B_2 : vértices sobre a reta não focal.
- C : centro.
- $2c$: distância focal $d(F_1, F_2) = 2c$.
- A_1A_2 : eixo focal de comprimento $d(A_1, A_2) = 2a$.
- B_1B_2 : eixo não focal de comprimento $d(B_1, B_2) = 2b$.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de elipses e sua equação reduzida, referente ao sistema S de coordenadas.

Exemplo 18. Dados os focos $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$ e $a = 5$ vamos determinar a equação reduzida da elipse.

Os focos da elipse são $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$. Se $d(F_1, F_2) = 2c$, então

$$d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow c = 4$$

e

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, a equação geral da elipse referente ao sistema S é dada por

$$\mathscr{E}_{lip} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\mathscr{E}_{lip} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

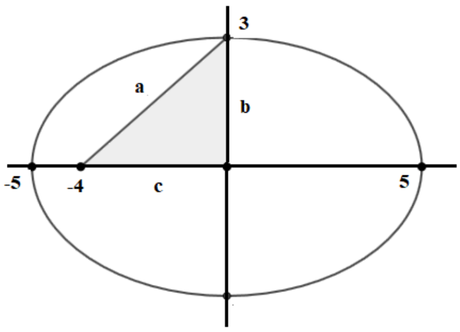


Figura 29 – Elementos da elipse Exemplo 18

Exemplo 19. Considere uma elipse de vértices $A_1 = (0,6)$ e $A_2 = (0,-6)$, passando pelo ponto $(2, \frac{12\sqrt{5}}{5})$. Vamos determinar a equação reduzida da elipse e esboçar seu gráfico destacando seus principais elementos.

Como os vértices da elipse são $A_1 = (0,6)$ e $A_2 = (0,-6)$, então

$$d(A_1, A_2) = 2a \Rightarrow a = 6.$$

Temos que o ponto $(2, \frac{12\sqrt{5}}{5})$ pertence a elipse, então

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{2^2}{b^2} + \frac{(\frac{12\sqrt{5}}{5})^2}{6^2} &= 1, \\ \frac{4}{b^2} + \frac{4}{5} &= 1, \\ b &= \sqrt{20}. \end{aligned}$$

Logo, a equação geral da elipse referente ao sistema S é dada por

$$\mathscr{E}_{lip} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

$$\mathscr{E}_{lip} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

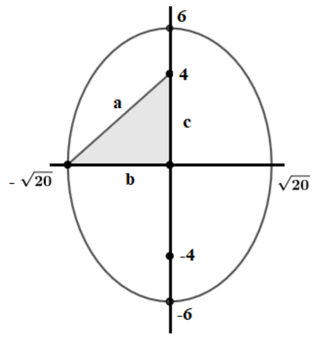


Figura 30 – Elementos da elipse Exemplo 20

2.2 Hipérbole

Nesta seção realizaremos um estudo sobre hipérboles. Iniciaremos com a definição seguindo uma abordagem geométrica apresentando sua construção, destacando seus principais elementos e posteriormente apresentamos sua forma analítica e a obtenção da sua equação na forma reduzida.

Definição 13. Considere α um plano e $c > a > 0$. Considere dois pontos F_1 e F_2 distintos pertencentes ao plano α e $d(F_1,F_2) \doteq 2c$. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P, pertencentes a este plano α cujo o módulo da diferença de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 seja constante e igual a $2a$, isto é

$$\mathscr{H}_{ip} = \{P \in \alpha \ : \ |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}. \tag{2.6}$$

Sejam C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ e A_1 um ponto da reta F_1F_2. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole e a reta passando por F_1 e F_2 é chamada de reta focal, que por simplicidade denotamos por r. Vamos averiguar se A_1 pode ser um ponto da hipérbole.

Inicialmente suponhamos que existe um ponto A_1 a esquerda de F_1 pertencente à hipérbole. Então,

$$\begin{aligned} d(A_1,F_1) &= d(A_1,F_2) - d(F_1,F_2) \\ d(A_1,F_2) - d(A_1,F_1) &= d(F_1,F_2) \\ 2a &= 2c \\ a &= c, \end{aligned}$$

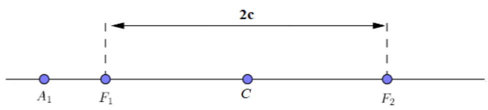


Figura 31 – Pontos da Hipérbole

contradição. Logo A_1 não pode estar a esquerda de F_1.

