Professor: Tiago H. Picon (FFCLRP/USP)

Disciplina: Geometria Analítica

Assuntos: Elipse, parábola, hipérbole e circunferência.

Data: 15/11/2018

Resumo: Classificação das Cônicas

Considere o sistema de coordenadas $S = \left\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ em $\mathbb{R}^2$ e a cônica $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y) = 0\}$ no qual

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + k, \tag{1}$$

no qual $a_{ij}, k \in \mathbb{R}$. A função f pode ser escrita na forma matricial,

$$f(x,y) = f(X) = X^t AX + 2BX + k,$$

no qual $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.

PASSO 1: Verificando se a cônica possui centro transladado. Para isso devemos verificar a solução do sistema $AC = -B^t$, isto é,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

PASSO 2: Caso o sistema anterior possua solução, definimos $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ e a cônica em relação ao sistema $S' = \left\{C; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$, é escrita na forma $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g(x', y') = 0\}$ para

$$g(x', y') = (X')^t AX' + f(C),$$

no qual $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $f(C) = C^t AC + 2BC + k$.

PASSO 3: Considere o sistema de coordenadas $S'' = \{C; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, no qual $\overrightarrow{u_i}$ é o autovalor unitário correspondente ao autovalor λ_i da matriz A (veja a Observação 1). Dessa forma a cônica pode ser escrita da forma

$$\mathcal{C} = \left\{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } h(x'', y'') = 0\right\}$$

no qual

$$h(X'') = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + f(C).$$

PASSO 4: Analisar o significado da expressão do Passo 3. Cuidado, por exemplo:

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0 & \lambda_2 > 0 & f(C) = 0 & \Rightarrow \mathcal{C} = \{C\} \\ \lambda_1 > 0 & \lambda_2 < 0 & f(C) = 0 & \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{retas concorrentes}\} \\ \lambda_1 > 0 & \lambda_2 > 0 & f(C) < 0 & \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{elipse}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

Exercício: complete com os demais casos.

PASSO 5: Caso o sistema linear $AC = -B^t$ não possua solução, calcule os autovalores da matriz A e observe que necessariamente um dos autovalores será nulo. Sem perda de generalidade, considere $\lambda_2 = 0$. Dessa forma, a equação da cônica com relação ao sistema $S' = \{O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ é satisfeita pela equação

$$(X')^t \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X' + 2BRX' + k = 0,$$

no qual R é a matriz formada pelas colunas dos autovetores unitários correspondentes aos autovalores λ_1 e λ_2. Observe que não adianta resolver a equação

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -(BR)^t,$$

mas se encontrarmos uma solução c_1 que satisfaça apenas a primeira equação desse sistema e considerar um c_2 qualquer então a cônica em relação ao sistema $S'' = \{C; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ é descrito pela equação

$$\lambda_1 (x'')^2 + by'' + k = 0,$$

isto é a cônica não possui o termo linear em x''. Trata-se portanto, de uma **parábola**.

Observação 1: Autovalores distintos da matriz simétrica A correspondem a autovetores ortogonais. Caso os autovalores sejam iguais então é possível encontrar dois autovetores L.I., digamos $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ e considere $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{u_2} - P_{\overrightarrow{u_1}}(\overrightarrow{u_2})$, no qual $P_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})$ denota a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{v}$ em $\overrightarrow{u}$. Agora considere os versores de $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$. Provavelmente a cônica se trata do conjunto vazio, um ponto ou uma circunferência.

Exercícios Propostos

Considere as cônicas $\mathcal{C}_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f_i(x,y) = 0\}$ para cada f_i listada abaixo. Em cada caso, resolva os itens de (a) a (f) a seguir.

(a) Escreva cada $\mathcal{C}_i$ na forma matricial;

(b) Encontre o centro de translação, quando possível;

(c) Em caso positivo no item anterior, descreva o sistema de coordenadas S', no qual os termos lineares não aparecem;

(d) Para as cônicas do item anterior, descreva o sistema S'' no qual o termo misto da função definidora não aparece;

(e) Para as cônicas que não possuem centro transladado, descreva o sistema S'' no qual não aparece o termo misto e o termo $(y'')^2$; depois faça uma translação para eliminar o termo linear x''.

Obs.: note que sem perda de generalidade poderíamos eliminar o termo $(x'')^2$ e o termo em y'';

(f) Faça um esboço para cada $\mathcal{C}_i$ bem como o sistema de coordenadas utilizado.

1. $f_1(x,y) = \dfrac{5}{36}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}yx - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{9}y^2 = 0.$
   Resp.: Elípse. Centro $(c_1, c_2) = (-2, 2)$. Autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{9}$.

2. $f_2(x,y) = -\dfrac{11}{80}x^2 + \dfrac{9}{40}x + \dfrac{3}{10}yx - \dfrac{7}{10}y - \dfrac{1}{20}y^2 - 1 + \dfrac{29}{80} = 0$
   Resp.: Hipérbole. Centro $(c_1, c_2) = (3, 2)$. Autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{16}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

3. $f_3(x,y) = -\dfrac{17}{2}x^2 + 16x + 16 + 9yx - 32y + \dfrac{7}{2}y^2 = 0.$
   Resp.: Retas concorrentes. Centro $(c_1, c_2) = (2, 2)$. Autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -10$.

4. $f_4(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 3yx + \frac{3}{2}y^2 - 5 = 0.$

   Resp.: Retas paralelas. Centro (c_1, c_2) uma reta de centros, ache um e vá em frente. Autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$.

5. $f_5(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 3yx + \frac{3}{2}y^2 + x - y = 0.$

   Resp.: Parábola. Não tem centro. Autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$.

6. $f_6(x,y) = 3x^2 - 18x + 54 + 3y^2 - 18y - 27 = 0.$

   Resp.: Circunferência. Centro $(c_1, c_2) = (3, 3)$. Autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 3$.

7. $f_7(x,y) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{25}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2}yx - \frac{5\sqrt{3}}{2}y - 5\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} + \frac{7}{4}y^2 - 7y + 12 = 0.$

   Resp.: Hipérbole. Centro $(c_1, c_2) = (1, 2)$. Autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$.

8. $f_8(x,y) = \frac{37}{9}x^2 + \frac{8\sqrt{5}}{9}xy + \frac{35}{9}y^2 + 12 = 0.$

   Resp.: Conjunto vazio. Centro $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$.

9. $f_9(x,y) = xy.$

   Resp.: Hipérbole. Centro $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.