Disciplina: Funções de uma Variável Complexa e EDP's

Prof.: Tiago H. Picon

Lista 1

Resolva os exercícios selecionados do livro texto "Complex Variables and Applications"de James W. Brown e Ruel V. Churchill, sétima edição, Mc Graw Hill.

Páginas 04-05: 1 ao 10

1) Verifique que:
 a) $(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=-2i$;
 b) $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$;
 c) $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)=(2,1)$.
2) Mostre que:
 a) $Re(iz)=-Im(z)$;
 b) $Im(iz)=Re(z)$.
3) Mostre que $(1+z)^2=1+2z+z^2$.
4) Verifique que cada um dos dois números $z=1\pm i$ satisfaz a equação $z^2-2z+2=0$.
5) Prove que a multiplicação de números complexos é comutativa.
6) Verifique a validade da:
 a) Lei da associatividade da adição de números complexos;
 b) Lei da distributividade.
7) Use a associatividade da adição e a distributividade para mostrar que:

$$z(z_1+z_2+z_3)=zz_1+zz_2+zz_3.$$

8) Usando que $i=(0,1)$ e $y=(y,0)$, mostre que $-(iy)=(-i)y=i(-y)$.
9) a) Escreva $(x,y)+(u,v)=(x,y)$ e indique por que disso decorre que o número complexo $0=(0,0)$ é único como elemento neutro da adição.
 b) Analogamente, escreva $(x,y)(u,v)=(x,y)$ e mostre que o número complexo $1=(1,0)$ é único como elemento neutro da multiplicação.
10) Resolva a equação $z^2+z+1=0$ em $z=(x,y)$ escrevendo:

$$(x,y)(x,y)+(x.y)+(1,0)=(0,0)$$

e então resolvendo um par de equações simultaneamente em x e y.
 Sugestão: Mostre que a equação não possui solução real x, e que, portanto, $y\neq 0$.
 Resposta: $z=\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Páginas 07-08: 1 ao 8

1) Reduza cada uma das expressões a seguir a um número real:

a) $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$;

b) $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

c) $(1-i)^4$.

2) Mostre que:

a) $(-1)z=-z$;

b) $\dfrac{1}{1/z}=z$.

3) Use a associatívidade e a comutatividade da multiplicação para mostrar que

$$(z_1z_2)(z_3z_4)=(z_1z_3)(z_2z_4).$$

4) Prove que se $z_1z_2z_3=0$, então pelo menos um dos três fatores é nulo.

Sugestão: Escreva $(z_1z_2)z_3=0$ e use o resultado análogo com dois fatores.

5) Deduza a expressão (6) da Seção 3 para o quociente z_1/z_2 pelo método descrito logo depois da expressão.

(6) da Seção 3

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)\qquad (z_2\neq 0).$$

Também, observando que (Exercício 3)

$$(z_1z_2)({z_1}^{-1}{z_2}^{-1})=(z_1{z_1}^{-1})(z_2{z_2}^{-1})\qquad (z_1\neq 0, z_2\neq 0).$$

6) Com o auxílio das relações (6) e (7) na Seção 3 deduza a identidade (8).

(7) da Seção 3

$$\frac{1}{z_1z_2}=(z_1z_2)^{-1}={z_1}^{-1}{z_2}^{-1}=\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)\qquad (z_1\neq 0, z_2\neq 0).$$

(8) da Seção 3

$$\frac{z_1z_2}{z_3z_4}=\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)\qquad (z_3\neq 0, z_4\neq 0).$$

7) Use a identidade obtida no Exercício 6 para deduzir a lei do cancelamento

$$\frac{z_1z}{z_2z}=\frac{z_1}{z_2}\qquad (z_2\neq 0, z\neq 0).$$

8) Use indução matemática para verificar a validade da fórmula do binômio (9) da Seção 3. Mais precisamente, observe que a fórmula é verdadeira se $n=1$. Em seguida, supondo que a fórmula seja válida com algum $n=m$, em que m denota algum número inteiro positivo, mostre que a fórmula é válida com $n=m+1$.

(9) da Seção 3

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {z_1}^{n-k} {z_2}^{k} \qquad (n=1,2,3,...)$$

Onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k=0,1,2,3,...,n).$$

Página 11: 3 e 4

3) Verifique que $\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$.
Sugestão: Reduza essa desigualdade a $(|x|-|y|)^2 \geq 0$.

4) Em cada caso, esboce o conjunto de pontos determinado pela condição dada.
a) $|z-1+i| = 1$;
b) $|z+i| \leq 3$;
c) $|z-4i| \geq 4$.

Páginas 13-14: 1, 2, 6-8, 11-13

1) Use as propriedades dos conjugados e módulos estabelecidas para mostrar que:
a) $\overline{\overline{z}+3i} = z-3i$;
b) $\overline{iz} = i\overline{z}$;
c) $\overline{(2+i)^2} = 3-4i$;
d) $|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$.

2) Esboce o conjunto de ponto determinado pela condição dada:
a) $Re(\overline{z}-i) = 2$;
b) $|2z-i| = 4$.

6) Mostre que, sendo z_2 e z_3 não nulos,
a) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\ \overline{z_3}}$;
b) $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

7) Usando as propriedades do módulo estabelecidas, mostre que quando $|z_3| \neq |z_4|$,

$$\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}.$$

8) Mostre que:

$$|Re(2+\overline{z}+z^3)| \leq 4, \text{ quando } |z| \leq 1.$$

11) Prove que:
a) z é real se, e só se $\overline{z} = z$;
b) z é real ou imaginário puro se, e só se $\overline{z}^2 = z^2$.

12) Use indução matemática para mostrar que, se $n = 2, 3, ...$, então

a) $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$;

b) $\overline{z_1 z_2 ... z_n} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}\ ...\ \overline{z_n}$.

13) Sejam a_0, a_1, a_2, ..., a_n $(n \geq 1)$ número *reais* e z algum número complexo. Usando os resultados do Exercício 11, mostre que

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + ... + a_n \overline{z}^n.$$

Boa Sorte!