Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e
Letras de Ribeirão Preto

Introdução a Teoria das Distribuições

Iniciação Científica

Projeto FAPESP: 2019/ 19199-8

Aluna: Catarina Barbosa Machado.
Orientador: Tiago Henrique Picon.

Outubro de 2020

Sumário

1 Distribuições **3**

1.1 Preliminares 3

1.1.1 Notações 3

1.1.2 Funções testes 5

1.1.3 Convergência em $C_c^\infty(\Omega)$ 17

1.2 Distribuições 18

1.3 Operações com Distribuições 28

1.4 Mudança de Variáveis 36

1.5 Derivadas e Primitivas 40

1.6 Partições da Unidade 43

1.7 Suporte de uma Distribuição 47

1.8 Convolução de Distribuições 54

2 Transformada de Fourier **66**

2.1 Espaço de Schwartz 71

2.2 Transformada de Fourier em $S'(\Omega)$. 84

2.3 Transformada Parcial de Fourier 98

3 Solução Fundamental **104**

3.1 Solução Fundamental do operador de calor 110

3.2 Solução Fundamental do operador de onda 115

3.3 Solução Fundamental do operador de Laplace 120

Capítulo 1

Distribuições

1.1 Preliminares

1.1.1 Notações

Abaixo descreveremos notações e resultados importante oriundos de Teoria da Medida e Integração, Análise em $\mathbb{R}^n$ e Cálculo Avançado, cujas bibliografias estão devidamente citadas ao final deste trabalho.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos seu fecho por $\bar{A}$. Seja $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, utilizaremos $|v|$ para denotar a norma do vetor v, que poderá ser

$$\|\alpha\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\alpha\|_2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \qquad \|\alpha\|_3 = \max_{1 \le j \le n} |\alpha_j|.$$

Como as três normas são equivalentes em $\mathbb{R}^n$ em cada ocasião necessária será destacada qual norma será utilizada. Sejam $c \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, representamos de centro c e raio r a bola aberta, fechada e a esfera, respectivamente, do seguinte modo: $B(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-c| < r\}, B[c,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-c| \le r\}$ e $S(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-c| = r\}$. Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ então α representa a n-upla de inteiros positivos, ou seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$. Seja $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ diferenciável, temos que

$$\partial^\alpha \phi(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} \phi(x).$$

A notação $\beta \le \alpha$ equivale a $\beta_j \le \alpha_j$, para todo $j = 1, 2, ..., n$, bem como $\alpha^\beta = \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} ... \alpha_n^{\beta_n}$. Além disso

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}...\binom{\alpha_n}{\beta_n}, \text{ sempre que } \beta \le \alpha.$$

Denotamos por m a chamada *medida de Lebesgue*, cujo domínio de m é chamado *classe dos conjuntos Lebesgue mensuráveis*, e é denotado por $\mathcal{L}$. Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $E \subset X$, definimos a função característica $\mathcal{X}_E$ de E por:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

(Espaço $L^p(X)$ - Capítulo 6 [3].) Seja $(X, \mathcal{M}, m)$ um espaço de medida. Se f é uma função mensurável em X e $0 < p < \infty$, então definimos

$$\|f\|_{L^p} \doteq \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{1/p}.$$

Além disso, definimos o espaço $L^p(X)$ como

$$L^p(X) \doteq \{f : X \to \mathbb{C}, f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Por fim, utilizamos $\|\cdot\|_{L^p}$ como a norma do espaço $L^p(X)$.(Desigualdade de Minkowski - Capítulo 6 [3].) Se $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p$, então

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

(Espaço $L^\infty(X)$ - Capítulo 6 [3].) Seja f mensurável em X. Definimos

$$\|f\|_{L^\infty(X)} \doteq \inf\{a \geq 0; \mu(\{x; |f(x)| > a\}) = 0\},$$

com a convenção de que $\inf \varnothing = \infty$. Além disso, definimos o espaço $L^\infty(X)$ como

$$L^\infty(X) \doteq \{f : X \to \mathbb{C}, f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

Por fim, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ é uma norma do espaço $L^\infty(X)$, mas para $\mu = m$ em $\mathbb{R}^n$ e f contínua em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{\sup} \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Teorema 1.1 (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Se $f : K \mapsto \mathbb{C}$ é uma função contínua, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.*

Demonstração. A demonstração se encontra na referência [2], pelo Teorema 17 e Corolário 3. ∎

Em outras palavras toda função contínua em conjunto compacto K atinge seus valores mínimo e máximo em pontos de K e portanto é limitada. Por fim, sejam $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \mapsto R^n$ funções diferenciáveis, então definimos o vetor gradiente da função f como $\bigtriangledown f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$, a derivada direcional da função f em relação ao vetor v como o produto interno $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \bigtriangledown f(x).v(x)$ e o divergente da função g como $\text{div} g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)$, no qual g_i são as funções coordenadas de g.

1.1.2 Funções testes

Definição 1.1. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos o suporte de f por*

$$\text{supp}\, f \doteq \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Note que se uma função f se anula fora de um subconjunto limitado de Ω, então supp f é um conjunto compacto.

Exemplo 1.1. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(x)$. Lembre-se que $f(x) = 0$ para todo $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \text{supp}\, f &= \overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}} \\ &= \overline{\mathbb{R} - \{k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} -x^2 - y^2 + 4, & B[0,2] \\ 0, & B[0,2]^c. \end{cases}$$

Observe o gráfico da g

graf.png

Calculemos seu suporte.

$$\operatorname{supp} g = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; g(x,y) \neq 0\}} = \overline{B(0,2)} = B[0,2].$$

Definição 1.2. *Definimos o conjunto das funções testes por*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \operatorname{supp} f \text{ é compacto em } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

O conjunto também pode ser denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$.

Exemplo 1.3. Seja $f : (0,10) \times (0,10) \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x + y$. Então $f \in C_c^\infty((0,10) \times (0,10))$.

De fato, observe que f é de classe C^∞. Ao calcularmos o suporte pela definição teríamos

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{(x,y) \in (0,10) \times (0,10); f(x,y) \neq 0\}} = \overline{(0,10) \times (0,10)} = [0,10]\times[0,10].$$

Porém nosso espaço é $(0,10) \times (0,10)$, sendo assim o conjunto $\operatorname{supp} f$ é um subconjunto de $(0,10) \times (0,10)$, ou ainda estamos procurando um fechado relativo no espaço dado. Logo, como $\operatorname{supp} f = (0,10) \times (0,10)$ é compacto então $f \in C_c^\infty((0,10) \times (0,10))$.

Exemplo 1.4. Inspirado na função g apresentada no Exemplo 1.2, defina $g_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ como

$$g_1(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, g_1 pertence possui suporte compacto, mas não é de classe C^∞.

De fato, primeiramente note que $\operatorname{supp} g_1 = [-2,2]$ é um conjunto fechado e limitado e portanto compacto. Mostremos agora que g_1 é contínua, mas sua primeira derivada não está definida em todo domínio, para isso calculemos os limites laterais em seus possíveis pontos de descontinuidade: $x = 2$ e $x = -2$, visto que $g_1|_{(-2,2)}$ e $g_1|_{(-2,2)^c}$ são funções de classe C^∞.

$$\lim_{x\to 2^+} g_1(x) = \lim_{x\to 2^+} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-} g_1(x) = \lim_{x\to 2^-} -x^2 + 4 = 0.$$

$$\lim_{x\to -2^+} g_1(x) = \lim_{x\to -2^+} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -2^-} g_1(x) = \lim_{x\to -2^-} -x^2 + 4 = 0.$$

Logo, g_1 é contínua em todo seu domínio. Vamos agora verificar se a derivada está bem definida em $x = 2$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g_1(2+h) - g_1(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g_1(2+h) - g_1(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -4-h = -4.$$

De maneira análoga, g_1' também não está bem definida em $x = -2$ e portanto nossa $g_1 \notin C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.5. Vejamos agora um exemplo de função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, porém com suporte não limitado. Considere assim a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & \text{se } t>0,\\ 0, & \text{se } t\leq 0.\end{cases}$$

Afirmamos que $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, isto é, f é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. De fato, para $t>0$, f é dada por composição de funções contínuas: $g(t)=-t^{-1}$ e $h(u)=e^u$. Mais ainda, f é contínua na origem pois

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{e^{1/t}}=0=f(0).$$

Note também que f é derivável na origem, pois

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}0=0 \text{ e } \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-1/t}}{t}=0.$$

Logo, f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(t)=\begin{cases} \dfrac{e^{-1/t}}{t^2}, & \text{se } t>0,\\ 0, & \text{se } t\leq 0.\end{cases}$$

Analogamente, obtemos que f possui derivada de qualquer ordem, uma vez que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-1/t}}{t^j}=0$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Logo $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. Por outro lado, como observado em seu gráfico, f não possui suporte compacto pois $\lim_{t\to+\infty} f(t)=1$ e assim nosso suporte não é limitado.

Exemplo 1.6. Considere a função $\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $\alpha(x)=1-\|x\|^2=1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)$, no qual $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Como esta função é polinomial, então $\alpha\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para f definida como no exemplo anterior, estudemos a composição $\phi(x)=(f\circ\alpha)(x)$, dada por

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \begin{cases} e^{-1/(1-\|x\|^2)}, & \text{se } 1-\|x\|^2>0,\\ 0, & \text{se } 1-\|x\|^2\leq 0,\end{cases}\\ &= \begin{cases} e^{-1/(1-\|x\|^2)}, & \text{se } \|x\|<1,\\ 0, & \text{se } \|x\|\geq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Note que $\operatorname{supp}\phi=\overline{B(0,1)}=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|<1\}}$, que é compacto. Mais ainda, $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois é dada pela composição de funções de classe C^∞. Logo, ϕ é uma função teste.

Observação 1.1. Seja $\psi \geq 0$ uma função teste tal que $\operatorname{supp}\psi = \overline{B(0,1)}$. Vejamos que podemos multiplicar ψ por uma constante adequada α de forma que $\int \alpha\psi(x)\, dx = 1$ e $\alpha\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = \int_{B[0,1]} \psi(x)\, dx \leq \left(\sup_{x\in B[0,1]} \psi(x)\right) m(B[0,1]) < \infty,$$

pois ψ é contínua e $B[0,1]$ é um conjunto compacto, o que implica que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x\in B[0,1]} \psi(x) < M.$$

Assim,

$$\int_{B(0,1)} \psi(x)\, dx = c < \infty \Leftrightarrow \int_{B(0,1)} \frac{\psi(x)}{c}\, dx = 1.$$

Redefinindo ψ por ψ/c, obtemos uma função teste positiva tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 1$.

Definição 1.3. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função Lebesgue-mensurável tal que para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty.$$

Então dizemos que f é localmente integrável, e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 1.7. Se $f \in C(\Omega)$, ou seja, se f é contínua em Ω, então $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, dado $K \subset \Omega$ um subconjunto compacto, como f é contínua então existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x\in K} f(x) = M < \infty$$

Deste modo,

$$\int_K |f(x)| dx \leq \int_K M dx = M.m(K) < \infty$$

Exemplo 1.8. Considere a função característica $\mathcal{X}_{B(0,1)}$ definida em $\mathbb{R}^n$. Note que $\mathcal{X}_{B(0,1)}$ é Lebesgue-mensurável e $\mathcal{X}_{B(0,1)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. De fato

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \int_{B(0,1)} 1 dx + \int_{B(0,1)^c} 0 dx = m(B(0,1)) = 1 < \infty$$

Exemplo 1.9. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log |x|$, então $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} - \{0\})$. Abaixo, observe o gráfico da função f

graflog.png

De fato, como f é uma composição de funções contínuas então f é contínua em todo seu domínio e, pelo Exemplo 1.7, concluímos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} - \{0\})$.

A seguir mostraremos como é possível obtermos funções testes a partir do exemplo construído na Observação 1.1.

Definição 1.4. *Sejam f, g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy,$$

quando a integral estiver bem definida.

Observe que, através da mudança de variável $z = x - y$, obtemos que $f * g = g * f$. De fato

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-z)f(z)\, dz = g*f(x)$$

Exemplo 1.10. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, mostremos que $f * g$ está bem definida

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \text{ pela Desigualdade de Holder} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \text{ com a mudança de variável } z = x - y \\
&= \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q} < \infty.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.11. Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e g mensurável, com suporte compacto e limitada ($|g(x)| \leq M$ para todo x). Mostremos que $f * g$ está bem definida

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right| \\
&\leq \int_{\operatorname{supp} g} |f(x-y)||g(y)|dy \\
&\leq \int_{\operatorname{supp} g} |f(x-y)|M dy \\
&= M \int_{\operatorname{supp} g} |f(x-y)|dy \\
&= M \int_{X+\operatorname{supp} g} |f(z)|dz < \infty.
\end{aligned}$$

A seguir vamos relembrar algumas definições e resultados de *Espaços Métricos* que servirão como instrumentos para demonstrarmos o próximo Teorema deste capítulo.

Definição 1.5. *Dizemos que uma aplicação $f : M \mapsto N$ é uniformemente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in M$ com $d(x,y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Proposição 1.1. *Se o espaço métrico M é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \mapsto N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\varepsilon > 0$, x_n e y_n para cada $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(x_n, y_n) < n^{-1}$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Como M é compacto, então $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são sequências limitadas e, pelo *Teorema de Bolzano Weierstrass*, existem subsequências $(x_{n_k})_k$ e $(y_{n_j})_j$ tais que x_{n_k} e $y_{n_j} \longrightarrow a \in M$. Como f é contínua, então

$$\lim_{j,k \to \infty} d(f(x_{n_k}), f(y_{n_j})) = d(f(a), f(a)) = 0.$$

Contradizendo $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. ∎

Lema 1.1. *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in C^\infty$ e $\partial^\alpha(f * g)(x) = (f * \partial^\alpha g)(x)$.*

Demonstração. Para facilitarmos a notação, considere $\alpha = e_1$ o vetor canônico $(1, 0, ..., 0)$, assim

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_1}(f*g)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f*g)(x+he_1)-(f*g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x+he_1-y)g(y)dy-\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x+he_1-y)dy-\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)(g(x+he_1-y)-g(x-y))}{h}dy\\
&\overset{*}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{h\to 0} f(y)\frac{g(x+he_1-y)-g(x-y)}{h}dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\lim_{h\to 0}\frac{g(x-y+he_1)-g(x-y)}{h}dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\lim_{h\to 0}\frac{g(x-y+he_1)-g(x-y)}{h}dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{x_1}g(x-y)dy \text{ , pois } g\in C^\infty.
\end{aligned}
$$

* Pelo Teorema da Convergência Dominada. Além disso, pela Desigualdade do Valor Médio, melhor detalhada na referência [2], temos que

$$
\begin{aligned}
|g(x-y+he_1)-g(x-y)| &\le |(x-y+he_1)-(x-y)|.\sup_{z\in[x-y+he_1,x-y]}\partial_{x_1}g(z)\\
&= |h|.\sup_{z\in[x-y+he_1,x-y]}\partial_{x_1}g(z).
\end{aligned}
$$

Como $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $\partial_{x_1}g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e portanto para cada x existe $M>0$ tal que

$$\sup_{z\in[x-y+he_1,x-y]}\partial_{x_1}g(z)\le M.$$

Logo

$$\frac{|g(x-y+he_1)-g(x-y)|}{|h|}\le M,$$

justificando o uso do Teorema da Convergência Dominada. ■

Teorema 1.2. *Seja $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int\phi\,dx=1$, $\phi(x)\ge 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$ e $\operatorname{supp}\phi\subseteq B(0,1)$, e seja $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon>0$, defina $\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$ e considere a convolução*

$$f_\varepsilon(x)\doteq\phi_\varepsilon*f(x)=\int\phi_\varepsilon(x-\varepsilon y)f(y)\,dy=\frac{1}{\varepsilon^n}\int\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)\,dy.$$

Então:

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *Se* $f(x) = 0$ *q.t.p. fora de um conjunto fechado* A*, então*

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon \subseteq A + \overline{B(0,\varepsilon)} = A + \{x; \|x\| \leq \varepsilon\}.$$

Consequentemente $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) *Se* f *é contínua e* $\operatorname{supp} f$ *é compacto, então* $f_\varepsilon \to f$ *uniformemente quando* $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração vale ressaltar que f_ε pode ser escrito como $\int f(x-\varepsilon y)\phi(y)\,dy$. De fato, pela mudança de variável $z = x - \varepsilon y$ temos que

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \phi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) f(z)\,dz = \frac{1}{\varepsilon^n}\int f(x-\varepsilon y)\phi(y)\varepsilon^n\,dy = \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)\,dy.$$

(i) Observe que $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Lema 1.1, $f_\varepsilon \in C^\infty$ e

$$\partial^\alpha f_\varepsilon = \partial^\alpha(\phi_\varepsilon) * f = \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}(\partial^\alpha \phi)_\varepsilon * f.$$

De fato, a fim de facilitarmos novamente a notação considere $\alpha = e_1$, note que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}(\phi_\varepsilon)(x) &= \partial_{x_1}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\partial_{x_1}\left(\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\left(\partial_{x_1}\phi\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \text{pela Regra da Cadeia}\\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\left(\partial_{x_1}\phi\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{x}{\varepsilon}\\
&= \left(\partial_{x_1}\phi\right)_\varepsilon(x)\,\frac{x}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

E por indução a demonstração segue para α qualquer.