Afirmamos que A_1 pertence ao segmento $\overline{F_1F_2}$ de tal modo que $d(A_1,F_1) = c - a > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} d(A_1,F_2) &= d(F_1,F_2) - d(A_1,F_1) \\ d(A_1,F_2) &= 2c - (c-a) = c + a \\ d(A_1,F_2) &= 2a + c - a \\ d(A_1,F_2) &= 2a + d(A_1,F_1) \\ d(A_1,F_2) - d(A_1,F_1) &= 2a. \end{aligned}$$

Portanto $A_1 \in \mathscr{H}_{ip}$. Analogamente, podemos mostrar que o simétrico ao ponto A_1 em relação a C denominado A_2, distante $c - a$ do foco F_2 também pertence à hipérbole. Consequentemente o tamanho do segmento $\overline{A_1A_2}$ é $2a$, conforme a Figura 32.

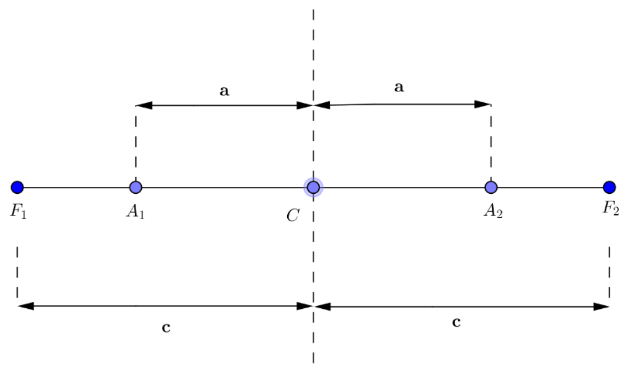


Figura 32 – Focos da Hipérbole

Considere a reta ortogonal à reta focal passando por C, denominada reta não focal, onde C é o ponto médio de F_1F_2. Podemos afirmar que não existe nenhum ponto da reta não focal pertencente a hipérbole. De fato,
Se B pertence a reta não focal e a hipérbole então por definição temos

$$|d(B,F_1) - d(B,F_2)| = 2a.$$

Como $d(B,F_1) = d(B,F_2)$, então

$$|d(B,F_1) - d(B,F_2)| = 2a \Rightarrow a = 0, \text{ contradição!}$$

Portanto B não pertence a $\mathscr{H}_{ip}$.

Considere B_1 e B_2 dois pontos distintos pertencentes a reta não focal tal que $d(B_i,C) = b$, no qual $b^2 = c^2 - a^2$ para $i = 1,2$. Denominamos os pontos B_1 e B_2 por vértices da hipérbole sobre a reta não focal.

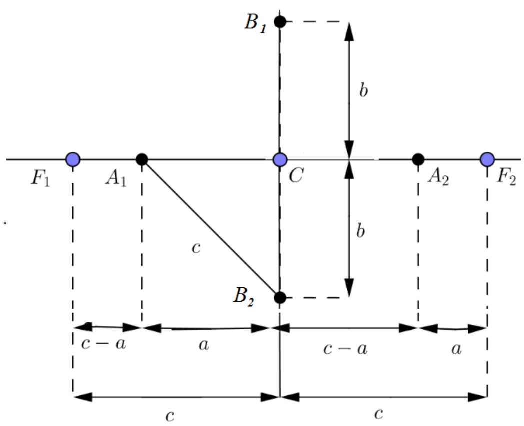


Figura 33 – Focos e vértices da hipérbole

Analogamente ao caso da elipse, vamos encontrar outros pontos pertencentes à hipérbole distintos dos anteriores. Para isso façamos o uso da Geometria Analítica.

