Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista 5

1 Assunto: Teorema de Goursat

Exercício 1.1 *Considere a curva* $C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. *Calcule:*

(i) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z-3}dz$; *(ii)* $\displaystyle\int_C ze^{-z}dz$; *(iii)* $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+2z+2}dz$.

Exercício 1.2 *Considere a curva* $C_0 = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$ *para* $R > 0$ *no sentido anti-horário. Mostre que* $\displaystyle\int_{C_0} (z-z_0)^{n-1}dz = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}^* \\ 2\pi i, & n = 0. \end{cases}$

2 Assunto: fórmula integral de Cauchy

Exercício 2.1 *Seja* C *o contorno orientado no sentido positivo da fronteira do quadrado cujos lados estão sobre as retas* $x = \pm 2$ *e* $y = \pm 2$. *Calcule as seguintes integrais:*

(i) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}dz$; *(ii)* $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$; *(iii)* $\displaystyle\int_C \frac{z}{2z+1}dz$;

(iv) $\displaystyle\int_C \frac{\tan\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-x_0)^2}dz$, $-2 < x_0 < 2$.

Resp.: (i) 2π; (ii) $\frac{\pi i}{4}$; (iii) $-\frac{\pi i}{2}$; (iv) $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

Exercício 2.2 *Seja* $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| = 2\}$ *orientado no sentido positivo. Calcule:*

(i) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+4}dz$; *(ii)* $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2}dz$.

Resp.: (i) $\frac{\pi}{2}$; (ii) $\frac{\pi}{16}$.

Exercício 2.3 *Seja* $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 3\}$ *orientado no sentido positivo. Mostre que se* $g(w) = \displaystyle\int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}dz$, $|w| \neq 3$, *então* $g(2) = 8\pi i$. *Qual o valor de* $g(w)$ *quando* $|w| > 3$*?*

Exercício 2.4 *Seja* C *qualquer contorno simples, fechado e orientado no sentido positivo e considere* $g(w) = \displaystyle\int_C \frac{z^3 + 2z}{(z-w)^3}dz$. *Mostre que*

$$g(w) = \begin{cases} 6\pi i w, & \text{se } w \text{ pertence ao interior de } C; \\ 0, & \text{se } w \text{ pertence ao exterior de } C. \end{cases}$$

Exercício 2.5 *Mostre que se* $f(z)$ *for analítica no interior e sobre uma curva fechada e simples* C *então* $\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ *,para* $z_0 \notin C$.

Exercício 2.6 *Seja $f(z)$ uma função contínua em uma curva simples e fechada C. Prove que a função*

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}ds$$

é analítica em z pertencente ao interior de C e que $g'(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}ds$.

Boa Sorte!