(ii) Suponha que $f =$ q.t.p. fora de um conjunto fechado A e seja x tal que $f_\varepsilon(x) \neq 0$. Como $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,1)$ então

$$\int_{B(0,1)} f(x-\varepsilon y)\phi(y)\,dy \neq 0.$$

Como, $\phi \geq 0$ e $\int \phi = 1$, então existe $y \in B(0,1)$ tal que $f(x-\varepsilon y) \neq 0$. O que implica que $x - \varepsilon y \in \operatorname{supp} f \subseteq A$ e assim $x \in A + \varepsilon B(0,1)$ e, por fim $x \in A + B(0,\varepsilon)$. Portanto $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subseteq A + \overline{B(0,\varepsilon)}$.

(iii) Note que

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left|\int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy - f(x)\right| \\
&= \left|\int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy - f(x)\int \phi(y)dy\right| \\
&= \left|\int (f(x-\varepsilon y) - f(x))\phi(y)dy\right|.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.1, para todo $\gamma > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\varepsilon y| < \delta$ implica $|f(x-\varepsilon y) - f(x)| < \gamma$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$. Considere então $\varepsilon < \delta$, assim

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left|\int_{B(0,1)} (f(x-\varepsilon y) - f(x))\phi(y)dy\right| \\
&\leq \int_{B(0,1)} |f(x-\varepsilon y) - f(y)|\phi(y)dy \\
&\leq \int_{B(0,1)} \gamma\phi(y)dy \\
&= \gamma\int_{B(0,1)} \phi(y)dy = \gamma.
\end{aligned}$$

Portanto para todo $\gamma > 0$, existe $\varepsilon_0 = \delta$ tal que $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \gamma$ para todo $x \in \operatorname{supp} f$ e para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$.

■

O próximo teorema nos permitirá trabalharmos com a convolução f_ε em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3. *Sejam $f, \phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, no qual $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $x \in R^n$ e $\varepsilon > 0$, defina $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy$. Então*

(i) $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^1}$.

(iii) Se $\operatorname{supp}(\phi)$, $\phi \geq 0$ *e* $\int \phi = 1$ *então* $||f_\varepsilon - f||_{L^p} \longrightarrow 0$ *quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Demonstração. (i) Dividiremos nos três seguintes casos

(a) $p = 1$

Note que

$$|f_\varepsilon(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)||\phi(y)|dy.$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)||\phi(y)dy|\right)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|dx\right)dy \text{ , pelo Teorema de Fubini} \\
&\leq ||f||_{L^1}||\phi||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Portanto $||f_\varepsilon||_{L^1} < \infty$.

(b) $p = \infty$

De maneira análoga

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)||\phi(y)|dy|\right)dx \\
&\leq ||f||_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy \\
&= ||f||_{L^\infty}||\phi||_{L^1} < \infty.
\end{aligned}$$

(c) $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)||\phi(y)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-\varepsilon y)||\phi(y)|)^{\frac{1}{p}}|\phi(y)|^{\frac{1}{q}}dy \\
&\overset{*}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p|\phi(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq ||\phi||_{L^1}^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p|\phi(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

* Pela Desigualdade de Hölder. Logo,

$$|f_\varepsilon(x)|^p \leq ||\phi||_{L^1}^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p|\phi(y)|dy.$$

Então, aplicando novamente o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)|^p dx &\leq ||\phi||_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^{L^p} |\phi(y)| dy \right) dx \\ &\leq ||\phi||_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|^p dx \right) dy \\ &\leq ||\phi||_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| \left(||f||_{L^p}^p \right) dy \\ &\leq ||\phi||_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} ||f||_{L^p}^p \\ &\leq \left(||\phi||_{L^1} ||f||_{L^p} \right)^p ,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)|^{L^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\phi||_{L^1} ||f||_{L^p}.$$

(ii) Demonstrado no item anterior.

(iii) Queremos mostrar que para todo $t > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $||f_\varepsilon - f||_{L^p} < t$. Para isso fixemos $t > 0$ arbitrário e tome $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ então existe g contínua de suporte compacto tal que $||f - g||_{L^p} < \dfrac{t}{3}$, além disso, $||g_\varepsilon - g||_{L^p} < \dfrac{t}{3}$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.
Note agora que

$$||f_\varepsilon - f||_{L^p} \leq ||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{L^p} + ||g_\varepsilon - g||_{L^p} + ||f - g||_{L^p} < ||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{L^p} + \frac{2t}{3}$$

Mostremos que $||f_\varepsilon - f||_{L^p} < \dfrac{t}{3}$

$$\begin{aligned}||f_\varepsilon - f||_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon_y) - g(x-\varepsilon_y)| \phi(y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon_y) - g(x-\varepsilon_y)| \phi(y)^{\frac{1}{p}} \phi(y)^{\frac{1}{q}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon_y) - g(x-\varepsilon_y)|^p \phi(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy \right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder. E portanto

$$||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon_y) - g(x-\varepsilon_y)|^p \phi(y) dy.$$

Integrando e aplicando o Teorema de Fubini obtemos

$$||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon_y) - g(x-\varepsilon_y)|^p dx \right) dy \leq ||f-g||_{L^p}^p.$$

Concluímos que

$$||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{L^p} \leq ||f-g||_{L^p} < \frac{t}{3}.$$

■

Corolário 1.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_ε é definida como no Teorema 1.2 então*

$$\|f_\varepsilon\|_{L^1} = \int |f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^1},$$

e $f_\varepsilon \to f$ em norma L^1 quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Basta aplicarmos o Teorema para $p = 1$ e considerarmos ϕ como no terceiro item. ■

1.1.3 Convergência em $C_c^\infty(\Omega)$

Definição 1.6. *Dizemos que uma sequência $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, isto é $\phi_j \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$ se*

(i) Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

(ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ (multi-índice), temos que $\partial^\alpha \phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\partial^\alpha \phi_j(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K$ e $j \geq j_0$.

Dizemos que $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $C_c^\infty(\Omega)$ se $\varphi_j - \varphi \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 1.12. Seja $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $a_j \longrightarrow 0$. Defina $\varphi(x) = a_j f(x)$, então $\varphi(x) \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Defina $K = \operatorname{supp}(f)$, observe que K é compacto.

Pela definição de suporte de uma função, é fácil ver que $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato, se $y \notin K$, então existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in B(y,r)$. O que implica que $\varphi_j(x) = a_j f(x) = 0$ para todo $x \in B(y,r)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $y \notin \operatorname{supp}(\varphi_j)$.

Note que $\partial^\alpha \varphi_j(x) = a_j \partial^\alpha f(x)$. Consideremos dois possíveis casos:

(i) $\partial^\alpha f(x) = 0$ para todo $x \in K$.
Então $\partial^\alpha \varphi_j(x) = a_j \partial^\alpha f(x) = a_j 0 = 0$ e é claro que $\partial^\alpha \varphi \longrightarrow 0$ uniformemente em K.

(ii) $\partial^\alpha f(x)$ não é identicamente nula em K.
Como $f \in C^\infty$, então $\partial^\alpha f$ é uma função contínua definida em um conjunto compacto, logo existe $M_\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \text{supp}(f)} |\partial^\alpha f(x)| = M_\alpha < \infty$$

Por hipótese, $a_j \longrightarrow 0$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_j| < \dfrac{\varepsilon}{M_\alpha}$, para todo $j \geq j_0$. Assim, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\partial^\alpha \varphi_j(x)| = |a_j|.|\partial^\alpha f(x)| \leq |a_j|.M_\alpha < \varepsilon$, para todo $j \geq j_0$ e para todo $x \in K$. Logo, $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

■

1.2 Distribuições

Definição 1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Um funcional $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear e contínuo é chamado de uma distribuição em Ω, em outras palavras*
(linearidade) $u(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = u(\varphi_1) + \alpha u(\varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
(continuidade) Se $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $u(\varphi) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Adotaremos as seguintes notações:

· $\mathscr{D}'(\Omega) = \{u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineares e contínuas$\}$.

· Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $u(\phi) =< u, \phi >$.

A seguir apresentaremos exemplos de distribuições que serão úteis ao longo do conteúdo apresentado.

Exemplo 1.13 (Delta de Dirac)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $a \in \Omega$. Defina $\delta_a : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ por $< \delta_a, \phi >= \phi(a)$. Mostremos que δ_a é uma distribuição:

(linearidade) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$< \delta_a, \phi_1 + \alpha.\phi_2 >= (\phi_1 + \alpha.\phi_2)(a) = \phi_1 + \alpha.\phi_2(a) =< \delta_a, \phi_1 > +\alpha. < \delta_a, \phi_2 >$

(continuidade) Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, isto é, existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\text{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\partial^\alpha \phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Se $a \in K$, então pela convergência uniforme

$$< \delta_a, \phi_j >= \phi_j(a) \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

Se $a \notin K$, então $< \delta_a, \phi_j >= \phi_j(a) = 0 \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Notação: Em particular quando $a = 0$, denotamos $\delta_0 = \delta$.

Exemplo 1.14. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Defina $T_f : C_c^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ por

$$< T_f, \phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$$

Então T_f define uma distribuição em Ω.

Note que T_f está bem definida pois

$$\begin{aligned} | < T_f, \phi > | &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \right| = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} f(x)\phi(x)dx \right| \\ &\leq \sup_{x\in\text{supp}(\phi)} |\phi(x)|. \int_{\text{supp}(\phi)} |f(x)|dx < \infty, \text{ pois } f \in L^1_{loc}(\Omega) \end{aligned}$$

Vamos provar que T_f é uma distribuição
(linearidade) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} < T_f, \phi_1 + \alpha\phi_2 > &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x).(\phi_1(x) + \alpha\phi_2(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_1(x) + \alpha f(x)\phi_2(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_1(x)dx + \alpha. \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_2(x)dx \\ &= < T_f, \phi_1 > +\alpha < T_f, \phi_2 > . \end{aligned}$$

(continuidade) Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, isto é, existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\text{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\partial^\alpha \phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Seja

$$M = \int_K |f(x)|dx < \infty$$

Se $M = 0$, pela continuidade da função f no compacto K, então $f = 0$-q.t.p. em K e assim $< T_f, \phi >= 0$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo $< T_f, \phi_j >\longrightarrow 0$.

Suponha agora $M \neq 0$. Em particular, para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, temos que ϕ_j converge uniformemente para 0. Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi_j(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, para todo $j \geq j_0$ e para todo $x \in K$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} |< T_f, \phi_j >| &= \left| \int_K f(x)\phi_j(x)dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x)||\phi_j(x)|dx \\ &< \int_K |f(x)| \frac{\varepsilon}{M} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{M} \int_K |f(x)|dx \\ &= \frac{\varepsilon . M}{M} = \varepsilon \text{ para todo } j \geq j_0. \end{aligned}$$

Logo $< T_f, \phi_j > \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Definição 1.8. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Dizemos que $u_1 = u_2$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ se $< u_1, \phi > = < u_2, \phi >$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, dizemos que $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ são iguais no aberto $U \subset \Omega$ se $< u_1, \phi > = < u_2, \phi >$, para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$.*

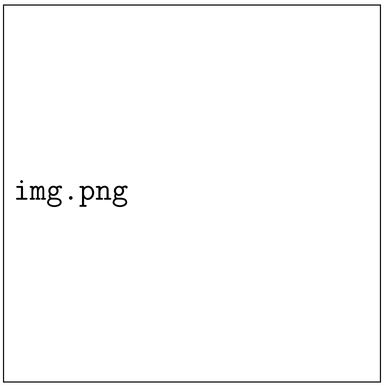
Observação 1.2. Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $U \subset \Omega$ um subconjunto aberto, então $< u_1, \phi >$ e $< u_2, \phi >$ estão bem definidas para $\phi \in C_c^\infty(U)$ pois $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ implica que $< u_1, \phi >$ e $< u_2, \phi >$ estão bem definidas para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Em particular, para $\phi \in C_c^\infty(U)$, $< u_1, \phi >$ e $< u_2, \phi >$ estão bem definidas e assim f também pertence a $\mathscr{D}'(U)$.

Teorema 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $K \subset \Omega$ compacto. Então existe $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança de K.*

Demonstração. Seja $D = d(K, \Omega^c)$, como Ω^c é um conjunto fechado e K um conjunto compacto, então $D < \infty$. Considere $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{D}{4}$ e defina

$$K_{2\varepsilon} = \{y \in \Omega : |x - y| \leq 2\varepsilon \text{ para algum } x \in K\}$$

De maneira didática, a imagem abaixo ilustra a relação de $K_{2\varepsilon}$ com o conjunto Ω para $n = 2$.



Defina $\Phi = \mathcal{X}_{K_{2\varepsilon}}$ e considere $\psi \in \mathbb{C}_c^\infty(B(0,1))$ com $\int \psi(x)dx = 1$. Tome agora $\phi = \Phi * \psi_\varepsilon$. Note que

1. ψ_ε tem suporte em $B(0,\varepsilon)$, pois $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

2. Pela mudança de variável $\dfrac{x}{\varepsilon} = y$, temos que
$$\int \psi_\varepsilon(x)dx = \int \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int \psi(y)dy = 1$$

Afirmação 1: $\phi \in C_c^\infty(K_{3\varepsilon})$. De fato, como $\phi = \Phi * \psi_\varepsilon$, então
$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\phi) &\subset \mathrm{supp}(\Phi) + \mathrm{supp}(\psi_\varepsilon) \\ &\subset K_{2\varepsilon} + B(0,\varepsilon) \\ &\subset K_{3\varepsilon}. \end{aligned}$$

Pois, seja $x \in K_{2\varepsilon} + B(0,\varepsilon)$, então podemos escrever como $x = y + z$, no qual $y \in K_{2\varepsilon}$ e $z \in B(0,\varepsilon)$. Logo, $|y - w| \leq 2\varepsilon$ para algum $w \in K$ e $|z| < \varepsilon$. Temos então que
$$|x - w| = |y + z - w| = |y - w + z| \leq |y - w| + |z| < 3\varepsilon.$$

Observe também que
$$\begin{aligned} (1-\phi)(x) &= (1 - \Phi * \psi_\varepsilon)(x) = \int \psi_\varepsilon(y)dy - \int \Phi(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy \\ &= \int [1 - v(x-y)]\,\psi_\varepsilon(y)dy \\ &= (1-v) * \psi_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Afirmação 2: $(1-\phi)$ se anula em K_ε. De fato,
$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(1-\phi) &= \mathrm{supp}((1-v) * \psi_\varepsilon) \\ &\subseteq \mathrm{supp}(1-v) + supp(\psi_\varepsilon) \\ &\subseteq (K_{2\varepsilon})^c + B(0,\varepsilon) \subset (K_\varepsilon)^c, \end{aligned}$$

no qual a última inclusão será justificada a seguir.