Definimos o sistema de coordenadas dado por $S = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual $\vec{u}_1$ é o versor de $\overrightarrow{CA_2}$ e $\vec{u}_2$ é o versor de $\overrightarrow{CB_1}$. Por definição, em coordenadas em relação ao sistema S, um ponto $P = (x,y)$ pertence ao conjunto $\mathscr{H}_{ip}$ quando:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

que é equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Elevando os dois membros ao quadrado temos,

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\Updownarrow \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.
\end{gathered}$$

Simplificando e reagrupando os termos temos,

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2 \Rightarrow \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando a expressão anterior ao quadrado temos,

$$\begin{gathered}
a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (cx - a^2)^2 \\
\Updownarrow \\
a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \\
\Updownarrow \\
a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \\
\Updownarrow \\
a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\
\Updownarrow \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).
\end{gathered}$$

Como $c > a > 0 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$, logo

$$x^2 - \frac{a^2y^2}{(c^2 - a^2)} = a^2. \tag{2.7}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$ e assim,a expressão (2.7) torna-se

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Esta é a chamada de equação geral da hipérbole $\mathscr{H}_{ip}$ na sua forma reduzida referente ao sistema de coordenadas S.

Reescrevendo a equação da hipérbole temos que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2}.$$

Note que para x suficientemente grande temos:

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} \Rightarrow y \approx \pm\frac{b}{a}x.$$

Obtemos então as assíntotas da hipérbole, que são duas retas que passam pela origem do sistema de coordenadas e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação ao eixo CF_2 (reta focal).

A Figura 34 abaixo representa uma hipérbole e os principais elementos, no sistema $S = \{C;\overrightarrow{CF_2},\overrightarrow{CB_1}\}$.

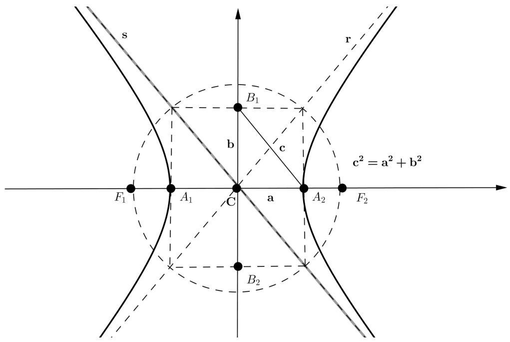


Figura 34 – Hipérbole

Nomenclatura:

- F_1, F_2 : focos.
- A_1, A_2 vértices.
- C : centro.
- $2c$: distância focal $d(F_1, F_2) = 2c$.
- A_1A_2 : eixo focal de comprimento $d(A_1, A_2) = 2a$.
- B_1B_2 : eixo não focal de comprimento $d(B_1, B_2) = 2a$.
- r, s : assíntotas.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de hipérboles e como determinar sua equação reduzida referente ao sistema fixado S.

Exemplo 20. Dados os focos $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$ e $a = 2$ vamos determinar a equação reduzida da hipérbole e suas assíntotas.

Os focos da hipérbole são $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$. Se $d(F_1, F_2) = 2c$, então

$$d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

e

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \sqrt{3}.$$

Portanto, a equação geral da hipérbole é:

$$\mathscr{H}_{ip} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\mathscr{H}_{ip} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Observe que as equações das assíntotas são: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Logo:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad e \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

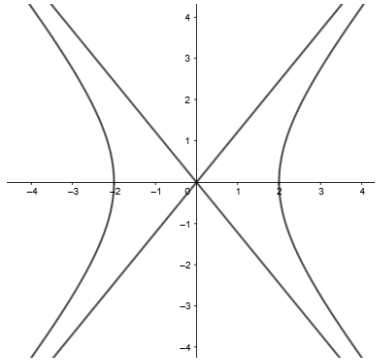


Figura 35 – Elementos da hipérbole 1

Exemplo 21. Vamos determinar a equação reduzida da hipérbole sabendo que $F_1 = (0, \sqrt{10})$, $F_1 = (0, -\sqrt{10})$, $a = 2$ e a hipérbole passa pelo ponto $(\frac{\sqrt{30}}{2}, 3)$.

