Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista 9

Assunto: Séries de Fourier

Exercício 0.1 *Defina uma função periódica em $\mathbb{R}$ de periodo 2 tal que coincida com a função x^2 no intervalo aberto $]0,2[$. Tal função é única? E se a função pedida fosse igual a x^2 no intervalo $[0,2[$?*

Exercício 0.2 *Considere f, g funções periódicas de período T e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que as funções $f+g$, $f \cdot g$ e $\lambda \cdot f$ são periodicas de período T.*

Exercício 0.3 *Se f for uma função diferenciável e periódica de período T, mostre que a função derivada f' será também periódica de mesmo período T.*

Exercício 0.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período T e integrável em qualquer intervalo. Mostre que $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$, no qual $a \in \mathbb{R}$.*

Exercício 0.5 *Pergunta: a soma de duas funções periódicas de períodos distintos pode ser periódica ? Justifique.*

Exercício 0.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período T. Mostre que a função $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ é periódica de período T se e somente se $\int_0^T f(x)dx = 0$.*

Exercício 0.7 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período T. Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para que a função $F(x) = \int_0^x f(x)dx - kx$ seja periódica de período T.*

Exercício 0.8 *Prove as relações de ortogonalidade abaixo.*

(a) $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$, *para* $n, m \geq 1$;

(b) $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & n = m \geq 1, \\ 0, & n \neq m \geq 1; \end{cases}$$

(c) $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & n = m \geq 1, \\ 0, & n \neq m \geq 1; \end{cases}$$

Dica: *Use integração por partes.*

Exercício 0.9 *Calcule a série de Fourier das seguintes funções* *(a)* $f(x) = \begin{cases} x, \ 0 \leq x < 2\pi \\ \textit{periódica de período } 2\pi. \end{cases}$ *(b)* $f(x) = \begin{cases} e^x, \ -\pi \leq x < \pi \\ \textit{periódica de período } 2\pi. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x, \ -\pi \leq x < \pi \\ \textit{periódica de período } 2\pi. \end{cases}$ *(d)* $f(x) = \sin^2 x$.

Exercício 0.10 *Mostre que:*

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *for uma função par e diferenciável, então* f' *será uma função ímpar.*

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *for uma função ímpar e diferenciável, então* f' *será uma função par.*

Exercício 0.11 *Quais são as relações entre os coeficientes de Fourier da função* $f(x)$*, periódica de período* $2L$*, e da função* $g(x) = f(x + \alpha)$*, no qual* $\alpha \in \mathbb{R}$*?*

Boa Sorte!