Seja $x \in (K_{2\varepsilon})^c + B(0,\varepsilon)$, então podemos reescrever como $x = y + z$, no qual $y \in (K_{2\varepsilon})^c$ e $z \in B(0,\varepsilon)$. Logo, $|y - w| > 2\varepsilon$ para todo $w \in K$ e $|z| < \varepsilon$. Temos então que

$$|x-w| = |y+z-w| = |y-w-(-z)| \geq |y-w|-|z| > 2\varepsilon-\varepsilon = \varepsilon \text{ , para todo } w \in K.$$

Logo, $x \in (K_\varepsilon)^c$ e, portanto, $\phi \equiv 1$ em K_ε. ∎

Exemplo 1.15. (Exemplo de função $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}\varphi = B\,[0,1]$, $\int \varphi = 1$ e $\varphi \geq 0$.) Seja f como no Exemplo 1.5. Lembre-se que f é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Seja $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha(x) = 1 - ||x||^2$, logo $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Tome $\phi = f \circ \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Então $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Note que ϕ é dada por

$$\phi(x) = f(1 - ||x||^2) = \begin{cases} e^{-(1-||x||^2)^{-1}}, & ||x|| < 1; \\ 0, ||x|| > 1. \end{cases}$$

Logo, $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{B(0,1)}$. Portanto $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considere agora $a = \int \phi(x)dx$, o que implica que $a > 0$, e defina $\varphi = \dfrac{1}{a}\phi(x)$. Logo, φ satisfaz as condições desejadas.

Proposição 1.2. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $f = g$ q.t.p. em Ω. Então $T_f = T_g$.*

Demonstração. De fato, dado $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $f(x)\phi(x) = g(x)\phi(x)$ q.t.p. em Ω. Utilizamos aqui um resultado de Teoria da Medida e Integração, que pode ser encontrado na referência [3], a saber: Se $f \in L^+$ então $\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.t.p. Logo,

$$\int f(x)\phi(x)dx = \int g(x)\phi(x)dx$$

E assim $T_f = T_g$. ∎

Lema 1.2. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_ε definida como no Teorema 1.2. No qual $\phi \geq 0$ e $\int \phi(x)dx = 1$. Então $||f_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^1}$ e $||f_\varepsilon - f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
||f_\varepsilon||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\operatorname{supp}\phi} f_\varepsilon(x-\varepsilon y)\phi(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\operatorname{supp}(\phi)} |f_\varepsilon(x-\varepsilon y)|\phi(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y)|dx \right] dy \qquad \text{(Teorema de Fubinni)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y).||f||_{L^1} dy \quad \text{(a norma } L^1 \text{ é invariante por translação)} \\
&= ||f||_{L^1}. \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy = ||f||_{L^1}.1 = ||f||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Mostremos agora a segunda convergência. Como melhor detalhado em [4], $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, dado $\delta > 0$, existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $||f-g|_{L^1} < \frac{\delta}{3}$. Logo

$$\begin{aligned}
||f - f_\varepsilon||_{L^1} &= ||f - g + g - g_\varepsilon + g_\varepsilon - f_\varepsilon||_{L^1} \\
&\leq ||f-g||_{L^1} + ||g - g_\varepsilon||_{L^1} + ||(g-f)_\varepsilon||_{L^1} \\
&\leq ||f-g||_{L^1} + ||g - g_\varepsilon||_{L^1} + ||g-f||_{L^1} \\
&< \frac{2\delta}{3} + ||g - g_\varepsilon||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $g_\varepsilon \longrightarrow g$ uniformemente quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Além disso, considerando $\varepsilon < 1$, $\operatorname{supp}(g_\varepsilon) \subseteq \operatorname{supp}(g) + \{|x| \leq \varepsilon\} \subseteq \operatorname{supp}(g) + \{|x| \leq 1\} = K$. Assim, $\operatorname{supp}(g_\varepsilon)$ está contido em um conjunto compacto que independe de ε e portanto

$$\begin{aligned}
||g - g_\varepsilon||_{L^1} &= \int_K |g(x) - g_\varepsilon(x)|dx \\
&\leq \sup_{x \in K} |g(x) - g_\varepsilon(x)|.|K| \leq \frac{\delta}{|3.K|}.|K| = \frac{\delta}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, $||f_\varepsilon - f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$. ∎

Proposição 1.3. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $< T_f, \phi > = < T_g, \phi >$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $f = g$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração. Antes de demonstrarmos, observe que nosso objetivo é demonstrar a recíproca da Proposição 1.2.

Seja $K_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq n^{-1}$ e $||x|| \leq n\}$. Mostremos que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{1.1}$$

Note que como $K_n \subset \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \subset \Omega$. Por outro lado, seja $x \in \Omega$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$.

Sejam n_1 o primeiro número natural tal que $\varepsilon > n_1^{-1}$, n_2 o primeiro natural tal que $||x|| \leq n_2$ e defina $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Como $B(x, n_0^{-1}) \subset \Omega$, então $d(x, \partial\Omega) > n_0^{-1}$. Além disso $||x|| \leq n_0$, assim temos que $x \in K_{n_0}$ e portanto $\Omega \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

Afirmação 1: É suficiente mostrar que $f = g$ q.t.p. em K_n.

De fato, sejam

$$A_n = \{x \in K_n : f(x) \neq g(x)\} \text{ e } A = \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}.$$

Por (1.1), $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Assim, se $m(A_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$$

Mostremos agora que K_n é compacto. Como $K_n \subset \mathbb{R}^n$, basta demonstrarmos que K_n é fechado e limitado. Para isso, observe inicialmente que $K_n \subset K_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fixe $x_0 \in K_1$, note então que $x_0 \in K_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $x \in K_n$, temos que

$$\begin{aligned} ||x - x_0|| &= ||x|| + ||x_0|| \\ &\leq n + 1 \end{aligned}$$

Assim, $K_n \subset B(x_0, n+1)$ e portanto é limitado.

Note agora que $d(K_n, \partial\Omega) \geq n^{-1}$. No pior caso, suponha a igualdade. Seja agora $x \notin K_n$, então $d(x, \partial\Omega) < n^{-1}$, ou ainda, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, \partial\Omega) = n^{-1} - \varepsilon$. Além disso, como $d(x, K_n) \geq \varepsilon$ então $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap K_n = \varnothing$. Concluímos que K_n^c é um conjunto aberto e por fim nosso conjunto K_n é, de fato, compacto.

Vamos retornar a demonstração, para isso fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $V(K_n)$, no qual $V(K_n)$ corresponde a uma vizinhança de K_n. Logo, $K_n \subset \operatorname{supp}(\psi)$.

Considere $h = f - g \in L^1_{loc}(\Omega)$, então claramente $(h\psi) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Defina $(h\psi)_\varepsilon(x) = \int (h\psi)(x - \varepsilon y)\varphi(y)dy$ no qual $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ e $\int \varphi(x)dx = 1$. Além disso, $\varphi_\varepsilon(y) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\dfrac{y}{\varepsilon}\right)$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
(\psi h)_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (h\psi)(z)\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} [f(z) - g(z)]\psi(z)\varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\psi(z)\varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz - \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\psi(z)\varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz \\
&= \varepsilon^{-n}\left[< T_f, \psi(\cdot)\varphi\left(\frac{x-\cdot}{\varepsilon}\right) > - < T_g, \psi(\cdot)\varphi\left(\frac{x-\cdot}{\varepsilon}\right) >\right] \\
&= 0, \text{ por hipótese,}
\end{aligned}$$

pois $\psi(z)\varphi\left(\dfrac{x-z}{\varepsilon}\right)$ é uma função teste. Pelo Lema 1.2, temos que $(h\psi)_\varepsilon \longrightarrow h\psi$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Observe que temos a convergência ocorrendo apenas onde $h\psi$ está definida, isto é, em Ω, porém basta estendermos a função para em $\mathbb{R}^n - \Omega$, no qual a mesma será a função nula. Note que sua continuidade se manterá pois como Ω é um conjunto aberto, então $h\psi$ é nula na fronteira e assim temos a convergência em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Por fim, como resultado visto em [3], se uma sequência de funções converge em $L^1(R^n)$, então existe uma subsequência que converge q.t.p. Digamos $(h\psi)_{\varepsilon'} \longrightarrow h\psi$ q.t.p.

Por outro lado, como $(h\psi)_\varepsilon = 0$, para todo ε, em particular, $(h\psi)_{\varepsilon'} = 0$.

Logo, $h\psi(x) = 0$ q.t.p. em K_n. Como $\psi \equiv 1$ em K_n, então $h = 0$-q.t.p. em K_n.

■

Após demonstrarmos as Proposições 1.2 e 1.3, podemos utilizar o funcional T_f para identificarmos qualquer função $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como uma distribuição.

Exemplo 1.16. Seja μ uma medida definida na σ - álgebra dos subconjuntos borelianos de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotado tal espaço de medida por $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Suponha também que μ é localmente finita (isto é, $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subset \Omega$ compacto).

Defina $< \mu, \phi > \doteq \int_\Omega \phi d\mu$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $< \mu, \phi >$ define uma distribuição. De fato,considere $K \subset \Omega$ compacto tal que $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
(Linearidade) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} < \mu, \phi_1 + \alpha\phi_2 > &= \int_\Omega \phi_1 + \alpha\phi_2 d\mu \\ &= \int_\Omega \phi_1 d\mu + \alpha \int_\Omega \phi_2 d\mu \\ &= < \mu, \phi_1 > + \alpha < \mu, \phi_2 > . \end{aligned}$$

(Continuidade) Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} | < \mu, \phi_j > | &= | \int_\Omega \phi_j d\mu | \leq \sup_{x\in \mathrm{supp}(K)} |\phi_j(x)| \mu(\mathrm{supp}\, \phi_j) \\ &\leq \sup_{x\in \mathrm{supp}(K)} |\phi_j(x)| \mu(K) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(K)} \mu(K) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Exemplo 1.17 (Valor Principal)**.** Denotaremos por valor principal de $\frac{1}{x}$ o funcional

$$< \text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi > \doteq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \text{ , para todo } \phi \in C_c^\infty.$$

Mostremos que p.v. $\dfrac{1}{x}$ define uma distribuição em $\mathbb{R}$, antes disso observe que p.v. $\dfrac{1}{x}$ está bem definida

Afirmação:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}-[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$$

Vamos assumir por um momento que tal afirmação esteja provada. Como $\phi \in C_c^\infty$ então podemos exibir $M > 0$ tal que $\mathrm{supp}\, \phi \subset [-M, M]$. Então

$$\begin{aligned} | < pv\frac{1}{x}, \phi > | &= \left| \int_0^\infty \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \right| \\ &\leq \int_{-M}^{M} \left[\sup_{\xi\in[-M,M]} |\phi'(\xi)| \right] \frac{2x}{x}\, dx \text{ pelo Teorema do valor Médio} \\ &\leq \left[\sup_{\xi\in[-M,M]} |\phi'(\xi)| \right] 2M < \infty \text{ , pois } \phi' \text{ é uma função contínua.} \end{aligned}$$

Portanto está bem definida. Mostremos agora que é de fato uma distribuição

(Linearidade) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
< p.v.\frac{1}{x}, \phi_1 + \alpha\phi_2 > &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi_1(x) + \alpha\phi_2(x)}{x} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \left[\frac{\phi_1(x)}{x} dx + \alpha \frac{\phi_2(x)}{x} dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi_1(x)}{x} dx + \alpha \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi_2(x)}{x} dx \\
&= < p.v.\frac{1}{x}, \phi_1 > + \alpha < p.v.\frac{1}{x}, \alpha\phi_2 >
\end{aligned}$$

(Continuidade) Seja $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$, de maneira análoga ao anterior, podemos exibir $M > 0$ tal que $\operatorname{supp} \phi_j \subset [-M, M]$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
| < pv\frac{1}{x}, \phi_j > | &= \left| \int_0^\infty \frac{\phi_j(x) - \phi_j(-x)}{x} dx \right| \\
&\leq \int_{-M}^{M} \left[\sup_{\xi \in [-M,M]} |\phi_j'(\xi)| \right] \frac{2x}{x} dx \\
&\leq \sup_{\xi \in [-M,M]} |\phi_j'(\xi)| \, 2M \to 0,
\end{aligned}$$

pois como $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$, então $|\phi_j'(\xi)| \to 0$ uniformemente e então

$$\sup_{\xi \in [-M,M]} |\phi_j'(\xi)| \to 0$$

Demonstremos a Afirmação inicial:

$$\int_{\mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

Considere a seguinte mudança de variável $x = -t$, então

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx &= -\int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\phi(-t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \\
&= -\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(-t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \\
&= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.
\end{aligned}$$

Mostraremos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\, dx.$$

Para isso, seja $f_n(x) = \dfrac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \mathcal{X}_{\{z \in \mathbb{R} : |z| > n^{-1}\}}(x)$. Temos que

$$f_n(x) \longrightarrow \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \mathcal{X}_{\{z \in \mathbb{R} : |z| > 0\}}(x).$$

Note que $|f_n(x)| = \dfrac{|\phi(x) - \phi(-x)|}{x}$, que como visto anteriormente é integrável. Logo, afirmação segue pelo Teorema da Convergência Dominada.

Observação 1.3. A distribuição delta de Dirac não é uma função (no sentido do Exemplo 1.14), isto é, não existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $< T_f, \phi >=< \delta, \phi >$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Suponha que exista $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que

$$\phi(0) =< \delta, \phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty.$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, isto é $\mathrm{supp}(\phi) \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$. Então

$$\int f(x)\phi(x)dx = \phi(0) = 0, \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Logo, $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, o que implica que $f \equiv 0$ q.t.p. em todo $\mathbb{R}^n$. Portanto, δ é a distribuição nula, o que é uma contradição.

∎

1.3 Operações com Distribuições

Definição 1.9. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega), \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então definimos as seguintes operações:*

- $< u_1 + u_2, \phi > \doteq < u_1, \phi > + < u_2, \phi >$.
- $< \lambda . u_1, \phi > \doteq \lambda < u_1, \phi >$.

Definição 1.10 (Transposto formal)**.** *Sejam $L, L^t : C_c^\infty(\Omega) \mapsto C_c^\infty(\Omega)$ lineares e contínuos. Isto é, se $\{\phi_j\} \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $L(\phi_j) \longrightarrow 0$ e $L^t(\phi_j) \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Suponha que*

$$\int_{\Omega} (L\phi)(x)\psi(x)dx = \int_{\Omega} \phi(x)(L^t\psi)(x)dx \text{ , para toda } \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Então dizemos que L é o transposto formal de L^t e que L^t é o transposto formal de L.

Notação: Como $L\phi, L^t\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, então podemos escrever 1.2 como $< L\phi, \psi >=< \phi, L^{'}\psi >$.

A seguir veremos que a existência de um transposto formal implica na extensão do operador.

Proposição 1.4. *Sejam $L : C_c^\infty(\Omega) \mapsto C_c^\infty(\Omega)$ e L^t seu respectivo transposto formal, então existe um operador linear $\tilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \mapsto \mathscr{D}'(\Omega)$ de tal forma que $\tilde{L}|_{C_c^\infty(\Omega)} = L$.*

Demonstração. De fato, defina $\tilde{L}$ um operador de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dado por

$$\begin{array}{rll} \tilde{L}: & \mathscr{D}'(\Omega) & \mapsto \mathscr{D}'(\Omega) \\ & u & \longrightarrow \tilde{L}(u) : C_c^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{C} \\ & & \qquad\qquad\qquad \psi \longrightarrow < u, L^t\psi > \end{array}$$

para $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Afirmação: $\tilde{L}$ é um operador linear e contínuo.