Os focos da hipérbole são $F_1 = (0, \sqrt{10})$ e $F_1 = (0, -\sqrt{10})$. Se $d(F_1, F_2) = 2c$, então

$$d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

e

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{6}.$$

Portanto, a equação geral da hipérbole é:

$$\mathscr{H}_{ip} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

$$\mathscr{H}_{ip} : \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1.$$

Observe que as equações das assíntotas são: $y = \pm\frac{a}{b}x$. Logo:

$$y = \frac{\sqrt{6}}{3}x \quad e \quad y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x.$$

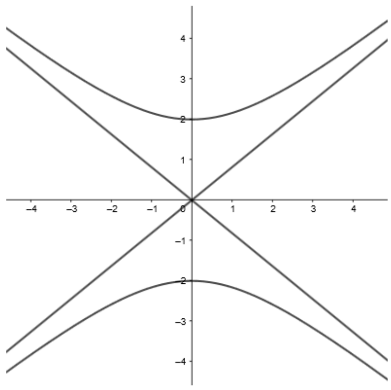


Figura 36 – Elementos da hipérbole 2

2.3 Parábola

Nesta seção apresentamos um estudo sobre parábolas, definindo-as inicialmente do ponto de vista geométrico. Posteriormente com elementos de Geometria Analítica, obteremos uma expressão algébrica que a represente.

Definição 14. Considere α um plano. Sejam r uma reta e F um ponto do plano não pertencente a r. Definimos por parábola de foco F e diretriz r o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a r, isto é

$$\mathscr{P}_{arab} = \{P \in \alpha \ : \ d(P,F) = d(P,r)\}. \tag{2.8}$$

Seja C o ponto de interseção da reta perpendicular à reta diretriz r passando por F, tal que a distância do foco à reta diretriz é chamado de parâmetro da parábola dado por $d(F,r) = 2p$.

Vamos inicialmente definir um ponto V da parábola com a seguinte propriedade: V é o ponto médio do segmento $\overline{FC}$, então

$$d(V,F) = d(V,C) = p.$$

Como C pertence a reta diretriz r, então $d(V,F) = d(V,r)$. Portanto o ponto V pertence a parábola. A esse ponto chamamos de vértice da parábola.

Seja R pertencente a reta s, onde s é a reta paralela à reta diretriz r passando pelo vértice da parábola. Definimos o sistema de coordenadas dado por $S = \{V; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual $\vec{u}_1$ é o versor de $\overrightarrow{VR}$ e $\vec{u}_2$ é o versor de $\overrightarrow{VF}$.

Por definição, em coordenadas em relação ao sistema S, um ponto $P = (x,y)$ pertence ao conjunto $\mathscr{P}_{arab}$ quando $d(P,F) = d(P,r)$.

Seja P' um ponto pertencente a reta diretriz r, tal que $P' = (x,-p)$. Por definição temos que

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,r) = d(P,P') \\ \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2} \\ \sqrt{x^2+(y-p)^2} &= \sqrt{(y+p)^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} x^2+(y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ x^2+y^2-2yp+p^2 &= y^2+2py+p^2. \end{aligned}$$

Simplificando e reagrupando os termos, temos

$$x^2 = 4py$$

isto é,

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4p}.} \tag{2.9}$$

A equação dada em (2.9) é chamada equação geral da parabola $\mathscr{P}_{arab}$ na sua forma reduzida referente ao sistema S.

Em resumo temos a representação da parábola com seus elementos.

