Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista 7

1 Assunto: séries de Taylor

Exercício 1.1 *Obtenha a representação em série de Taylor*

$$e^z = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}, \quad |z-1|<\infty$$

para a função $f(z)=e^z$ utilizando os seguintes argumentos:

(i) Teorema da Série de Taylor, calculando $f^{(n)}(1)$ para $n\in\mathbb{N}$;

(ii) Decomposição $e^z = e^{z-1}e$.

Exercício 1.2 *Encontre a representação em série de Maclaurin da função* $f(z)=\dfrac{z}{z^4+9}=\dfrac{z}{9}\cdot\dfrac{1}{1+(z^4/9)}$. ***Resp.:*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+2}}z^{4n+1}$, $|z|<\sqrt{3}$.

Exercício 1.3 *Encontre a representação em série de Maclaurin da função* $f(z)=\sin(z^2)$. *Mostre que $f^{\,4n}(0)=0$ e $f^{\,2n+1}(0)=0$ para $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$.*

Exercício 1.4 *Derive a representação em série de Taylor*

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}, \quad |z-i|<\sqrt{2}.$$

Sugestão: $\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{(1-i)-(z-i)}=\dfrac{1}{1-i}\cdot\dfrac{1}{1-(z-i/1-i)}$.

Exercício 1.5 *Mostre que para $z\neq 0$:*

(i) $\dfrac{e^z}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{z}{3!}+\dfrac{z^2}{4!}+\cdots$;

(ii) $\dfrac{\sin(z^2)}{z^4}=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^6}{5!}-\dfrac{z^{10}}{7!}+\cdots$.

Exercício 1.6 *Mostre que:*

(i) $\dfrac{\sinh z}{z^2} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+3)!}$, $0 < |z| < \infty$;

(ii) $z^3 \cosh\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{z}{2} + z^3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{1}{z^{2n-1}}$, $0 < |z| < \infty$.

Exercício 1.7 *Mostre* $f(z) = \dfrac{1}{4z - z^2} = \dfrac{1}{4z} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{4^{n+2}}$ *para* $0 < |z| < 4$.

2 Assunto: séries de Laurent

Exercício 2.1 *Encontre a série de Laurent da função* $f(z) = z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$, *quando* $0 < |z| < \infty$. ***Resp.:*** $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \dfrac{1}{z^{4n}}$.

Exercício 2.2 *Derive a representação em série de Laurent*

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right],$$

$0 < |z+1| < \infty$.

Exercício 2.3 *Encontre uma representação em série da função* $f(z) = \dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1 + (1/z)}$ *usando potências negativas de* z *quando* $1 < |z| < \infty$.
Resp.: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{z^n}$.

Exercício 2.4 *Encontre a expansão em série de Laurent para a função* $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ *na(s) respectiva(s) região(ões) de definição.* ***Resp.:*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$, $0 < |z| < 1$ *e* $-\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{z^n}$, $1 < |z| < \infty$.

Exercício 2.5 *Mostre que* $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)} = -3\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \dfrac{1}{2(z-1)}$, *para* $0 < |z-1| < 2$.

Exercício 2.6 *Encontre a expansão em série de Laurent que representa* $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ *e especifique o(s) domínio(s) onde a representação é válida.* ***Resp.:*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n+1} + \dfrac{1}{z}$, $0 < |z| < 1$, *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}$, $1 < |z| < \infty$.

Exercício 2.7 *Considere $a \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < a < 1$. Utilize o Teorema das Séries de Laurent para mostrar que* $\dfrac{a}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{z^n}$, $|a| < |z| < \infty$.

3 Assunto: resíduos e polos

Exercício 3.1 *Encontre o resíduo no ponto $z = 0$ para as funções abaixo.*

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z+z^2}$; *(ii)* $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$; *(iii)* $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z}$;

(iv) $f(z) = \dfrac{\cot z}{z^4}$; *(v)* $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$.

Resp.: *(i) 1; (ii)* $-\frac{1}{2}$; *(iii) 0; (iv)* $-\frac{1}{45}$; *(v)* $\frac{7}{6}$.

Exercício 3.2 *Use o Teorema dos Resíduos de Cauchy para calcular* $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$, *no qual* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ *orientado no sentido positivo sendo*

(i) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$; *(ii)* $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$; *(iii)* $f(z) = z^2 e^{\left(\frac{1}{z}\right)}$;

(iv) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$.

Resp.: *(i)* $-2\pi i$; *(ii)* $-\frac{2\pi i}{e}$; *(iii)* $\frac{\pi i}{3}$; *(iv)* $2\pi i$.

Exercício 3.3 *Calcule* $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$, *no qual* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ *orientado no sentido positivo sendo*

(i) $\dfrac{z^5}{1-z^3}$; *(ii)* $\dfrac{1}{1+z^2}$; *(iii)* $\dfrac{1}{z}$.

Resp.: *(i)* $-2\pi i$; *(ii)* 0; *(iii)* $2\pi i$;

Exercício 3.4 *Para cada $f(z)$, encontre a parte principal nos pontos de singularidades isolada e determine se cada ponto é um polo, uma singularidade removível ou um polo essencial.*

(i) $ze^{\left(\frac{1}{z}\right)}$; *(ii)* $\dfrac{z^2}{1+z}$; *(iii)* $\dfrac{\sin z}{z}$; *(iv)* $\dfrac{\cos z}{z}$; *(v)* $\dfrac{1}{(2-z)^3}$;

Exercício 3.5 *Mostre que o ponto singular de cada função abaixo é um polo, determine sua ordem m e o resíduo b_1 correspondente.*

(i) $f(z) = \dfrac{1-\cosh z}{z^3}$; *(ii)* $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$; *(ii)* $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

Resp.: *(i)* $m = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$; *(ii)* $m = 3$, $b_1 = -\frac{4}{3}$; *(iii)* $m = 2$, $b_1 = 2e^2$.

Exercício 3.6 *Para cada $f(z)$ abaixo, mostre que todos os pontos singulares são um polo. Determine sua ordem m e o resíduo b_1 correspondente.*

(i) $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z-1}$; *(ii)* $f(z) = \left(\dfrac{z}{2z+1}\right)^3$; *(iii)* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$.

Resp.: *(i)* $m = 1$, $b_1 = 3$; *(ii)* $m = 3$, $b_1 = -\frac{3}{16}$; *(iii)* $m = 1$, $b_1 = \pm\frac{i}{2\pi}$.

Exercício 3.7 *Mostre que:*

(i) $Res_{z=-1} f(z) = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, *no qual* $f(z) = \dfrac{z^{\frac{1}{4}}}{z+1}$, $|z| > 0,\ 0 < arg(z) < 2\pi$;

(ii) $Res_{z=i} f(z) = \dfrac{\pi + 2i}{8}$ *no qual* $f(z) = \dfrac{Log(z)}{(z^2+1)^2}$;

(iii) $Res_{z=i} f(z) = \dfrac{1-i}{8\sqrt{2}}$, *no qual* $f(z) = \dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{(z^2+1)^2}$, $|z| > 0,\ 0 < arg(z) < 2\pi$.

Exercício 3.8 *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$, *no qual γ é dado por:*

(i) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ *no sentido anti-horário,*

(ii) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$ *no sentido anti-horário.*

Resp.: *(i)* πi; *(ii)* $6\pi i$.

Exercício 3.9 *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^3(z+4)}$, *no qual γ é dado por:*

(i) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ *no sentido anti-horário,*

(ii) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| = 3\}$ *no sentido anti-horário.*

Resp.: *(i)* $\frac{\pi i}{32}$; *(ii)* 0.

Boa Sorte!