Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista de exercícios 3

1 Assunto: funções analíticas

Exercício 1.1 *Verifique quais funções abaixo são inteiras*

1. $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$;
2. $f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}cosx$;
3. $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$.

Exercício 1.2 *Verifique em quais pontos $z = (x, y)$ as funções abaixo não são analíticas.*

1. $f(z) = xy + iy$;
2. $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$;
3. $f(z) = e^y e^{ix}$.

Exercício 1.3 *Prove que:*

1. *A composição de duas funções inteiras é inteira.*
2. *Sejam f_1, f_2 funções inteiras e c_1, c_2 constantes complexas. Prove que qualquer combinação linear do tipo $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$ é inteira.*

Exercício 1.4 *Para cada função abaixo, determine os pontos de singularidade e justifique em quais pontos a função é analítica.*

1. $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ 2. $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ 3. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

Exercício 1.5 *Seja $f(z)$ uma função analítica num domínio D. Prove que $f(z)$ será constante em D se*

1. *$f(z)$ for uma função real para todo $z \in D$;*
2. *$|f(z)|$ é constante em D.*

Exercício 1.6 *Seja $f(z)$ uma função inteira.*

(a) *Mostre que $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira.*

(b) *Mostre que $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(0) = 0$.*

2 Assuntos: funções harmônicas

Exercício 2.1 *Para cada função abaixo, mostre que $u(x,y)$ é harmônica em algum domínio e encontre o seu conjugado harmônico.*

1. $u(x,y) = 2x(1-y)$;
2. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$;
3. $u(x,y) = \sinh x \ \sin y$;
4. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$;

Boa Sorte!