(Linearidade) Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega), \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\tilde{L}(u_1+\lambda u_2) = \tilde{L}(u_1) + \lambda\tilde{L}(u_2)$. De fato

$$\begin{aligned} < \tilde{L}(u_1 + \lambda u_2), \phi > &= < u_1 + \lambda u_2, L^t\phi > \\ &= < u_1, L^t\phi > +\lambda < u_2, L^t\phi > \\ &= < \tilde{L}(u_1) + \lambda\tilde{L}(u_2), \phi > \end{aligned}$$

(Continuidade) Seja $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Então $L^t(\psi_j) \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, pois L^t é contínuo. Logo, $< \tilde{L}(u), \psi_j >=< u, L^t(\psi_j) >\longrightarrow 0$, pois u é uma distribuição.

Por fim, mostremos que $\tilde{L}$ é de fato uma extensão de L. Seja $u \in C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} < \tilde{L}(u), \psi > &= < u, L^t(\psi) >= \int_\Omega u(x)(L^t\psi)(x)dx \\ &= \int_\Omega (Lu)(x)\psi(x)dx =< L(u), \psi > \text{, para toda } \psi \in C_c^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{L}(u) = L(u)$. ∎

A seguir, consideraremos operações que estão bem definidas para função e utilizaremos a Proposição 1.4 para definir operações com distribuições, ou seja, ao mostrarmos que tais operações possuem transpostos formais nossa extensão estará garantida e assim podemos aplicá-los em distribuições.

Exemplo 1.18. Sejam $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e $u : C_c^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$, então o produto entre uma função $C_c^\infty(\Omega)$ e uma distribuição é uma distribuição definida por

$$< fu, \phi > \doteq < u, f\phi > \text{, para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Seja $L : C_c^\infty(\Omega) \mapsto C_c^\infty(\Omega)$ o operador definido como $L(\phi) = f\phi$. Vamos mostrar que de fato a distribuição está bem definida.

Inicialmente, note que o produto de uma função suave por uma função teste resulta em uma função teste, pois $f\phi$ se anula fora de um suporte compacto.

Afirmação 1: L é linear e contínuo.

(Linearidade) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} L(\phi_1 + \alpha\phi_2) &= (\phi_1 + \alpha\phi_2)f \\ &= \phi_1 f + \alpha\phi_2 f = L(\phi_1) + \alpha L(\phi_2). \end{aligned}$$

(Continuidade) Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Mostremos que $L(\phi_j) \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Primeiramente, observe que existe $K \subset \Omega$ compacto de tal forma que $\text{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $\text{supp}(f\phi_j) \subset \text{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Observe agora que para cada α fixo, o somatório $\sum_{|\gamma|\leq|\alpha|}$ é finito, defina n a quantidade de termos deste somatório. Além disso, como $f \in C^\infty$ e K é um conjunto compacto, então

$$\sup_{x\in K} |\partial^\gamma f(x)| < \infty \text{ para todo } \gamma.$$

Assim, defina

$$M = \max_{|\gamma|\leq|\alpha|} \left\{ \sup_{x\in K} |\partial^\gamma f(x)| \right\}.$$

Por fim, dado $\varepsilon > 0$, para cada α multi-índice sabemos que $|\partial^\alpha \phi_j(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n.M}$

para todo x e para todo $j \geq j_0$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\phi_j f)(x)| &= \left| \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)\partial^\gamma f(x) \right| \\
&\leq \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\gamma} \sup_{x \in K} |\partial^\gamma f(x)|.|\partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)| \\
&\leq M. \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} |\partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Afirmação 2: O transposto formal de L é ele mesmo, isto é, $L^t = L$. De fato, sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\int_\Omega (L(\phi))(x)\psi(x)dx = \int_\Omega \phi(x)f(x)\psi(x)dx = \int_\Omega \phi(x)(L(\psi))(x)dx.$$

Assim, podemos estender o operador L em $\mathscr{D}'(\Omega)$ por

$$\begin{aligned}
\tilde{L}: \ \mathscr{D}'(\Omega) &\mapsto \mathscr{D}'(\Omega) \\
u &\longrightarrow \tilde{L}(u) : C_c^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{C} \\
& \qquad\qquad \psi \longrightarrow < u, L^t\psi > = < u, f\psi >
\end{aligned}$$

E portanto $\tilde{L}u = fu$, isto é

$$< fu, \phi > = < u, f\phi > \text{ , para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 1.11 (Derivadas Parciais)**.** *Seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, então definimos sua j-ésima derivada parcial por*

$$< \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi > \doteq - < u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} > .$$

Seja $L : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o operador que representa a derivação na j-ésima coordenada de uma função, ou seja, $L(\phi) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}$.

Afirmação 1: L é linear e contínuo.
(Linearidade) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
L(\phi_1 + \alpha\phi_2) &= \frac{\partial(\phi_1 + \alpha\phi_2)}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} + \alpha.\frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} \\
&= L(\phi_1) + \alpha.L(\phi_2).
\end{aligned}$$

(Continuidade) Seja $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Mostremos que $L(\phi_n) \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.
Primeiramente, observe que existe $K = [-M, M]^n \subset \mathbb{R}^n$ compacto de tal forma que $\operatorname{supp}(\phi_n) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pela definição de convergência em $C_c^\infty(\Omega)$, $\partial^\alpha \phi_n(x) \longrightarrow 0$, para todo α multi-índice, em particular para $\alpha = e_j$ concluímos que

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x_j}(x) \longrightarrow 0 \text{ uniformemente.}$$

Encontremos agora o transposto formal de L. Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (L(\phi))(x)\psi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi(x)dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi(x)dx_j \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \text{ (Teorema de Fubini).}
\end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi(x)dx_j = \phi(x)\psi(x)\Big|_{x_j=-M}^{x_j=M} - \int_{-M}^{M} \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)\, dx,$$

pois como $\operatorname{supp}(\phi) \subset [-M, M]^n$ então $\phi(x) = 0$, sempre que $x_j = M$ ou $x_j = -M$ para algum $1 \leq j \leq n$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (L(\phi))(x)\psi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx.$$

Portanto $L^t = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é o transposto formal de L.

Concluímos que $< \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \phi >= - < u, \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} >$ está bem definido para distribuições.

De maneira indutiva, podemos concluir que as derivadas parciais mistas de ordem superior de uma distribuição é dado por

$$< \partial^\alpha u, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \phi > \quad , \forall\, \phi \in C_c^\infty.$$

Exemplo 1.19. [Derivada da Função de Heaviside] Seja $H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Como $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, então H é uma distribuição, através do funcional T_H. Mostremos que $T'_H = \delta$.

Seja $\phi \in C_c^\infty$ e suponha $\operatorname{supp}\phi \subset [-M, M]$. Pela definição de derivada de uma distribuição,

$$
\begin{aligned}
< T'_H, \phi > &= - < T_H, \phi' >= - \int H(x)\phi'(x)dx \\
&= - \int_0^\infty \phi'(x)dx = - \int_0^M \phi'(x)dx \\
&= -(\phi(M) - \phi(0)) = -\phi(M) + \phi(0) \\
&= \phi(0) =< \delta, \phi > .
\end{aligned}
$$

Proposição 1.5 (Regra do Produto)**.** *Sejam $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, então*

$$\frac{\partial(fu)}{\partial x_j} = f\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}u \text{ em distribuição.}$$

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
< \frac{\partial(fu)}{\partial x_j}, \phi > &= - < fu, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} > \\
&= - < u, f\frac{\partial \phi}{\partial x_j} >= - < u, \frac{\partial(f\phi)}{\partial x_j} - \phi\frac{\partial f}{\partial x_j} > \\
&= - < u, \frac{\partial(f\phi)}{\partial x_j} > + < u, \phi\frac{\partial f}{\partial x_j} > \\
&= < \frac{\partial u}{\partial x_j}, f\phi > + < u\frac{\partial f}{\partial x_j}, \phi > \\
&= < f\frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi > + < u\frac{\partial f}{\partial x_j}, \phi > \\
&= < u\frac{\partial f}{\partial x_j} + f\frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi > .
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 1.20 (Derivada de $\log|x|$)**.** Como visto no Exemplo 1.9, a função $\log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R} - \{0\})$, podemos definir $< \log|x|, \phi >= \int_{\mathbb{R}} \log(|x|)\phi(x)dx$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então $< \frac{d}{dx}\log|x|, \phi >=< p.v.\frac{1}{x}, \phi >$.

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\operatorname{supp}\phi \subset [-N,N]$, então

$$\begin{aligned}
< \frac{d}{dx}\log|x|,\phi > &= - < \log|x|,\phi' >= -\int \log|x|\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-N}^{N} \log|x|\phi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-N}^{-\varepsilon}\log|x|\phi' dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\log|x|\phi' dx + \int_{\varepsilon}^{N}\log|x|\phi' dx\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-N}^{-\varepsilon}\log|x|\phi' dx + \int_{\varepsilon}^{N}\log|x|\phi' dx\right] - \left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\log|x|\phi' dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\log|x|\phi(x)\,\Big|_{-N}^{-\varepsilon} + \int_{-N}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\phi(x)dx\right] \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\log|x|\phi(x)|_{\varepsilon}^{N} + \int_{\varepsilon}^{N}\frac{\phi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx + \log(\varepsilon)\phi(\varepsilon) - \log(\varepsilon)\phi(-\varepsilon)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log(\varepsilon)\left[\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)\right] + \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx\right].
\end{aligned}$$

Note que, pela desigualdade do valor médio

$$|\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)| \leq \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}|\phi'(t)|2\varepsilon.$$

O que implica que

$$|\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)|\log(\varepsilon) \leq \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}|\phi'(t)|2\varepsilon\log(\varepsilon).$$

Assim,

$$0 \leq |\left[\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)\right]\log(\varepsilon)| \leq 2\sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}|\phi'(t)|\varepsilon\log(\varepsilon).$$

Mostremos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}|\phi'(t)|\varepsilon\log(\varepsilon) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
2\sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}|\phi'(t)|\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\log(\varepsilon) &= c\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\log(\varepsilon) = c\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log(\varepsilon)}{\varepsilon^{-1}} \\
&= c\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}} \qquad \text{(por L'Hopital)} \\
&= c\lim_{\varepsilon\to 0^+} -\varepsilon = 0.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Confronto $[\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)]\log(\varepsilon)\longrightarrow 0$. Logo,

$$< \frac{d}{dx}\log|x|, \phi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx \doteq < p.v.\frac{1}{x}, \phi > .$$

Exemplo 1.21 (Operador Diferencial)**.** Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $a_\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$. O operador diferencial de funções está bem definido. Agora, para distribuições, definimos um operador diferencial de ordem m por

$$\begin{aligned} P(x,D): \ \mathscr{D}'(\Omega) &\to \mathscr{D}'(\Omega) \\ u &\to \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u. \end{aligned}$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, observe que

$$\begin{aligned} < P(x,D)u, \phi > &= < \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u, \phi > \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} < a_\alpha \partial^\alpha u, \phi > \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} < \partial^\alpha u, a_\alpha \phi > \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha a_\alpha \phi > . \end{aligned}$$

A seguir apresentaremos a definição de convergência em $\mathscr{D}'(\Omega)$, seguido de exemplos que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.12. *Dizemos que uma sequência $\{u_j\}_j \in \mathscr{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se*

$$< u_j, \phi > \longrightarrow < u, \phi > , \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Neste caso, escrevemos $u_j \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Definição 1.13. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $h \in \mathbb{R}$. Definimos a translação u_h de u como*

$$< u_h, \phi > = < u, \phi_h > , \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

no qual $\phi_h \doteq \phi(h+x)$.

Exemplo 1.22. Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $h \in \mathbb{R}$. Defina $v_h = \dfrac{u_h - u}{h}$, então $\lim\limits_{h \to 0} v_h = -u'$. De fato, para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ temos que

$$< v_h, \phi >= \frac{< u_h, \phi > - < u, \phi >}{h} = \frac{< u, \phi_h > - < u, \phi >}{h} =< u, \frac{\phi_h - \phi}{h} > .$$

Defina $\psi_h = \dfrac{\phi_h - \phi}{h}$, note que $\psi_h \longrightarrow \phi'$ quando $h \longrightarrow 0$, logo

$$\lim_{h \to 0} < v_h, \phi >=< u, \phi' >= - < u', \phi > .$$

Como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ era arbitrária, então $\lim\limits_{h \to 0} v_h = -u'$.

Este exemplo nos mostra que de certa forma ainda podemos interpretar a derivada de uma distribuição como o limite do quociente de Newton, podendo também ser generalizada para $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.23. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ então u é o limite de distribuições de suporte compacto. De fato, seja

$$K_n = \{x \in \Omega, |x| \leq n, d(x, \partial\Omega) \leq n^{-1}\},$$

pelo Teorema 1.4 existe $\phi_n \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n = 1$ em uma vizinhança de K_n.

Assim, dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ defina $u_n = \phi_n u$. Note que $u_n \in \mathscr{E}'(\Omega)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ pois $\text{supp}(u_n) \subseteq \text{supp}(\phi_n) \subseteq K_n$ que é compacto. Além disso, como $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ então $u_n \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.

1.4 Mudança de Variáveis

A seguir utilizaremos conceitos abordados em *Análise em* $\mathbb{R}^n$ e *Cálculo Avançado*, como a definição de um difeomorfismo e a utilização da matriz Jacobiana no Teorema de mudança de variável em $\mathbb{R}^n$. Uns dos principais resultados sobre integração de funções em $\mathbb{R}^n$ será apresentado a seguir e posteriormente será utilizado para a construção de um resultado análogo para distribuições.

Teorema 1.5. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ uma função contínua com suporte compacto e $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos tais que* $\text{supp}(f) \subset V$ *e $\Phi : U \mapsto V$ seja um difeomorfismo de classe C^1. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} |J\Phi(x)| f(\Phi(x))dx,$$

no qual $|J\Phi(x)|$ é o determinante Jacobiano de Φ.

Seja agora $\Phi : \Omega \mapsto \Omega$ um difeomorfismo de classe $C^\infty(\Omega)$, então Φ é uma bijeção e Φ, Φ^{-1} são de classe $C^\infty(\Omega)$. Defina o operador

$$\begin{array}{rll} L: & C_c^\infty(\Omega) & \mapsto C_c^\infty(\Omega) \\ & \phi & \rightarrow \phi \circ \Phi \end{array}$$

Mostremos que L está bem definido, é linear e contínuo.

(i) L está bem definido pois $\phi \circ \Phi \in C_c^\infty(\Omega)$. De fato, basta verificarmos que $\phi \circ \Phi$ tem suporte compacto.

Afirmação: $\operatorname{supp}(\phi \circ \Phi) = \Phi^{-1}(\operatorname{supp}(\phi))$.

Seja $x \in \operatorname{supp}(\phi \circ \Phi)$, então existe $\{x_j\}_j$ tal que $x_j \to x$ e $\phi \circ \Phi(x_j) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, o que implica que $\phi(\Phi(x_j)) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim temos que $\Phi(x_j) \in \operatorname{supp}(\phi)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $(x_j) \longrightarrow x$ então $\Phi(x_j) \longrightarrow \Phi(x)$, logo $\Phi(x) \in \operatorname{supp}(\phi)$ e portanto $x \in \Phi^{-1}(\operatorname{supp}\phi)$, finalizando a demonstração da afirmação.

Como Φ é um difeomorfismo , então segue diretamente da afirmação anterior que $\phi \circ \Phi$ é compacto.

(ii) L é linear. De fato, sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} L(\lambda\phi_1 + \phi_2) &= (\lambda\phi_1 + \phi_2) \circ \Phi \\ &= \lambda(\phi_1 \circ \Phi) + (\phi_2 \circ \Phi) \\ &= \lambda L(\phi_1) + L(\phi_2). \end{aligned}$$

(iii) L é contínuo. De fato, seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Mostremos que $L(\phi_j) \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, no qual $L(\phi_j) = \phi_j \circ \Phi$.

(a) Seja K tal que $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\operatorname{supp}(\phi_j \circ \Phi) = \Phi^{-1}(\operatorname{supp}\phi_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ então $\operatorname{supp}(\phi_j \circ \Phi) \subset \Phi^{-1}(K)$, que é um conjunto compacto .

