Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista 6

1 Assunto: Formula Integral de Cauchy

Exercício 1.1 *Calcule* $\int_\gamma \cos(z)\, dz$*, no qual* γ *é a curva em* $\mathbb{C}$ *entre 0 e* $\pi/2$.

Exercício 1.2 *Calcule* $\int_\gamma e^{iz} dz$*, no qual* γ *é a curva em* $\mathbb{C}$ *entre 0 e* i.

Exercício 1.3 *Calcule as seguintes integrais:*

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2} dz$*, no qual* $\gamma(t) = e^{it}$ *para* $t \in [0, 2\pi]$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z^3} dz$*, no qual* $\gamma(t) = e^{it}$ *para* $t \in [0, 2\pi]$

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^4} dz$*, no qual* $\gamma(t) = e^{it}$ *para* $t \in [0, 2\pi]$

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} dz$*, no qual* $\gamma(t) = 2e^{it}$ *para* $t \in [0, 2\pi]$

Exercício 1.4 *Calcule as seguintes integrais para cada* $n \in \mathbb{Z}$

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$*, no qual* $\gamma(t) = 2e^{it}$ *para* $t \in [0, 2\pi]$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma z^n (1-z)^2 dz$*, no qual* $\gamma(t) = e^{it}$ *para* $t \in [0, 2\pi]$

Exercício 1.5 *Seja* $f \in H(D)$*, isto é o conjunto das funções holomorfas em* $D = \{|z| < 1\}$*, e suponhamos que* $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ *para todo* $z \in D$*. Prove que*

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dica: Use a desigualdade de Cauchy no disco $\overline{D}(0, r) = \{|z| \leq r\}$ com $0 < r < 1$ e r escolhido convenientemente.

Exercício 1.6 *Seja* f *uma função inteira e suponhamos que* $|f(z)| \leq |e^z|$ *para qualquer* $z \in \mathbb{C}$*. Prove que existe* $c \in C$ *tal que* $f(z) = ce^{cz}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

Boa Sorte!