Lista 6 - Complementos de Matemática - Prof. Tiago Henrique Picon

Apenas os Exercicios 1,2,3 e 11

1. Encontre uma solução geral para cada equação separável.

$(a)\ 2\sqrt{xy}\dfrac{dy}{dx} = 1$ $\qquad (b)\ \dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}\ , y > 0$ $\qquad (c)\ \dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

$(d)\ \dfrac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$ $\qquad (e)\ \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2(\sqrt{y})$ $\qquad (f)\ \sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}$

$(g)\ \sec(x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\mathrm{sen}(x)}$ $\qquad (h)\ \dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}$ $\qquad (i)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

2. Encontre a solução geral da equação diferencial de 2ª ordem.

$a)\ y'' + 2y' - 3y = 0$ $\qquad b)\ y'' + 3y' + 2y = 0$ $\qquad c)\ y'' - 2y' + 2y = 0$ $\qquad d)\ 2y'' - 3y' + y = 0$

$e)\ 4y'' + 12y' + 9y = 0$ $\qquad f)\ y'' - 2y' + 6y = 0$ $\qquad g)\ y'' - 9y' + 9y = 0$ $\qquad h)\ y'' - 2y' - 2y = 0$

$i)\ 6y'' - y' - y = 0$ $\qquad j)\ y'' + 6y' + 13y = 0$ $\qquad k)\ y'' - 6y' + 9y = 0$ $\qquad l)\ y'' + 5y' = 0$

3. Encontre a solução do problema de valor inicial.

$a)\ \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ $\qquad c)\ \begin{cases} 6y'' - 5y' + y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $\qquad e)\ \begin{cases} y'' + 5y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad f)\ \begin{cases} y'' + 8y' - 9y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad h)\ \begin{cases} 9y'' - 12y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ $\qquad i)\ \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \\ y'(\pi/2) = 2 \end{cases}$

$j)\ \begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(-1) = 2 \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$ $\qquad k)\ \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(\pi/4) = 2 \\ y'(\pi/4) = -2 \end{cases}$

Outros Problemas

4. Seja f uma grandeza física qualquer (concentração de substância, temperatura, deslocamento espacial, população, investimento, etc) e t designa tempo. Assuma que a taxa de variação (temporal) de f é proporcional à f, com uma constante de proporcionalidade k. Pede-se:(a) Uma equação diferencial relacionando f e t.(b) A solução geral da equação acima, na qual devem aparecer duas constantes.(c) Se soubermos os valores de f em dois instantes distintos t_1 e t_2, é possível calcularmos as constantes acima ? Explique com um exemplo simples.

5. Uma viga de alumínio foi trazida para dentro de um galpão, onde a temperatura é mantida em 65ºF. Após 10 minutos, a temperatura da viga chegou a 35ºF, e em mais 10 minutos, atingiu 50ºF. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a temperatura inicial da viga.

6. Considere um tanque usado em experimentos hidrodinâmicos. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta a uma concentração de 1g/litro. Para preparar para o próximo experimento, o tanque deve ser lavado com água pura entrando a uma taxa de 2 litros por minuto, a solução bem misturada saindo à mesma taxa. Encontre o tempo necessário para que a concentração de tinta no tanque atinja 1% do seu valor original.

7. Um tanque contém, inicialmente, 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração γ g/litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros/minuto e a solução, bem misturada, sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma fórmula, em função de γ, para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t. Encontre também a quantidade limite de sal no tanque quando $t \longrightarrow \infty$.

8. Um tanque contém 100 galões de água. Uma solução contendo 1lb/gal de fertilizante líquido é adicionada ao tanque a uma taxa de 1 gal/min e a mistura homogênea é bombeada do tanque à taxa de 3 gal/min. Determine a quantidade máxima de fertilizante no tanque e o tempo necessário para atingir esse máximo.

9. Um corpo de massa 2Kg é suspenso por uma mola de constante 10 N/m e colocado num meio viscoso com amortecimento de 4 Ns/m. Se no instante $t = 0$ ele está na posição de equilíbrio com velocidade 3m/s para baixo determine a equação de seu movimento.