(b) Primeiramente, observe que se $x \in \Phi^{-1}(K)$, então $\phi(x) \in K$. Logo,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}(\Phi(x)) \longrightarrow 0, \text{ uniformemente,}$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}(\Phi(x))\right| < \frac{\varepsilon}{nc}, \text{ para todo } j \geq j_0,$$

no qual

$$c \doteq \sup_{\substack{x\in K\\ 1\leq i\leq n}} \left|\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(x)\right| \neq 0.$$

Aplicando a Regra da Cadeia para $|\alpha| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(\phi_j\circ\Phi)}{\partial x_k}(x)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y_i}(\Phi(x))\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(x)\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\phi_j}{\partial y_i}(\Phi(x))\right|\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(x)\right|\\
&\leq \sup_{\substack{x\in K\\ 1\leq i\leq n}}\left|\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}(x)\right|\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y_i}(\Phi(x))\right|\\
&\leq c\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{nc} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\partial^\alpha\left[\phi_j\circ\Phi\right](x) \longrightarrow 0$ uniformemente para $x\in\Phi^{-1}(K)$, para $|\alpha| = 1$. O resultado geral decorre por indução.

Encontremos agora o transposto formal de L. Para isso usaremos o Teorema 1.5 com $\Phi(y) = x$ (note que $y = \Phi^{-1}(x)$). Temos que

$$\int_\Omega L(\phi)(y)\psi(y)dy = \int_\Omega \phi(\Phi(y))\psi(y)dy = \int_\Omega \phi(x)\psi(\Phi^{-1}(x)).|J\Phi^{-1}(x)|dx.$$

Assim, defina

$$\begin{aligned}
L':\ \ C_c^\infty(\Omega) &\to C_c^\infty(\Omega)\\
\psi &\to |J\Phi^{-1}(x)|(\psi\circ\Phi^{-1})(x).
\end{aligned}$$

Mostremos que L' é linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$.

(i) Para facilitar a notação considere $J(x) = |J\Phi^{-1}(x)|$, note que J é uma função C^∞. Assim, sejam $\phi_1,\phi_2\in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda\in\mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
L'(\lambda\phi_1+\phi_2) &= J(\lambda\phi_1+\phi_2)\circ\Phi^{-1}\\
&= J\left[\lambda(\phi_1\circ\Phi^{-1}) + (\phi_2\circ\Phi^{-1})\right]\\
&= \lambda J(\phi_1\circ\Phi^{-1}) + J(\phi_2\circ\Phi^{-1})\\
&= \lambda L(\phi_1) + L(\phi_2).
\end{aligned}$$

(ii) Observe que a demonstração da continuidade é análoga a demonstração da continuidade de L. De fato, basta considerarmos $f \doteq \Phi^{-1}$, assim como f é um difeomorfismo podemos definir

$$\begin{aligned} L_2: \ & C_c^\infty(\Omega) && \mapsto C_c^\infty(\Omega) \\ & \phi && \to \phi \circ f. \end{aligned}$$

Então L_2 é contínua. Defina $L' = JL_2$, como $J \in C^\infty$ e o produto de C^∞ com C_c^∞ é uma função também C_c^∞ então L' está bem definido e também é contínua.

Por fim, considerando as hipóteses de difeomorfismo, concluímos que

$$< u \circ \Phi, \psi > = < u, |J\Phi^{-1}(x)|\psi(\Phi^{-1}(x)) > .$$

Exemplo 1.24 (Translação)**.** Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e defina a translação no ponto a como

$$\begin{aligned} \Phi: \ & \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R}^n \\ & x && \to x - a \end{aligned}$$

Temos que Φ é de classe C^∞ e $\Phi^{-1}(x) = x + a$ também é de classe C^∞. Logo, Φ é um difeomorfismo de classe C^∞. Além disso,

$$|J\Phi^{-1}(x)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1^{-1}}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \Phi_1^{-1}}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1^{-1}}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial \Phi_2^{-1}}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \Phi_2^{-1}}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2^{-1}}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_n^{-1}}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \Phi_n^{-1}}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n^{-1}}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} = 1$$

Portanto,

$$< u \circ \Phi, \psi > = < u, |J\Phi^{-1}(x)|\psi(\Phi^{-1}(x)) > = < u, \psi(x + a) > .$$

Exemplo 1.25 (Reflexão)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e simétrico com relação a origem. Considere $\Phi(x) = -x \in C_c^\infty(\Omega)$. Temos que $\Phi^{-1}(x) = -x \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo, Φ é um difeomorfismo.
Como $|J(\Phi^{-1})| = |(-1)^n| = 1$, então

$$< u \circ \Phi, \psi > = < u, \psi \circ \Phi^{-1} > = < u, \psi(-x) > .$$

Passando para a notação usual temos que $< \check{u}, \phi > = < u, \check{\phi} >$.

1.5 Derivadas e Primitivas

Teorema 1.6. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto na reta, denotado por (a, b) com $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $u \in \mathscr{D}'(I)$ tal que $u' = 0$, então u é uma constante.*

Demonstração. Primeiramente demonstraremos a seguinte afirmação: se $\phi \in C_c^\infty(I)$ então existe $\psi \in C_c^\infty(I)$ tal que ϕ é a derivada de ψ, isto é $\phi = \psi'$. Note que tal implicação equivale a

$$\int_a^b \phi(x)dx = 0.$$

De fato, suponha que $\phi(x) = \psi'(x)$ para todo $x \in I$ e que $\text{supp}(\psi) \subset [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a, b)$. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b \psi'(x)dx \stackrel{*}{=} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \psi'(x)dx = \psi(\tilde{b}) - \psi(\tilde{a}) = 0.$$

Reciprocamente, suponha $\phi \in C_c^\infty(I)$ tal que $\int_a^b \phi(x)dx = 0$ e defina $\psi : I \mapsto \mathbb{R}$ como

$$\psi(x) = \int_a^x \phi(t)dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que $\psi'(x) = \phi(x)$ para todo $x \in I$, demonstrando assim a equivalência. Para a demonstração da afirmação defina ψ como anteriormente, mostremos que ψ possui suporte compacto. Note que $\text{supp}(\phi) \subseteq [\bar{a}, \bar{b}] \subset (a, b)$, logo

$$\psi(x) = \int_a^x \phi(t)dt = \int_a^x 0\ dt = 0, \text{ para todo } x \in (a, \bar{a}].$$

Além disso, para todo $x \in [\bar{b}, b)$ temos que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_a^x \phi(t)dt \\ &= \int_a^{\bar{b}} \phi(t)dt + \int_{\bar{b}}^x \phi(t)dt \\ &= 0 + \int_{\bar{b}}^x 0\ dt = 0.\end{aligned}$$

Portanto $\text{supp}(\psi) \subseteq \text{supp}(\phi)$, o que implica que $\psi \in C_c^\infty(I)$, finalizando a demonstração da afirmação. Antes de darmos continuidade na demonstração deste teorema observe que na igualdade $*$ utilizamos que $\text{supp}(\psi') \subset \text{supp}(\psi)$, mostremos que tal inclusão é verdadeira. Seja $x \notin \text{supp}(\psi)$, então como $\text{supp}(\psi)$ é um conjunto fechado existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \notin \text{supp}(\psi)$. Logo, $\psi(y) = 0$, para todo $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Por *Análise na Reta* sabemos que $\psi'(y) = 0$, para todo $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Assim $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \notin \text{supp}(\psi')$, o que implica que $x \notin \text{supp}(\psi')$. Portanto a inclusão é verdadeira. Considere agora $\phi_0 \in C_c^\infty(I)$ tal que

$$\int_a^b \phi_0(x)dx = 1.$$

Dada $\phi \in C_c^\infty(I)$, temos que

$$\phi(x) = \left[\phi(x) - \phi_0(x)\int_a^b \phi(y)dy\right] + \phi_0(x)\int_a^b \phi(y)dy.$$

Defina $\gamma(x) = \phi(x) - \phi_0(x)\int \phi(y)dy$, note que

$$\int_a^b \gamma(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b \phi_0(x)dx \int_a^b \phi(y)dy = 0.$$

Logo, pela afirmação inicial existe $\psi \in C_c^\infty(I)$ tal que $\gamma(x) = \psi'(x)$, o que implica que

$$\phi(x) = \psi'(x) + \phi_0(x)\int \phi(y)dy.$$

Logo,

$$< u, \phi > = < u, \psi' > + \int \phi(y)dy < u, \phi_0 > .$$

Por hipótese $< u', \psi > = < u, \psi' > = 0$, assim

$$\begin{aligned}
< u, \phi > &= 0 + \int \phi(y)dy < u, \phi_0 > \\
&= < u, \phi_0 > \int \phi(y)dy \\
&= < u, \phi_0 > < 1, \phi > \\
&= c < 1, \phi > = < c, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto u é constante. ∎

Corolário 1.2. *Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tal que $u' = \delta$, então $u = H(x) + c$.*

Demonstração. Lembremos que a função H é a função de Heaviside definida no Exemplo 1.19, no qual também é provado que $T'_H = \delta$. Note que

$$\begin{aligned} < (u - T_H)', \phi > &= - < u - T_H, \phi' > \\ &= - < u, \phi' > + < T_H, \phi' > \\ &= < u', \phi > - < T'_H, \phi > \\ &= < \delta, \phi > - < \delta, \phi >= 0, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Pelo Teorema 1.6 temos que $u - T_H = c$, o que implica $u = T_H + c$ e assim observe que essa igualdade é no sentido distribucional, falta mostrarmos que u pode ser vista também como uma função. Para isso, note que a distribuição c na verdade pode ser vista como T_c, no qual c é a função constante. Assim, temos que

$$u = T_H + T_c = T_{H+c}.$$

Logo, $u(x) = H(x) + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Corolário 1.3. *Seja $u \in \mathscr{D}'(I)$ tal que $u^{(K)} = 0$, então u é um polinômio de grau menor ou igual a $K - 1$. Aqui $u^{(K)}$ denota a K-ésima derivada da distribuição u.*

Demonstração. Mostremos por indução em K.
Para $K = 1$, segue do Teorema 1.6. Suponha agora que o resultado é válido para $K - 1$ derivadas e tome $u \in \mathscr{D}'(I)$ tal que $u^{(K)} = 0$. Defina $v = u^{(K-1)}$, então $v' = 0$. Pelo teorema anterior existe uma constante c tal que $v = c$ em distribuição. Assim

$$\begin{aligned} \left(u - c.\frac{x^{K-1}}{(K-1)!}\right)^{(K-1)} &= u^{(K-1)} - c.\left(\frac{x^{K-1}}{(K-1)!}\right)^{(K-1)} \\ &= u^{(K-1)} - c \\ &= u^{(K-1)} - v = 0. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$u - c.\frac{x^{K-1}}{(K-1)!} = \sum_{j=0}^{K-2} \alpha_j x^j.$$

Logo,

$$u = \sum_{j=0}^{K-2} \alpha_j x^j + c.\frac{x^{K-1}}{(K-1)!},$$

portanto u é um polinômio de grau $K - 1$. ■

Observação 1.4. Note que acima derivamos um polinômio no sentido usual. Para isso, contamos com a hipótese de regularidade da função, ou seja $f \in C^1$. Assim, teremos

$$< f', \phi >= - \int f(x)\phi'(x)dx = \int f'(x)\phi(x)dx.$$

Observe que a derivada "clássica"e a distribucional coincidem. Porém, analisemos no próximo exemplo porque é necessário incluirmos tal hipótese.

Exemplo 1.26. Seja $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$, no qual apresenta uma descontinuidade de primeira espécie na origem, isto é, os limites laterais existem mas são distintos. Note que f' existe para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e que $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Calculemos agora a derivada de f no sentido estudado das distribuições. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\mathrm{supp}(\phi) \subset [-M, M]$, então

$$\begin{aligned} < (T_f)', \phi > &= - < T_f, \phi' > \\ &= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-M}^{-\varepsilon} f(x)\phi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{M} f(x)\phi'(x)dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-M}^{-\varepsilon} f'(x)\phi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{M} f'(x)\phi(x)dx - f(-\varepsilon)\phi(-\varepsilon) + f(\varepsilon)\phi(\varepsilon) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx - f(0^-)\phi(0) + f(0^+)\phi(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx + \phi(0). \left[-f(0^-) + f(0^+) \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$< (T_f)', \phi >=< T_{f'}, \phi > + \left[-f(0^-) + f(0^+) \right] < \delta, \phi >$$

$$(T_f)' = T_{f'} + \left[-f(0^-) + f(0^+) \right] \delta.$$

1.6 Partições da Unidade

Definição 1.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que a sequência $\{\phi_j\}_{j \in I} \subset C_c^\infty(\Omega)$ é uma* ***partição da unidade*** *se*

(i) para todo $c \in \Omega$ existem uma vizinhança aberta V_c de c e um número finito de $\phi_1, ..., \phi_n$ tais que

$$\mathrm{supp}(\phi_k) \cap V_c \neq 0, k = 1, ..n.$$

(ii) $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$, *para todo* $x \in \Omega$ *e* $j \in I$.

(iii) $\sum_{j \in I} \phi_j(x) = 1$, *para todo* $x \in \Omega$.

Observação 1.5. Note que a soma (iii) está bem definida pois pelo item (i) para cada $x \in \Omega$ existe um número finito de índices tal que $\phi_j(x) \neq 0$, ou ainda

$$\sum_{j \in I} \phi_j(x) = \sum_{j=1}^{n_x} \phi_j(x).$$

Definição 1.15 (Partição Subordinada)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $V = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *uma cobertura aberta de* Ω. *Dizemos que uma partição da unidade* $\{\phi_j\}_{j \in J}$ *está subordinada à* V *se para todo* $\alpha \in \Lambda$ *existe* $j \in J$ *tal que*

$$\operatorname{supp}(\phi_j) \subseteq V_\alpha.$$

A seguir utilizaremos um resultado topológico a respeito da cobertura de um conjunto compacto para garantir a existência de um conjunto de funções testes que possuem características importantes para a demonstração da Proposição 1.6

Lema 1.3. *Sejam* $K \subset \Omega$ *compacto e* $V_1, ..., V_\ell$ *abertos tais que* $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j$, *então existem compactos* $K_j \subset V_j$ *para* $j = 1, ..., \ell$ *tais que* $K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} K_j$.

Teorema 1.7. *Sejam* $K \subset \Omega$ *compacto e* $V_1, ..., V_\ell$ *abertos tais que* $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j$. *Então existem funções* $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ *tais que*

(i) $\sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(x) \leq 1$ *; para todo* $x \in \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j$.

(ii) $\sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(x) = 1$ *em uma vizinhança de* K.

(iii) $0 \leq \phi_j \leq 1$ *para todo* $j = 1, ..., \ell$.

