Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP‘s

Prof.: Tiago H. Picon

Lista de exercícios 2

1 Asssunto: limites

Exercício 1.1 *Prove, utilizando a definição formal, os seguintes limites:*

1. $\lim_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z_0}$ *2.* $\lim_{z\to z_0} Re(z) = Re(z_0)$ *3.* $\lim_{z\to z_0} Im(z) = Im(z_0)$

4. $\lim_{z\to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z} = 0$ *5.* $\lim_{z\to 1-i} [x + i(2x+y)] = 1+i$

Exercício 1.2 *Seja* $n \in \mathbb{Z}_+$ *e considere* $P(z)$, $Q(z)$ *polinômios no qual* $Q(z_0) \neq 0$. *Calcule:*

1. $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z^n}$, $(z_0 \neq 0)$ *2.* $\lim_{z\to i} \frac{iz^3-1}{z+i}$ *3.* $\lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Dica: *Estude o Teorema* 2 *e os limites da Seção 15 do livro texto.*

Exercício 1.3 *Use indução matemática e propriedades de limite para mostrar que* $\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$ *quando* n *for um inteiro positivo.*

Exercício 1.4 *Mostre que o limite da função* $f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ *quando* $z \to 0$ *não existe.*

Exercício 1.5 *Prove que se* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, *então* $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$. *Vale a recíproca?*
Dica: *Lembre que* $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Exercício 1.6 *Mostre que* $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$ *se* $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ *e existir um número* M *positivo tal que* $|g(z)| \leq M$ *para todo* z *em uma vizinhança de* z_0.

2 Assunto: derivadas

Exercício 2.1 *Para cada função abaixo, determine* $f'(z)$.

1. $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$ *2.* $f(z) = (1-4z^2)^3$ *3.* $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$ $(z \neq -\frac{1}{2})$

4 $f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z}$ $(z \neq 0)$.

Exercício 2.2 *Mostre que:*

(i) O polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ *de grau* $n \geq 1$ *é diferenciável em todos os pontos e sua derivada é dada por* $P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$.

(ii) Os coeficientes do polinômio $P(z)$ do item anterior podem ser escritos como

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \cdots \quad , a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exercício 2.3 *Considere $f(z) = \frac{1}{z}$. Mostre que $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ para $z \neq 0$.*

Exercício 2.4 *Mostre que a expressão $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ permanece válida quando n for um inteiro negativo, assumindo $z \neq 0$.*

Exercício 2.5 *Para $f(z)$ dada abaixo, mostre que $f'(z)$ não existe em todo ponto z.*

1. $f(z) = \bar{z}$ *2.* $f(z) = Re(z)$ *3.* $f(z) = Im(z)$

Dica: *Estude o Exemplo 2 da seção 18 do livro texto.*

Exercício 2.6 *Seja f definida por* $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$ *. Prove que $f'(0)$ não existe.*

Exercício 2.7 *Seja $f(z) = e^{iz}$. Para quais valores temos $f(\overline{z}) = \overline{f(\overline{z})}$?*

3 Assunto: condições de Cauchy-Riemann

Exercício 3.1 *Para cada $f(z)$ abaixo, mostre que $f'(z)$ não existe $\forall\, z \in \mathbb{C}$.*

1. $f(z) = \bar{z}$ *2.* $f(z) = z - \bar{z}$ *3.* $f(z) = 2x + ixy^2$ *4.* $f(z) = e^x e^{-iy}$

Exercício 3.2 *Para cada $f(z)$ abaixo, mostre que $f'(z)$ e $f''(z)$ existem em todos os pontos e calcule $f''(z)$.*

1. $f(z) = iz + 2$ *2.* $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$ *3.* $f(z) = z^3$

Exercício 3.3 *Determine quando $f'(z)$ existe e então calcule $f'(z)$.*

1. $f(z) = \frac{1}{z}$ *2.* $f(z) = x^2 + iy^2$ *3.* $f(z) = zIm(z)$

Exercício 3.4 *Considere $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$. Mostre que é possível escrever $f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2$ apenas quando $z = i$.*

Exercício 3.5 *Seja $f(z)$ definida por* $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$ *. Verifique que as equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ são satisfeitas na origem $z = (0,0)$. Compare com o Exercício 2.6 acima.*

Exercício 3.6 *Resolva as seguintes questões abaixo:*

1. *Considere* $F(x, y)$ *uma função de duas variáveis reais e então derive a expressão*

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

   Dica: *Se* $z = x + iy$ *então* $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ *e* $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

2. *Defina a operação* $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ *como anteriormente. Mostre que se as derivadas parciais de primera ordem da parte real e imaginária de* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *satisfazem as equações de Cauchy-Riemann então*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[(u_x(x, y) - v_y(x, y)) + i(v_x(x, y) + u_y(x, y))] = 0.$$

   Como aplicação prove que $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ *como consequência das equações de Cauchy-Riemann.*

Exercício 3.7 *Verifique em quais pontos as funções abaixo são deriváveis, caso possível. Em caso afirmativo, calcule a derivada no respectivo ponto.*

1. $f(z) = z + 2\bar{z}^2$ 2. $f(z) = z^3 Re(z)$ 3. $f(z) = Re(z^4)$

4. $f(z) = [Re(z)]^4$ 5. $f(z) = Im(z^4)$ 6. $f(z) = z^2 + |z|^2$

7. $f(z) = z^2 + Re(z - 2)^2$ 8. $f(z) = z^2 + 5Re(z)$

Exercício 3.8 *Mostre que* $f(z) = \sqrt{xy}$ *satisfaz as condições de Cauchy-Riemann no ponto* $z = 0$ *mas não é derivável nesse ponto. Justifique.*

Exercício 3.9 *Seja* $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$. *Prove que* f *não é derivável em* $z = 0$.

Exercício 3.10 *Seja* $f(z) = \begin{cases} 0, & x \cdot y = 0 \\ 1, & x \cdot y \neq 0. \end{cases}$. *Em quais pontos* $z = (x, y)$ *valem as condições de Cauchy-Riemann ?*

Boa Sorte!