10. Considere os dados do problema anterior exceto que o amortecimento γ é tal que o corpo **não oscila**. Determine o **menor** valor de γ com essa propriedade.

11. Para as equações de 1ª ordem abaixo diga se são exatas ou não. Em caso afirmativo, ache a solução geral.

a) $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$

b) $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$

c) $(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0$

d) $(\frac{y}{x} + 6x) + (\ln(x) - 2)y' = 0$

e) $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$

Respostas

(1). (a)$y = (\frac{3}{2}\sqrt{x} + C)^{2/3}$ (b)$y = (C + x^3/6)^2$ (c)$y = \ln(e^x + C)$ (d)$y = \ln(x^3 + C)$ (e)$y = \arctan^2((C + x)/2)$ (f)$y = -\ln(C - 2e^{\sqrt{x}})$ (g)$y = -\ln(C - e^{\text{sen}(x)})$ (h)$y = \text{sen}(x^2 + C)$ (i)$y = (1/2)\ln(2e^x + C)$.

(2) a)$y = c_1e^t + c_2e^{-3t}$ b)$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$ c)$y = c_1e^t\cos(t) + c_2e^t\text{sen}(t)$ d)$y = c_1e^{t/2} + c_2e^t$ e)$y = c_1e^{-3t/2} + c_2te^{-3t/2}$ f)$y = c_1e^t\cos(\sqrt{5}\ t) + c_2e^t\text{sen}(\sqrt{5}\ t)$ g)$y = c_1\exp((9 + 3\sqrt{5})t/2) + c_2\exp((9 - 3\sqrt{5})t/2)$ h)$y = c_1\exp((1 + \sqrt{3})t) + c_2\exp((1 - \sqrt{3})t)$ i)$y = c_1e^{t/2} + c_2e^{-t/3}$ j)$y = c_1e^{-3t}\cos(2t) + c_2e^{-3t}\text{sen}(2t)$ k)$y = (c_1 + c_2t)e^{3t}$ l)$y = c_1 + c_2e^{-5t}$

(3) 11)a)$y = e^t$ $y \to \infty$ quando $t \to \infty$ b)$y = 5e^{-t}/2 - e^{-3t}/2$ $y \to 0$ quando $t \to \infty$ c)$y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$ $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$ d)$y = -1 - e^{-3t}$ $y \to -1$ quando $t \to \infty$ e)$y = (13 + 5\sqrt{13})\exp[(-5 + \sqrt{13})t/2]/26 + (13 - 5\sqrt{13})\exp[(-5 - \sqrt{13})t/2]/26$ $y \to 0$ quando $t \to \infty$ f)$y = e^{-9(t-1)}/10 + 9e^{t-1}/10$ $y \to \infty$ quando $t \to \infty$ g)$y = e^{-2t}(\cos(t) + 2\text{sen}(t))$ y oscila decrescendo para 0 quando $t \to \infty$ h)$y = 2e^{2t/3} - (7/3)te^{2t/3}$ $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$ i)$y = -\exp(t - \pi/2)\text{sen}(2t)$ e oscila crescendo para infinito quando $t \to \infty$ j)$y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$ $y \to 0$ quando $t \to \infty$ k)$y = \sqrt{2}\exp(-(t - \pi/4))\cos(t) + \sqrt{2}\exp(-(t - \pi/4))\text{sen}(t)$ e oscila decrescendo para 0 quando $t \to \infty$.

(5) 5^oF. (6) $100\ln(100)$min (7) $Q(t) = 120\gamma(1 - \exp(-t/60))$; 120γ. (8) 14,8 lb; 27,8 min. (9) $u(t) = \frac{3}{2}\ e^{-t}\ \text{sen}(2t)$ (10) $\gamma = 4\sqrt{5}$ Ns/m.

(11) a) $x^2 + 3x + y^2 - 2y = C$ b) não é exata. c) $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = C$ d) $y\ln(x) + 3x^2 - 2y = C$ e) $x^2y^2 + 2xy = C$.