Demonstração. Pelo Lema 1.3, sejam $K_j \subset V_j$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} K_j$. Considere $\psi_j \in C_c^{\infty}(V_j)$ tais que $\psi_j \equiv 1$ em uma vizinhança de K_j para $j = 1, ..., \ell$ e defina

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_1, \\ \phi_2 &= (\psi_2)(1-\psi_1), \\ &\vdots \\ \phi_l &= \psi_\ell \prod_{i=1}^{\ell-1}(1-\psi i). \end{aligned}$$

Afirmação: Se $k \leq \ell$, vale

$$\sum_{i=1}^{k} \phi_i = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_k).$$

Mostremos a afirmação por indução. Para $k = 1$ é evidente. Suponha agora que seja válido para $k - 1$, isto é

$$\sum_{i=1}^{k-1} \phi_i = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_{k-1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \phi_i &= \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i + \phi_k \\ &= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_{k-1}) + \psi_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\psi_i) \\ &= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)...(1-\psi_{k-1})\left[1-\psi_k\right], \end{aligned}$$

provando a afirmação. Note que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \phi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{\ell}(1-\psi_i)(x).$$

Assim, temos que $\sum_{i=1}^{\ell} \phi_i(x) \leq 1$, para todo $x \in \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j$. Como $\psi_j \equiv 1$ em uma vizinhança $\tilde{V_j}$ de K_j e $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_j$ então $\sum_{i=1}^{\ell} \phi_i(x) \equiv 1$ em uma vizinhança

$\bigcup_{j=1}^{\ell} \tilde{V}_j$ de K. Por fim, como $\phi_j(x) = \psi_j(x) \prod_{i=1}^{j-1} (\psi_i)(x)$ e cada $0 < \psi_j < 1$ então $0 \leq \phi_j \leq 1$. ■

Proposição 1.6. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tais que para todo $c \in \Omega$, existe uma vizinhança aberta de c, denotada V_c, tal que $u_1 = u_2$ em V_c. Então $u_1 = u_2$ em Ω.*

Demonstração. Considere $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $K = \mathrm{supp}(\phi)$. Como Ω é um conjunto aberto e $K \subset \Omega$ então dado $p \in K$ existe uma vizinhança $V_p \subset \Omega$ de p tal que

$$K \subset \bigcup_{p \in K} V_p.$$

Por outro lado, como K é compacto, existem finitas vizinhanças $V_1, V_2, ..., V_\ell$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j.$$

Por hipótese $u_1 = u_2$ em V_j, para todo $j = 1, ..., \ell$. Defina $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$, para todo $j = 1, ..., \ell$ com as propriedades do Teorema 1.7, note que

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(x)\phi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \psi_j(x)$$

no qual $\psi_j(x) = \phi_j(x)\phi(x)$ possui suporte em V_j. Assim,

$$\begin{aligned}
< u_1, \phi > &= < u_1, \sum_{j=1}^{\ell} \psi_j(x) >= \sum_{j=1}^{\ell} < u_1, \psi_j > \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} < u_2, \psi_j > \ \ \text{(pois são iguais em } V_j\text{)} \\
&= < u_2, \sum_{j=1}^{\ell} \psi_j(x) > \\
&= < u_2, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto, $u_1 = u_2$ em Ω. ■

1.7 Suporte de uma Distribuição

Definição 1.16. *Seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Definimos o suporte da distribuição u, denotado por* supp(u), *como a intersecção de todos os fechado de Ω fora dos quais u é nula, isto é*

$$\text{supp}(u) = \cap F \text{ de tal forma que } F \subset \Omega \text{ é fechado e } u \equiv 0 \text{ em } (\Omega - F).$$

Observação 1.6. Seja $A \subset \Omega$ um conjunto aberto, então dizemos que $u = 0$ em A se $< u, \phi >= 0$ para toda $\phi \in C_c^\infty(A)$. Observe também que supp(u) é um conjunto fechado pois é uma intersecção qualquer de conjuntos fechados, logo $u = 0$ no aberto $\Omega - \text{supp}(u)$. Por fim, podemos dizer que um ponto $c \notin \text{supp}(u)$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $B(c, r) \subset \ \Omega - \text{supp}(u)$ e $< u, \varphi >= 0$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(B(c, r))$.

Proposição 1.7. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ então* supp$(T_f) \subset$ supp(f).

Demonstração. Seja $c \in \Omega - \text{supp}(f)$. Queremos mostrar que $c \notin \text{supp}(T_f)$. Como $\Omega - \text{supp}(f)$ é um conjunto aberto existe $r > 0$ tal que $B(c, r) \subset \Omega - \text{supp}(f)$. Mostremos agora que

$$< T_f, \phi >= 0 \text{ , para toda } \phi \in C_c^\infty(B(c, r)).$$

Como $\phi \in C_c^\infty(B(c, r))$ e $(B(c, r)) \cap \text{supp}(f) = \varnothing$ então $\phi = 0$ em supp(f). Por outro lado, como $f = 0$ em $\Omega - \text{supp}(f)$, então $f(x)\phi(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Assim,

$$< T_f, \phi > = \int f(x)\phi(x)dx = 0, \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(B(c, r)).$$

Logo, $c \notin \text{supp}(T_f)$. ∎

Proposição 1.8. *Sejam $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, então* supp$(f) \subset$ supp(T_f).

Demonstração. Seja $c \in \Omega - \text{supp}(T_f)$. Mostremos que $c \in \Omega - \text{supp}(f)$. Como $c \notin \text{supp}(T_f)$, que é um conjunto fechado, então existe $r > 0$ tal que $B(c, r) \subset \Omega - \text{supp}(T_f)$ e

$$< T_f, \phi > = 0 = < 0, \phi >, \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(B(c, r)).$$

Pela Proposição 1.3 temos que $f(x) = 0$ para todo $x \in B(c, r)$ e portanto $c \in \Omega - \text{supp}(f)$. ∎

Assim, pelas Proposições 1.7 e 1.8, concluímos que supp$(T_f) =$ supp(f) para toda $f \in L^1_{loc}$.

Definição 1.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathscr{E}'(\Omega)$ o subconjunto de $\mathscr{D}'(\Omega)$ tal que as distribuições possuem suporte compacto.*

Exemplo 1.27. Seja $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a distribuição Delta de Dirac, estudada no Exemplo 1.13. Então $\text{supp}(\delta) = \{0\}$ e assim $\delta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

Demonstração. Demonstremos por inclusão de conjuntos.

(i) $\text{supp}(\delta) \subset \{0\}$.
Como $\mathbb{R} - \{0\}$ é um conjunto aberto, então dado $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset \mathbb{R} - \{0\}$. Ademais, para toda $\phi \in C_c^\infty((p - \varepsilon, p + \varepsilon))$, temos que

$$< \delta, \phi >= \phi(0) = 0.$$

Logo $p \notin \text{supp}(\delta)$ e portanto $\text{supp}(\delta) \subset \{0\}$.

(ii) $\{0\} \subset \text{supp}(\delta)$.
Seja $\text{supp}(\delta) = \cap F$ de tal forma que $\delta = 0$ em $\mathbb{R} - F$. Mostremos que $0 \in \cap F$. Para isso, suponha por absurdo que exista $\tilde{F}$ tal que $\delta = 0$ em $\mathbb{R} - \tilde{F}$ mas que $0 \notin \tilde{F}$. Logo,

$$< \delta, \phi >= \phi(0) = 0 \text{ , para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} - \tilde{F})$$

Como $0 \in \mathbb{R} - \tilde{F}$ que é um conjunto aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} - \tilde{F}$. Pelo Teorema 1.4, podemos construir $\tilde{\phi} \in C_c^\infty((-\varepsilon, \varepsilon))$ tal que $\tilde{\phi} \equiv 1$ em uma vizinhança de $\left[\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Logo

$$< \delta, \tilde{\phi} >= \tilde{\phi}(0) = 1 \text{ o que é uma contradição.}$$

■

Exemplo 1.28. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(x) = c$ (com $c \neq 0$). Note que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $T_f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{C}$ é uma distribuição que pertence a $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Por outro lado, vimos que $\text{supp}(T_f) = \text{supp}(f)$, que por sua vez não é limitado, pois

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = c.$$

Portanto $T_f \notin \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ e assim $\mathscr{E}'(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Definição 1.18. *Sejam $U \subset \Omega$ um conjunto aberto e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Dizemos que $u \in C^\infty(U)$ se existe uma função $f \in C^\infty(U)$ tal que*

$$< u, \phi >= \int f(x)\phi(x)dx =< T_f, \phi > \textit{ para toda } \phi \in C_c^\infty(U).$$

Teorema 1.8. *Seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, então existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^{\infty}(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ tal que*

(i) $\tilde{u}(\phi) = u(\phi)$ *, para toda* $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

(ii) $\tilde{u}(\phi) = 0$ *se* $\phi \in C^{\infty}(\Omega)$ *e* $\operatorname{supp}(\phi) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing$.

Demonstração. Vamos inicialmente provar a unicidade. Para isso suponhamos que existam dois funcionais $\tilde{u_1}$ e $\tilde{u_2}$ que verifiquem (i) e (ii), e seja $\psi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ igual a 1 numa vizinhança do $\operatorname{supp}(u)$, (lembre-se novamente que sua existência é garantida pelo Teorema 1.4). Se $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, então podemos escrever

$$\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi \doteq \phi_1 + \phi_2$$

No qual $\phi_1 \in C_c^{\infty}(\Omega)$ e $\operatorname{supp}(\phi_2) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing$. Então

$$\tilde{u_1}(\phi) = \tilde{u_1}(\phi_1) + \tilde{u_1}(\phi_2) = u(\phi_1) = \tilde{u_2}(\phi_1) + \tilde{u_2}(\phi_2) = \tilde{u_2}(\phi),$$

o que prova a unicidade.

Para provarmos a existência, seja $\phi \in C^{\infty}(\Omega)$ e tome a seguinte decomposição: $\phi = \phi_0 + \phi_1$, no qual $\phi_0 \in C_c^{\infty}(\Omega)$ e $\operatorname{supp}(\phi_1) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing$. Defina $\tilde{u} : C^{\infty}(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ por

$$< \tilde{u}, \phi > = < u, \phi_0 >$$

Tome agora outra decomposição de ϕ: $\phi = \phi_0' + \phi_1'$. Note que $\phi_0 - \phi_0^{'} = \phi_1 - \phi_1^{'}$. Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(\phi_1) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing \quad & \text{e} \quad \operatorname{supp}(\phi_1') \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing \\
& \Rightarrow \quad \operatorname{supp}(\phi_1 - \phi_1^{'}) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing \\
& \Rightarrow \quad \operatorname{supp}(\phi_0 - \phi_0^{'}) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing
\end{aligned}$$

Como $\phi_0 - \phi_0^{'}$ está suportada em um aberto onde u se anula então $u(\phi_0 - \phi_0^{'}) = 0$, ou seja $< u, \phi_0 > = < u, \phi_0^{'} >$. Logo a definição de $\tilde{u}$ independente da decomposição escolhida e portanto $\tilde{u}$ existe e está bem definida. ∎

Definição 1.19. *Dizemos que uma sequência $\{\phi_j\}_j$ de funções $C^{\infty}(\Omega)$ converge a zero em $C^{\infty}(\Omega)$ se, para todo $K \subset \Omega$ compacto e para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ (multi-índice) $\partial^{\alpha}\phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K quando $j \longrightarrow \infty$.*

Observação 1.7. Seja $\{\phi_j\}_j \subset C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^{\infty}(\Omega)$, então $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^{\infty}(\Omega)$.

De fato, pela definição de convergência em $C_c^{\infty}(\Omega)$, existe um compacto $\tilde{K}$ tal que $\partial^{\alpha}\phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Assim, seja $K \subset \Omega$ um compacto qualquer, podemos estudar os dois seguintes casos:

a) Se $K \cap \tilde{K} = \varnothing$, então $\phi_j = 0$ em $\tilde{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $\partial^\alpha \phi_j(x) = 0$ para todo $x \in \tilde{K}$, para todo α multi-índice e para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$.

b) Se $K \cap \tilde{K} \neq \varnothing$, então $\phi_j = 0$ em $\tilde{K} - (K \cap \tilde{K})$ e $\partial^\alpha \phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em $K \cap \tilde{K}$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Portanto $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$.

A seguir mostraremos que a recíproca da Observação 1.7 é falsa.

Exemplo 1.29. Considere $\Omega = \mathbb{R}$ e defina $\phi_j(x) = \dfrac{\phi_0(jx)}{2^j}$, no qual $\phi_0 = 1$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$ e $\text{supp}(\phi_0) \subseteq [-1, 1]$. Note que

$$|\phi_j^{(k)}(x)| = |2^{-j} j^k \phi_0^{(k)}(jx)| \leq C j^k 2^{-n} \longrightarrow 0$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado,

$$\left[\frac{-j}{2}, \frac{j}{2}\right] \subseteq \text{supp}(\phi_j)$$

e portanto não existirá um compacto K tal que $\text{supp}(\phi_j) \subseteq K$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por fim, concluímos que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$ mas não converge em $C_c^\infty(\Omega)$.

A partir daqui veremos teoremas de equivalência da continuidade de funcionais definidos em distintos domínios. Tais resultados serão utilizados a seguir para definirmos uma condição para que um funcional $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tenha suporte compacto, ou seja, $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Teorema 1.9. *Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) u é contínuo.

(ii) Existem um compacto $K \subset \Omega$, uma constante $C > 0$ e um $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$| < u, \phi > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \ \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

Demonstração. Suponha que (ii) seja verdade e que $\phi_j \longrightarrow 0$ em C^∞, assim as derivadas até a ordem m de ϕ_j convergem à zero uniformemente em qualquer compacto e portanto

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_j(x)| \longrightarrow 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, aplicado em 1.3, concluímos que $< u, \phi_j >\longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$, logo u é contínuo.

Suponha agora que a estimativa 1.3 seja falsa para qualquer conjunto compacto K e quaisquer constantes c e m, queremos mostrar que u não é um funcional contínuo em C^∞. Para isso, defina

$$K_n = \left\{ x \in \Omega, |x| \leq n \text{ e } d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Provamos na demonstração da Proposição 1.3 que K_n é compacto, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega.$$

Logo, dado um $K \subset \Omega$ compacto, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{n_0}$. Tome $C = m = n$ e $K = K_n$, então existe uma função $\phi_n \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$$r_n \doteq |< u, \phi_n >| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha \phi_n(x)|.$$

Note que $r_n > 0$. Continuando, defina $\psi_n = \dfrac{\phi_n}{r_n}$ e observe que $\psi_n \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$. Por fim, dado um K compacto e β multi-índice, escolhemos $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{n} > |\beta|$ e que $K \subseteq K_{\tilde{n}}$. Logo,

$$\sup_{x \in K} |\partial^\beta \psi_n(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq \tilde{n}} \sup_{x \in K_{\tilde{n}}} |\partial^\alpha \psi_{\tilde{n}}(x)| = \frac{1}{r_{\tilde{n}}} \sum_{|\alpha| \leq \tilde{n}} \sup_{x \in K_{\tilde{n}}} |\partial^\alpha \psi_{\tilde{n}}(x)| < \frac{1}{\tilde{n}}.$$

Por outro lado, $|< u, \psi_n >| = |r_n^{-1} < u, \phi_n >| = 1$, o que contradiz a continuidade de u. ∎

Teorema 1.10. *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) u é contínuo.

(ii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, existem uma constante $C > 0$ e um $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|< u, \phi >| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \ \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ e } \operatorname{supp}(\phi) \subseteq K. \quad (1.4)$$

Demonstração. Se $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $K_0 \subset \Omega$ um conjunto compacto tal que $\text{supp}(\phi_j) \subseteq K_0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, basta tomarmos a estimativa 1.4 com $K = K_0$ para vermos que $< u, \phi_j > \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, mostrando a continuidade do funcional u.
De maneira análoga a demonstração do teorema anterior, suponha que tal estimativa seja falsa e considere $C = m = n$, podemos encontrar ψ_n tal que $| < u, \psi_n > | = 1$, $\text{supp}(\psi_n) \subseteq K$ e

$$\sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Então $\psi_n \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ mas $< u, \psi_n > \not\longrightarrow 0$, o que contradiz (i). ∎

Teorema 1.11. *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, isto é, $\text{supp}(u)$ é compacto.

