Lista 1 de Geometria Diferencial
09/03/2020

1. Encontre uma curva diferenciável cujo traço contenha o gráfico da parábola $y = x^2$ com $-1 \leq x \leq 2$. Obtenha a velocidade e a aceleração dessa curva, e calcule seu comprimento.

2. Obtenha uma curva $\gamma(s)$ que parametriza a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calcule sua velocidade e aceleração. Em que pontos da curva a velocidade e aceleração são ortogonais ?

3. Para a curva $\gamma(s) = (s, |s|)$, $s \in \mathbb{R}$, existe alguma reparametrização $\sigma(u) = \gamma(\varphi(u))$ que a torne de classe C^k ? E de classe C^∞ ?

4. Suponha que todas as retas tangentes a uma curva regular γ passem por um ponto fixo p. Mostre que o traço de γ é um segmento.

5. A *reta normal* à curva γ no ponto $\gamma(s)$ é a reta dada por $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(s) + tn(s)$. Mostre que se todas as retas normais a uma curva passam por um ponto fixo então o traço da curva está contido numa circunferência.

6. a) Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular. Mostre que a curvatura k tem expressão

$$k(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \; .$$

b) Para uma curva plana de coordenadas $(x(s), y(s))$ sua curvatura é

$$k(s) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \; .$$

7. Para uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ mostre que a torção é

$$\tau = -\frac{\gamma' \times \gamma''.\gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2} \; .$$

8. Faça um esboço de cada curva, e calcule sua curvatura e torção.
a) $\gamma(s) = (2s, s^2, s^3/3)$, $s \in \mathbb{R}$.
b) $\gamma(s) = \frac{s}{2\pi}(\cos(s), \operatorname{sen}(s))$, $s \geq 0$.

9. Mostre que uma curva no $\mathbb{R}^3$ descreve uma circunferência se e somente se $k > 0$ for constante e τ for nulo.

10. A *curvatura total* de uma curva cadenciada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é a integral $\int_a^b k(s)\, ds$, sendo $k(s)$ a curvatura com sinal de γ. Suponha que γ é curva fechada e periódica, ou seja, γ e suas derivadas coincidem em a e b. Prove que a curvatura total é $2\pi m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Encontre uma interpretação geometrica para m.

11. Uma matriz $A_{n\times n}$ é **ortogonal** se $A^T A = I$ a matriz identidade de ordem n. Equivalentemente, A é ortogonal se suas linhas (ou colunas) são coordenadas dos vetores de uma base ortonormal do R^n (relativo à métrica euclidiana).

Uma **isometria** do $\mathbb{R}^n$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com a propriedade $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria se e somente se existe matriz ortogonal A de ordem n e um vetor $b \in \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = A.x + b$, $x \in \mathbb{R}^n$.