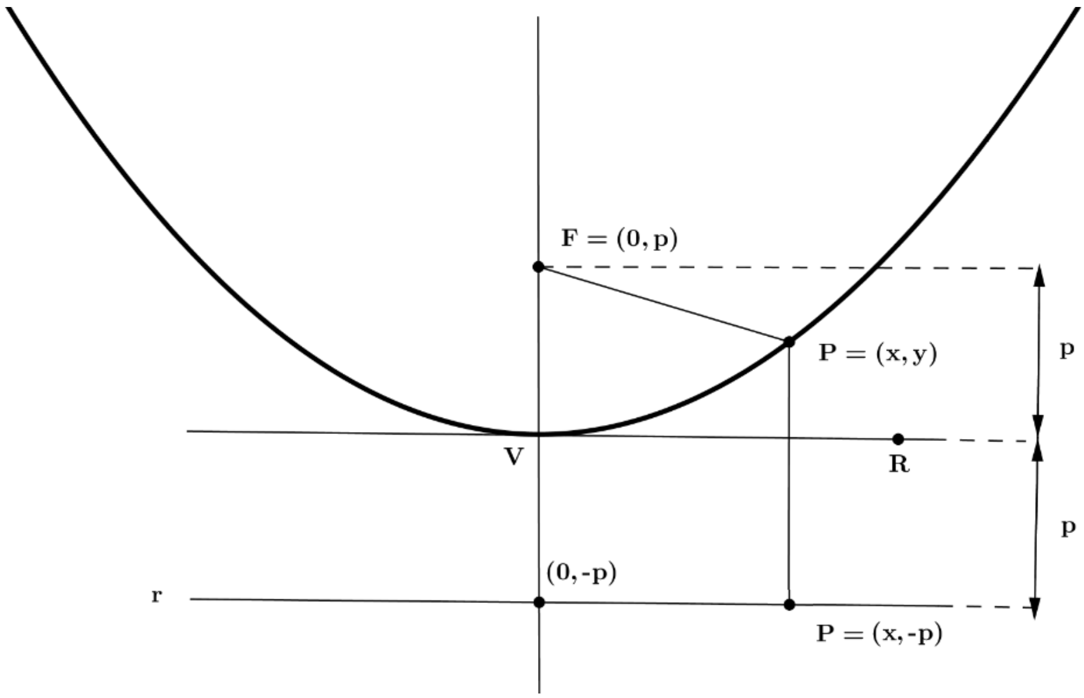


Figura 37 – Parábola

Nomenclatura:

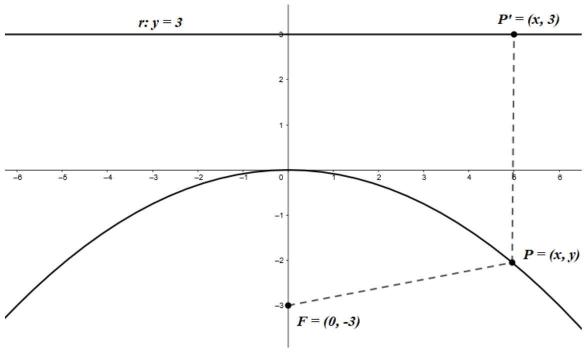
- F : foco.
- $2p$: parâmetro.
- r : diretriz.
- V : vértice.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de parábolas e sua equação geral reduzida referente ao sistema S de coordenadas.

Exemplo 22. Vamos determinar a equação geral da parábola de foco $F = (0, -3)$ e reta diretriz $r : y = 3$.

Usando a definição da parábola, temos

$$d(P,F) = d(P,r) = d(P,P')$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-3)^2},$$
$$\sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{(y-3)^2}.$$



Elevando ambos membros ao quadrado, temos

$$x^2+(y+3)^2 = (y-3)^2,$$
$$x^2+y^2+6y+9 = y^2-6y+9.$$

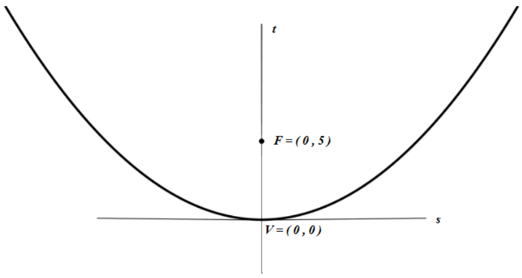
Simplificando e reagrupando os termos, temos

$$y = -\frac{x^2}{12}.$$

Exemplo 23. Vamos esboçar e determinar a equação geral da parábola com vértice $V = (0,0)$ na origem, cujo foco é o ponto $F = (0,5)$.

Se $V = (0,0)$ e $F = (0,5)$, então

$$d(V,F) = p \Rightarrow p = 5.$$



Logo a equação geral da parábola é representada por:

$$y = \frac{x^2}{20}.$$