(ii) Existe um funcional linear contínuo $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $v(\phi) = u(\phi)$ para toda $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou seja, v restrito à $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ é o funcional u.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii)
Se $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, então pelo Teorema 1.8 podemos estender u a funcional $\tilde{u}$ em $C^\infty(\Omega)$. Seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ um funcional tal que $\psi(x) = 1$ numa vizinhança de $\text{supp}(u)$, logo $\tilde{u}(\phi) = u(\phi\psi)$ para toda $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Aplicando o Teorema 1.10 a u com $K_0 = \text{supp}(\psi)$ obtemos para certos $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e para $\phi \in C^\infty(\Omega)$ arbitrária:

$$\begin{aligned} | < \tilde{u}, \phi > | &= | < \tilde{u}, \phi\psi > | \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_0} |\partial^\alpha (\psi\phi)(x)| \\ &\leq \tilde{\tilde{C}} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_0} |\partial^\alpha \phi|. \end{aligned}$$

A última desigualdade se obtém calculando $\partial^\alpha(\psi\phi)$ pela regra de Leibniz, do seguinte modo:

$$\partial^\alpha(\psi\phi)(x) = \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} C_{\alpha,\gamma}\, \partial^\gamma \phi(x)\, \partial^{\gamma-\alpha}\psi(x),$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\psi\phi)(x)| &= \left| \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} C_{\alpha,\gamma}\, \partial^\gamma\phi(x)\, \partial^{\gamma-\alpha}\psi(x) \right| \\
&\leq \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} C_{\alpha,\gamma} |\partial^\gamma\phi(x)|.|\partial^{\gamma-\alpha}\psi(x)| \\
&\leq \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} C_{\alpha,\gamma} |\partial^\gamma\phi(x)|. \sup_{x\in K_0} |\partial^{\gamma-\alpha}\psi(x)| \\
&= \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} \tilde{C}_{\alpha,\gamma,\psi} |\partial^\gamma\phi(x)|.
\end{aligned}
$$

Ou seja, os supremos das derivadas de ψ são absorvidos na constante $\tilde{C}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_0} |\partial^\alpha(\psi\phi)(x)| &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_0} \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} \tilde{C}_{\alpha,\gamma,\psi} |\partial^\gamma\phi(x)| \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} \tilde{C}_{\alpha,\gamma,\psi} \sup_{x\in K_0} |\partial^\gamma\phi(x)| \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{\tilde{C}}_{\alpha,\psi} \sup_{x\in K_0} |\partial^\gamma\phi(x)| \\
&= \tilde{\tilde{C}} \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K_0} |\partial^\gamma\phi(x)|.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 1.9 o funcional $\tilde{u}$ é contínuo em $C^\infty(\Omega)$, assim basta definir $v = \tilde{u}$ para obter (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Pelo Teorema 1.9 existem C, m, K tais que

$$
| < v, \phi > | \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \operatorname{supp}_{x\in K} |\partial^\alpha\phi(x)| \ ,\ \phi \in C^\infty(\Omega).
$$

Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{supp}(\phi) \cap K = \varnothing$, então

$$
| < u, \phi > | = | < v, \phi > | \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \operatorname{supp}_K |\partial^\alpha\phi| = 0.
$$

Logo, $\operatorname{supp}(u) \subseteq K$ e $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

■

Observação 1.8. A partir dos resultados anteriores podemos concluir que, dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$, e mais que isso, podemos identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ como

$$\mathscr{E}'(\Omega) = \{u : C^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{C}, u \text{ é um funcional linear contínuo}\}.$$

De fato, observe que os compactos K_n definidos na demonstração do Teorema 1.9 é uma sequência de conjuntos que cobre Ω, e seja $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_n(x) = 1$ em uma vizinhança de K_n. Logo, dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$, defina a sequência $\phi_n \doteq \psi_n \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Note que $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $C^\infty(\Omega)$ e portanto $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$.

Além disso, pela densidade, concluímos que o funcional v do Teorema 1.11 é único e portanto $\mathscr{E}'(\Omega)$ é o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Definição 1.20 (Suporte Singular)**.** *Definimos o suporte singular de uma distribuição u como a intersecção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é C^∞ e denotamos*

$$sing\,\text{supp}(u) = \bigcap_{\alpha} F_\alpha \; com \; u \in C^\infty \; em \; (\Omega - F).$$

Logo, $sing\,\text{supp}(u) \subset \text{supp}(u)$.

1.8 Convolução de Distribuições

Definição 1.21. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução de u e ϕ como a função $u * \phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ dada por*

$$(u * \phi)(y) = < u, \check{\phi}_y >, \; para \; todo \; y \in \mathbb{R}^n,$$

no qual $\check{\phi}_y(x) = \phi(y - x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definimos da mesma forma a convolução de $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ com $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.9. Observe que a definição de convolução de função e de distribuição coincidem para distribuições definidas como em 1.18. Ou ainda, sejam $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e u uma distribuição que pertença a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = T_f$. Mostremos que $T_f * \phi = f * \phi$.

$$\begin{aligned}
(T_f * \phi)(y) &= < T_f, \check{\phi}_y > \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{\phi}_y(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(y - x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y - z)\phi(z)\, dz = (f * \phi)(y), \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

No qual na penúltima igualdade utilizamos a seguinte mudança de variável: $z = y - x$.

Exemplo 1.30. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a distribuição Delta de Dirac, então $\delta * \phi = \phi$. De fato,

$$\begin{aligned} (\delta * \phi)(y) &= <\delta, \check{\phi}_y> = \check{\phi}_y(0) \\ &= \phi(y-0) = \phi(y), \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Portanto $\delta * \phi = \phi$.

Teorema 1.12. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e suas derivadas são dadas por*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi). \tag{1.5}$$

(ii) $\operatorname{supp}(u*\phi) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi) = \{x+y, x \in \operatorname{supp}(u) \text{ e } y \in \operatorname{supp}(\phi)\}$.

Demonstração. (i) Primeiramente, note que $\check{\phi}_y \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. De fato, como $\check{\phi}_y$ é uma composição de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $f(x) = y - x$, então $\check{\phi}_y \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pela própria definição de função teste.
Seja $\{y_j\}_j \in \mathbb{R}^n$ tal que $y_j \longrightarrow y_0$, então $\phi(y_j - x) \longrightarrow \phi(y_0 - x)$ pontualmente. Mostremos que existe K compacto tal que $\operatorname{supp}(\phi_{y_j}) \subset K$, para todo $y \in \mathbb{N}$. Como $(y_n)_n$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}^n$ então é limitada, ou ainda, existe $M > 0$ tal que $y_j \in B(y_0, M)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então o suporte da ϕ também é limitado, ou seja existe $r > 0$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset B(0, r)$. Pela definição temos que $\phi_{y_j}(x) = \phi(y_j - x)$, logo seja $x \in \operatorname{supp}(\phi_{y_j})$, então $y_j - x \in \operatorname{supp}(\phi)$, o que implica que $y_j - x \in B(0, r)$, portanto $xB(y_j, r)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\phi_{y_j}) &\subset B(y_j, r) \\ &\subset B(y_j, r + |y_j - y_0|) \\ &\subset B(y_j, r + M) \\ &\subset B[y_j, r + M], \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por fim, defina $K = B[y_j, r + M]$, note que K é um conjunto compacto tal que $\operatorname{supp}(\phi_{y_j}) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluímos assim que

$\phi(y_j - x) \longrightarrow \phi(y_0 - x)$ em C_c^∞. Pela continuidade da distribuição u temos que

$$(u * \phi)(y_j) =< u, \check{\phi}_{y_j} > \longrightarrow < u, \check{\phi}_{y_0} >= (u * \phi)(y_0).$$

Portanto $u*\phi$ é uma função contínua. Mostremos agora que a igualdade 1.5 é válida para $\alpha = e_j$, para isso considere o quociente de Newton na direção do vetor e_j

$$\begin{aligned} \frac{(u*\phi)(y+he_j) - (u*\phi)(y)}{h} &= \frac{< u, \check{\phi}_{y+he_j} > - < u, \check{\phi}_y >}{h} \\ &= \frac{< u, \check{\phi}_{y+he_j} - \check{\phi}_y >}{h} \\ &= \frac{< u, \phi(y+he_j - x) - \phi(y-x) >}{h} \end{aligned}$$

Aplicando o limite temos que

$$\partial_{x_j}(u * \phi)(y) =< u, \partial_{x_j}(\phi)(y-x) >= u * (\partial_{x_j}\phi)(y).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia

$$\partial_{x_j}\check{\phi}_y(x) = \partial_{x_j}\phi(y-x)\partial_{x_j}(y-x) = -\partial_{x_j}\phi(y-x).$$

Logo,

$$< u, \partial_{x_j}\phi(y-x) >= - < u, \partial_{x_j}\check{\phi}_y(x) >=< \partial_{x_j}u, \check{\phi}_y >= (\partial_{x_j}u) * \phi(y).$$

Portanto,

$$\partial_{x_j}(u * \phi) = (\partial_{x_j}u) * \phi = u * (\partial_{x_j}\phi).$$

Por indução concluímos que

$$\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi), \text{ para todo } \alpha \text{ multi-índice.}$$

Por fim, observe que pela igualdade acima concluímos que $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Seja $y \in \operatorname{supp}(u * \phi)$, logo temos duas situações

(a) $(u * \phi)(y) \neq 0$.
Note que $(u * \phi)(y) =< u, \check{\phi}_y(x) >\neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $x \in \operatorname{supp}(u)$. Por outro lado, $< u, \check{\phi}_y >=< u, \phi(y-x) >\neq 0$. Pela linearidade de u temos que $\phi(y-x) >\neq 0$, logo $y - x \in \operatorname{supp}(\phi)$. Portanto, como $y = x + (y-x)$ concluímos que $\operatorname{supp}(u * \phi) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi)$.

(b) Existe uma sequência y_j tal que $y_j \longrightarrow y$ e $(u * \phi)(y_j) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
Pelo item anterior vemos que $y_j = x_j + (y_j - x_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, no qual $x_j \in \operatorname{supp}(u)$ e $y_j - x_j \in \operatorname{supp}(\phi)$. Como os suportes são conjuntos fechados então existe $x \in \operatorname{supp}(u)$ tal que $x_j \longrightarrow x$, além disso $y_j - x_j \longrightarrow y - x$, que pertence ao suporte de ϕ. Novamente, vemos que $y = x + (y - x)$ e concluímos que $\operatorname{supp}(u * \phi) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi)$.

■

Note que os resultados do teorema anterior valem também para $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.13. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, considere as somas de Riemann

$$s_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_m \phi(x - \varepsilon m)\psi(\varepsilon m),$$

no qual $m \in \mathbb{Z}^n$. Então $\operatorname{supp}(s_\varepsilon) \subseteq \operatorname{supp}(\phi) + \operatorname{supp}(\psi) = K$ compacto (fixo) e para cada α multi-índice temos que

$$D^\alpha s_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_m (D^\alpha \phi)(x - \varepsilon m)\psi(\varepsilon m) \longrightarrow (D^\alpha \phi * \phi)(x) = D^\alpha(\phi * \psi)(x).$$

Portanto

$$u * (\phi * \psi)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} (u * s_\varepsilon)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_m (u * \phi)(x - \varepsilon m)\psi(\varepsilon m) = (u * \phi) * \psi(x).$$

■

Teorema 1.14. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \geq 0$ e $\int \phi = 1$. Então para cada $\varepsilon > 0$ temos que $u * \phi_\varepsilon \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Lembremos que para cada $\varepsilon > 0$ definimos $\phi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Utilizemos a seguinte notação: $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$, note que

$$(u * \check{\psi})(0) = < u, \check{\psi}(0 - x) > = < u, \psi(x) > = < u, \psi > .$$

Assim, pela igualdade anterior e pelo Teorema 1.13 temos que

$$\begin{aligned} < u * \phi_\varepsilon, \psi > &= (u * \phi_\varepsilon) * \check{\psi}(0) = u * (\phi_\varepsilon * \check{\psi})(0) \\ &= < u, (\phi_\varepsilon * \check{\psi})(-x) > = < u, (\phi_\varepsilon * \check{\psi})\check{\ } > . \end{aligned}$$

Observe agora que pelo Teorema 1.2 temos $\phi_\varepsilon * \check{\psi} \longrightarrow \check{\psi}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, o que implica que $(\phi_\varepsilon * \check{\psi})\check{} \longrightarrow \psi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto para cada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < u * \phi_\varepsilon, \psi >=< u, \psi >,$$

ou ainda $u * \phi_\varepsilon \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Corolário 1.4. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Como vimos anteriormente $\mathscr{E}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ pela definição de $\mathscr{E}'(\Omega)$, mostremos inicialmente que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{E}'(\Omega)$. Sejam $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e ϕ_ε como no teorema anterior, então pelo Teorema 1.12 temos que

$$\operatorname{supp}(u * \phi_\varepsilon) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi_\varepsilon) = K \text{ compacto.}$$

Além disso, pelo mesmo teorema temos que $u * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Concluímos que $u * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $u * \phi_\varepsilon \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Por outro lado, pelo Exemplo 1.23 temos que $\mathscr{E}'(\Omega)$ é denso em $\mathscr{D}'(\Omega)$, finalizando nossa demonstração. ∎

Observação 1.10. Na demonstração acima utilizamos resultados em Ω que a priori foram demonstrados para todo $\mathbb{R}^n$. Tal aplicação ainda é válida pois podemos estender as funções testes como função nula fora de Ω. Com isso tais funções permanecem bem definidas e aplicamos os resultados em $\mathbb{R}^n$. Posteriormente voltamos ao domínio restrito de Ω, visto que fora dele as funções permanecem nulas.

Exemplo 1.31. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$. Defina ϕ_ε como anteriormente, então $\phi_\varepsilon \longrightarrow \delta$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

De fato, pelo Teorema 1.14 temos que $\delta * \phi_\varepsilon \longrightarrow \delta$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, sabemos que $\delta * \phi_\varepsilon = \phi_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto ϕ_ε converge a distribuição Delta de Dirac.

O seguinte resultado é uma generalização do exemplo anterior.

Proposição 1.9. *Seja $\{f_j\}_j$ uma sequência de funções positivas em $L^1(\mathbb{R}^n)$ tais que*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\, dx \longrightarrow 1$ *quando* $j \longrightarrow \infty$.

(ii) Para todo $a \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_{B(0,a)^c} f_j(x)\, dx \longrightarrow 0$ *quando* $j \longrightarrow \infty$.

Então $f_j \longrightarrow \delta$ *em* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Basta mostrarmos que para cada $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $< T_{f_j}, \phi > \longrightarrow \phi(0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
| < T_{f_j}, \phi > | &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\phi(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)\phi(x)|\, dx \\
&= \int_{B(0,a)} f_j(x)|\phi(x)|\, dx + \int_{B(0,a)^c} f_j(x)|\phi(x)|\, dx \\
&= \int_{B(0,a)} f_j(x)(|\phi(x)| - \phi(0))\, dx \\
&+ \phi(0) \int_{B(0,a)} f_j(x)\, dx + \int_{B(0,a)^c} f_j(x)|\phi(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Analisemos a primeira integral

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,a)} f_j(x)(|\phi(x)| - \phi(0))\, dx &\leq \int_{B(0,a)} f_j(x)(|\phi(x)| - |\phi(0)|)\, dx \\
&\leq \int_{B(0,a)} f_j(x)|\phi(x) - \phi(0)|\, dx \\
&\leq \int_{B(0,a)} f_j(x)|x| \sup_{y \in [0,x]} | \bigtriangledown \phi(y)|\, dx \\
&\leq a \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \sup_{y \in [0,x]} | \bigtriangledown \phi(y)|\, dx \\
&= a \left\| \bigtriangledown \phi \right\|_{L^\infty} \left\| f_j \right\|_{L^1} < \infty, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Como $f_j \longrightarrow 1$ em norma L^1, então $\|f_j\|_{L^1}$ é limitada por uma constante positiva, digamos M. Defina $C \doteq \|\bigtriangledown \phi\|_{L^\infty} M$, se $C = 0$ então é imediato que

$$\int_{B(0,a)} f_j(x)(|\phi(x)| - \phi(0))\, dx \longrightarrow 0,$$

caso contrário, para cada $\varepsilon > 0$ dado tomemos $a = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Logo,

$$\int_{B(0,a)} f_j(x)(|\phi(x)| - \phi(0))\, dx \leq \varepsilon, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Portanto
$$\int_{B(0,a)} f_j(x)(|\phi(x)| - \phi(0))\ dx \longrightarrow 0.$$
Analisemos agora a segunda integral
$$\int_{B(0,a)} f_j(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\ dx - \int_{B(0,a)^c} f_j(x)\ dx.$$
Por hipótese, temos que
$$\lim_{j\to\infty} \int_{B(0,a)} f_j(x)\ dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\ dx - \lim_{j\to\infty} \int_{B(0,a)^c} f_j(x)\ dx = 1 - 0 = 1.$$
Portanto
$$\int_{B(0,a)} f_j(x)\ dx \longrightarrow 1.$$
Por fim, analisemos a terceira integral
$$\int_{B(0,a)^c} f_j(x)|\phi(x)|\ dx \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{B(0,a)^c} f_j(x)\ dx.$$
Se $\|\phi\|_{L^\infty} = 0$ então é direto que
$$\int_{B(0,a)^c} f_j(x)|\phi(x)|\ dx \longrightarrow 0,$$
caso contrário, para cada $\varepsilon > 0$ dado, note que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\int_{B(0,a)^c} f_j(x)\ dx \leq \frac{\varepsilon}{\|\phi\|_{L^\infty}}, \text{ para todo } j \geq j_0.$$
Logo,
$$\int_{B(0,a)^c} f_j(x)|\phi(x)|\ dx \longrightarrow 0.$$
Portanto concluímos que
$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} < T_{f_j}, \phi > &= \lim_{j\to\infty} \left[\int_{B(0,a)} f_j(x)(\phi(x) - \phi(0))\ dx \right.\\ &+ \left. \phi(0) \int_{B(0,a)} f_j(x)\ dx + \int_{B(0,a)^c} f_j(x)\phi(x)\ dx\right]\\ &= \phi(0).\end{aligned}$$

■

A seguir apresentaremos um resultado necessário para definirmos a convolução de duas distribuições, além disso veremos quais propriedades serão mantidas com nossa nova definição.

