Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista 4

1 Assunto: logarítmos

Exercício 1.1 *Mostre que:*

(a) $Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$ *(b)* $Log(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i.$

Exercício 1.2 *Seja* $n \in \mathbb{Z}$, *mostre que:*

(a) $\log e = 1 + 2n\pi i$; *(b)* $\log i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$; *(c)* $\log(-1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + 2\left(n + \frac{1}{3}\right)\pi i.$

Exercício 1.3 *Mostre que:*

(a) $Log(1+i)^2 = 2Log(1+i)$; *(b)* $Log(-1+i)^2 \neq 2Log(-1+i)$.

Exercício 1.4 *Mostre que:*

(a) $\log(i^2) = 2\log i$, *quando* $\log z = \ln r + i\theta \ \left(r > 0,\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}\right)$;

(b) $\log(i^2) \neq 2\log i$, *quando* $\log z = \ln r + i\theta \ \left(r > 0,\ \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}\right)$.

Exercício 1.5 *Mostre que:*

1. *O conjunto de valores de* $\log(i^{\frac{1}{2}})$ *é* $\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. *Veja agora que o mesmo é válido para* $\frac{1}{2}\log i$.

2. *O conjunto de valores de* $\log(i^2)$ *não é igual ao do* $2\log i$.

Exercício 1.6 *Encontre todas as raízes da equação* $\log z = i\frac{\pi}{2}$. ***Resp.:*** $z = i$.

Exercício 1.7 *Mostre que a função* $\ln(x^2 + y^2)$ *é harmônica em* $\mathbb{C} - \{0\}$.

Exercício 1.8 *Mostre que* $Re[\log(z-1)] = \frac{1}{2}\ln[(x-1^2)+y^2], z \neq 1$. *Por que essa função satisfaz a equação de Laplace quando* $z \neq 1$?

Exercício 1.9 *Mostre que se* $Re(z_1), Re(z_2) > 0$, *então* $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2)$.

Exercício 1.10 *Mostre que se* $z_1, z_2 \neq 0$, *então* $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2N\pi i$, *onde* N *pode assumir um dos valores* $0, \pm 1$. *Compare com o exercício anterior.*

Exercício 1.11 *Mostre que a expressão* $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$ *pode não ser válida quando* $\log$ *é substituido por Log.*

Exercício 1.12 *Seja* $n \in \mathbb{Z}$*, mostre que:*

(a) $(1+i)^i = e^{(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)}e^{(\frac{i}{2}\ln 2)}$; *(b)* $(-1)^{\frac{1}{\pi}} = e^{(2n+1)i}$

Exercício 1.13 *Encontre o valor principal.*

(a) i^i *(b)* $\left[\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right]^{3\pi i}$ *(c)*$(1-i)^{4i}$

Resp.: (a) $e^{-\frac{\pi}{2}}$; (b) $-e^{2\pi^2}$; (c) $e^{\pi}[\cos(2\ln 2) + i\sin(2\ln 2)]$.

Exercício 1.14 *Mostre que* $(-1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$.

Exercício 1.15 *Mostre que se* $z \neq 0$ *e* $a \in \mathbb{R}$*, então* $|z^a| = e^{(a\ln|z|)} = |z|^a$*, onde o valor principal de* $|z^a|$ *é tomado.*

Exercício 1.16 *Fixe* $c = a + bi$ *um número complexo, no qual* $c \notin \mathbb{Z}$*. Note que* i^c *possui multiplos valores. Qual restrição deve ter a constante c para que* $|i^c|$ *assuma sempre o mesmo valor?* ***Resp.:*** *c deve ser real.*

Exercício 1.17 *Assuma que* $f'(z)$ *exista e encontre uma fórmula para a derivada de* $c^{f(z)}$ *no qual* $c \in \mathbb{C}$.

2 Assunto: integração

Exercício 2.1 *Calcule as integrais abaixo:*

(a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$; *(b)* $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{i2t}dt$; *(c)* $\int_0^{\infty} e^{-zt}dt$, $Re(z) > 0$.

Resp.: (a) $-\frac{1}{2} - i\ln 4$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; (c) $\frac{1}{z}$.

Exercício 2.2 *Seja* $m, n \in \mathbb{Z}$*. Mostre que* $\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$

Exercício 2.3 *Seja* $w(t) = u(t) + iv(t)$ *uma função a valores complexos contínua definida em* $-a \leq t \leq a$.

(i) Suponha $w(t)$ *par, isto é* $w(-t) = w(t)$, $\forall\, t \in [-a, a]$*. Mostre que* $\int_{-a}^{a} w(t)dt = 2\int_0^a w(t)dt$;

(ii) Suponha $w(t)$ *ímpar, isto é* $w(-t) = -w(t)$, $\forall\ t \in [-a, a]$*. Mostre que* $\int_{-a}^{a} w(t)dt = 0$.

Exercício 2.4 *Mostre que para todo* $x \in [-1,1]$, *as funções*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

satisfazem a inequação $|P_n(x)| \leq 1$.

Exercício 2.5 *Calcule* $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z} dz$ *quando* C *for:*

(a) $C = \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$;

(b) $C = \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\theta},\ \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$;

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Resp.: (a) $-4 + 2\pi i$; (b) $4 + 2\pi i$; (c) $4\pi i$.

Exercício 2.6 *Calcule* $\displaystyle\int_C (z-1)dz$, *onde* C *é um arco de* $z = 0$ *a* $z = 2$ *tal que:*

1. $C = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + e^{i\theta},\ \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$;
2. C *é o segmento* $0 \leq x \leq 2$ *no eixo real.*

Resp.: (1) 0; (2) 0.

Exercício 2.7 *Calcule* $\displaystyle\int_C (\pi e^{\pi \bar{z}})dz$, *onde* C *é a fronteira de um quadrado com vértices nos pontos* $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ *e orientado no sentido anti-horário.* ***Resp.:*** $4(e^{\pi} - 1)$.

Exercício 2.8 *Calcule* $\displaystyle\int_C f(z)dz$, *onde* $f(z) = \begin{cases} 1, & y < 0, \\ 4y, & y > 0, \end{cases}$ *e* C *é o arco de* $z = -1-i$ *a* $z = 1+i$ *sobre a curva* $y = x^3$. ***Resp.:*** $2 + 3i$.

Exercício 2.9 *Calcule* $\displaystyle\int_C 1dz$, *onde* C *é um contorno arbitrário de* z_1 *a* z_2. ***Resp.:*** $z_2 - z_1$.

Exercício 2.10 *Considere* $C = \{z \in \mathbb{C} :\ z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ *e* $C_0 = \{z \in \mathbb{C} :\ z = z_0 + Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. *Mostre que* $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z - z_0)dz$, *onde* $f(z)$ *é contínua por partes em* C.

Exercício 2.11 *Seja* $C_0 = \{z \in \mathbb{C} :\ z = z_0 + Re^{i\theta},\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$. *Mostre que:*

(a) $\displaystyle\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$;

(b) $\displaystyle\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$, $n = \pm 1,\ \pm 2 \cdots$.

Boa Sorte!