Definição 1.22. *Seja $h \in \mathbb{R}^n$, defina $T_h : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o operador translação. Isto é, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$T_h\phi(x) = \phi(x-h), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.10. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ então para cada $h \in \mathbb{R}^n$ temos que*

$$T_h[u * \phi](x) = u * [T_h\phi](x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Sejam $h, a \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} T_h[u*\phi](a) &= u*\phi(a-h) =< u, \check{\phi_{a-h}}(x) > \\ &= < u, \phi(a-h-x) >=< u, \phi(a-x-h) > \\ &= < u, T_h\phi(a-x) >=< u, \check{[T_h\phi]}_a(x) > \\ &= u * [T_h\phi](a). \end{aligned}$$

Como h, a são arbitrários, o resultado segue. ∎

Teorema 1.15. *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo que comuta com T_h, para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Então existe um único $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\phi = u * \phi$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Defina o funcional $u : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ dado por

$$< u, \phi > = U\check{\phi}(0), \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Note que a linearidade e a continuidade do funcional u é garantida pela linearidade e continuidade dos operadores U e $\check{}$. Além disso, por hipótese $UT_h = T_hU$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Fixe $h \in \mathbb{R}^n$ arbitrário e tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, note que

$$\begin{aligned} (T_{-h}\phi)\check{}\,(x) &= T_{-h}\phi\,(-x) = \phi(-x-(-h)) \\ &= \phi(h-x) = \check{\phi}_h(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} U\phi(h) &= T_{-h}[U\phi](0) = U[T_{-h}\phi](0) \\ &= < u, (T_{-h}\phi)\check{}(x) > \\ &= < u, \check{\phi}_h > = (u*\phi)(h). \end{aligned}$$

Como h é arbitrário então $U\phi = u*\phi$. Suponha agora que exista um funcional $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\phi = v*\phi$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, logo

$$(u*\phi)(h) = (v*\phi)(h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R}^n \text{ e para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para cada $h \in \mathbb{R}^n$ defina $\phi \doteq \check{\psi}_h$. Note que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $\check{\phi}_h = \psi$. Assim

$$\begin{aligned} < u, \psi > &= < u, \check{\phi}_h > = u*\phi \\ &= v*\phi \ = < v, \check{\phi}_h > = < v, \psi > . \end{aligned}$$

Logo $u = v$ em distribuição. ∎

Definição 1.23. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tais que pelo menos um deles tenha suporte compacto, digamos u_2. Definimos $v = u_1 * u_2$ como a única distribuição tal que $u_1 * (u_2 * \phi) = v * \phi$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Antes de mostrarmos que v está bem definida, lembremos de maneira didática que

(i) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u*\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iv) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u*\phi$ não está bem definido.

Assim, se $u_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ então $u_2 * \phi$ é uma função que pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, logo $u_1 * (u_2 * \phi)$ é uma função que pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e está bem definida. Além disso, observe que o operador U dado por $U\phi = u_1 * (u_2 * \phi)$ é um operador contínuo que comuta com T_h, para todo $h \in \mathbb{R}^n$. De fato, pela Proposição 1.10 temos que

$$\begin{aligned} U[T_h\phi] &= u_1 * [u_2 * (T_h\phi)] \\ &= u_1 * [T_h(u_2 * \phi)] \\ &= T_h[u_1 * (u_2 * \phi)] \\ &= T_h[U\phi]. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.15 v existe e é único.

Antes de darmos continuidade com exemplos e teoremas lembremos a seguinte igualdade desenvolvida na demonstração do Teorema 1.14

$$< u, \phi >= (u * \check{\phi})(0),$$

sempre que $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou quando $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.32. Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\delta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ a distribuição Delta de Dirac. Para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned} < u * \delta, \phi > &= (u * \delta) * \check{\phi}(0) \doteq u * (\delta * \check{\phi})(0) \\ &= u * \check{\phi}(0) = < u, \phi > . \end{aligned}$$

Logo, $u * \delta = u$ em distribuição. De maneira análoga

$$\begin{aligned} < \delta * u, \phi > &= (\delta * u) * \check{\phi}(0) \doteq \delta * (u * \check{\phi})(0) \\ &= u * \check{\phi}(0) = < u, \phi > . \end{aligned}$$

Portanto, $\delta * u = u$ em distribuição.

Teorema 1.16. *Sejam $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, então*

(i) $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

(ii) $\operatorname{supp}(u_1 * u_2) \subseteq \operatorname{supp}(u_1) + \operatorname{supp}(u_2)$.

Demonstração. (i) Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, suponha por enquanto que a identidade abaixo seja verdadeira

$$(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\phi * \psi). \tag{1.6}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ tome $\psi = \phi_\varepsilon$ assim como no Teorema 1.2. Note que $\phi * \phi_\varepsilon \longrightarrow \phi$ uniformemente quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Aplicando o limite na Identidade 1.6 temos que

$$[(u_1 * u_2) * \phi](x) = [(u_2 * u_1) * \phi](x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular para $x = 0$ temos que

$$[(u_1 * u_2) * \phi](0) = [(u_2 * u_1) * \phi](0),$$

isto é,

$$< u_1 * u_2, \check{\phi} > = < u_2 * u_1, \check{\phi} > , \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ defina $\varphi = \check{\phi}$. Note que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $\check{\varphi} = \phi$, logo

$$\begin{aligned} < u_1 * u_2, \phi > &= < u_1 * u_2, \check{\varphi} > \\ &= < u_2 * u_1, \check{\varphi} > \\ &= < u_2 * u_1, \phi > . \end{aligned}$$

Por fim, concluímos que $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ em distribuição.

Mostremos agora que a Identidade 1.6 é verdadeira. Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) &\doteq u_1 * [u_2 * (\phi * \psi)] \\
&= u_1 * [(u_2 * \phi) * \psi] \quad \text{(pelo Teorema 1.13)} \\
&= u_1 * [\psi * (u_2 * \phi)] \quad \text{(pois é uma convolução de funções)} \\
&= (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi) \quad \text{(pelo Teorema 1.13)}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned}
(u_2 * u_1) * (\psi * \phi) &= u_2 * [u_1 * (\psi * \phi)] = u_2 * [(u_1 * \psi) * \phi] \\
&= u_2 * [\phi * (u_1 * \psi)] = (u_2 * \phi) * (u_1 * \psi).
\end{aligned}$$

Além disso, note que

$$(u_2 * u_1) * (\psi * \phi) = (u_2 * u_1) * (\phi * \psi).$$

Portanto

$$(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\phi * \psi).$$

(ii) Considere ϕ_ε como anteriormente, aplicando o Teorema 1.12 temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}[(u_1 * u_2) * \phi_\varepsilon] &= \mathrm{supp}[u_1 * (u_2 * \phi_\varepsilon)] \\
&\subseteq \mathrm{supp}(u_1) + \mathrm{supp}(u_2 * \phi_\varepsilon) \\
&\subseteq \mathrm{supp}(u_1) + \mathrm{supp}(u_2) + \mathrm{supp}(\phi_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.14 temos que $(u_1 * u_2) * \phi_\varepsilon \longrightarrow u_1 * u_2$. Além disso, como $\mathrm{supp}(\phi_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon)$ então $\mathrm{supp}(\phi_\varepsilon) \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Assim,

$$\mathrm{supp}(u_1 * u_2) \subseteq \mathrm{supp}(u_1) + \mathrm{supp}(u_2).$$

■

Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tais que pelo menos uma distribuição pertença a $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Vimos que $v = u_1 * u_2$ é uma distribuição que pertence a $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, o que nos leva a pensar que a definição de convolução de distribuições pode ser reaplicada, a fim de criarmos a convolução de três ou mais distribuições. A seguir veremos a definição da convolução de três distribuições e quais são as condições necessárias para que a mesma esteja bem definida.

Definição 1.24. *Sejam $u_1, u_2, u_3 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tais que pelo menos duas distribuições pertençam a $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Então podemos definir $v = [u_1 * u_2 * u_3]$ como a única distribuição tal que*

$$v * \phi = u_1 * [(u_2 * u_3) * \phi] = u_1 * [u_2 * (u_3 * \phi)],$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos então a necessidade de duas das três distribuições pertencerem a $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Para isso considere os dois possíveis cenários:

(i) $u_3 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Então $u_3 * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que implica que $u_2, u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ para que a convolução esteja bem definida.

(ii) $u_3 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.
Então $u_3 * \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, assim podemos assumir $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, porém é necessário que $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ para que a convolução esteja bem definida.

Proposição 1.11. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tais que pelo menos uma distribuição pertença a $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então*

$$D^\alpha(u_1 * u_2) = (D^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (D^\alpha u_2).$$

Demonstração. Primeiramente, observe que para cada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}
(D^\alpha u) * \phi &= u * (D^\alpha \phi) = u * [D^\alpha(\delta * \phi)] \\
&= u * [(D^\alpha \delta) * \phi] = [u * (D^\alpha \delta)] * \phi \\
&= [(D^\alpha \delta) * u] * \phi
\end{aligned}$$

Logo $D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$. Utilizando as propriedades associativas e comutativas vistas anteriormente temos que

$$\begin{aligned}
[D^\alpha(u_1 * u_2)] * \phi &= [(D^\alpha \delta) * (u_1 * u_2)] * \phi \\
&= [((D^\alpha \delta) * u_1) * u_2] * \phi \overset{1}{=} [(D^\alpha u_1) * u_2] * \phi \\
&= [(u_1 * (D^\alpha \delta)) * u_2] * \phi \\
&= [u_1 * ((D^\alpha \delta) * u_2)] * \phi \overset{2}{=} [u_1 * (D^\alpha u_2)] * \phi.
\end{aligned}$$

Pelas igualdades (1) e (2) o resultado segue. ∎

Capítulo 2

Transformada de Fourier

Introdução histórica: Jean-Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico francês que viveu entre os séculos $XVIII$ e XIX. Dedicou sua carreira aos estudos de decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, chamadas *Séries de Fourier*, e sua aplicação aos problemas de condução do calor. Seu grande interesse em estudar como o calor fluía para dentro e em torno de materiais levou-o a desenvolver a *Transformada de Fourier*, publicada em seu livro *A Teoria Analítica do Calor*, de 1822.

Na época, não era possível notar a importante contribuição que estava dando, não apenas à matemática e à física, mas também à engenharia, tecnologia e à ciência como um todo. A *Transformada de Fourier* foi aplicada nos estudos de música, permitindo a criação dos fones de ouvido com cancelamento de ruído, e aplicada em problemas espaciais, sendo usada para construir imagens digitais de forma mais eficiente do que a fazê-lo de pixel a pixel. Fourier também é geralmente creditado pela descoberta do efeito estufa.

Definição 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ pertencente a $L^1(\mathbb{R}^n)$, ou seja*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty.$$

Definimos a Transformada de Fourier da função f como $\hat{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, dx,$$

no qual atribuímos as seguintes notações:

(i) $x.\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$.

(ii) Considere $\lambda = x.\xi \in \mathbb{R}$, *assim* $e^{-ix.\xi} = e^{i\lambda} = \cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda$.

Note que $\hat{f}$ está bem definida. De fato, como $|e^{i\lambda}| = 1$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-ix.\xi} f(x) \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-ix.\xi} \right| |f(x)| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx < \infty \text{ , desde que } f \in L^1(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Da estimativa anterior observe também que $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, visto que

$$||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1} < \infty. \tag{2.1}$$

Proposição 2.1. *A Transformada de Fourier é uma operação linear e* $\hat{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ *é uma função contínua.*

Demonstração. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pela linearidade da integração, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{(f+g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} [f(x) + g(x)] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) + e^{-ix.\xi} g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} g(x) dx \\
&= \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi), \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{(f+g)} = \widehat{f} + \widehat{g}$.
Além disso, seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
\widehat{(\alpha f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \alpha f(x) dx \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) dx \\
&= \alpha \hat{f}(\xi), \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{(\alpha f)} = \alpha \widehat{f}$.

Mostremos a continuidade por convergência de sequências. Seja $(\xi_k)_k$ uma sequência qualquer tal que $(\xi_k)_k \longrightarrow \xi_0$. Demonstraremos a seguir que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi_0)| < \varepsilon$, para todo $k \geq k_0$. Defina $f_k(x) = |(e^{-ix.\xi_k} - e^{-ix.\xi_0})f(x)|$. Note que f_k é integrável, pois

$$\int f_k(x)dx \leq 2. \int |f(x)|dx < \infty,$$

ou ainda, $||f_k||_{L^1} \leq 2||f||_{L^1}$, o que implica que $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $f(x)$ está definida q.t.p., além disso, como $g(\xi) \doteq e^{-ix.\xi}$ é contínua então $f_k \longrightarrow 0$ q.t.p. Assim, temos

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi_k} f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi_0} f(x)dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-ix.\xi_k} - e^{-ix.\xi_0}) f(x)dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| (e^{-ix.\xi_k} - e^{-ix.\xi_0}) f(x) \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx \longrightarrow 0,$$

isto é, existe $k \geq k_0$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \right| dx < \varepsilon.$$

Portanto $|\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi_0)| \leq \varepsilon$ para $k \geq k_0$.

■

Lema 2.1. *(Riemann - Lebesgue) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso 1) $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Note que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois $\operatorname{supp}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) \subseteq \operatorname{supp}(f)$. Além disso, sabemos

que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $j = 1, ..., n$. Como supp(f) é um conjunto compacto, então supp$(f) \subseteq Q = [-n_0, n_0]^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{Q}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx \\
&= \int_{-n_0}^{n_0} \cdots \int_{-n_0}^{n_0} \left(\int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix.\xi} f(x)dx_n \right) dx_{n-1} \ldots dx_1 \\
&= \int_{-n_0}^{n_0} \cdots \int_{-n_0}^{n_0} \left(\int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix.\xi} f(x)dx_j \right) dx_n \ldots dx_{j+1} dx_{j-1} \ldots dx_1 \\
&= \int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix_1.\xi_1} \cdots \left(\int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix_j.\xi_j} f(x)dx_j \right) dx_n \ldots dx_{j+1} dx_{j-1} \ldots dx_1.
\end{aligned}$$

Note que $\dfrac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix_j.\xi_j} = e^{-ix_j.\xi_j}(-i\xi_j)$, então $e^{-ix_j.\xi_j} = \dfrac{i}{\xi_j} \dfrac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix_j.\xi_j}$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix_j.\xi_j} f(x)dx_j &= \frac{i}{\xi_j} \int_{-n_0}^{n_0} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix_j.\xi_j} f(x)dx_j \\
&= \frac{i}{\xi_j} \int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix_j.\xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j - \frac{i}{\xi_j} e^{-ix_j.\xi_j} f(x) \Big|_{x_j=-n_0}^{x_j=n_0} \\
&= \frac{i}{\xi_j} \int_{-n_0}^{n_0} e^{-ix_j.\xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j.
\end{aligned}$$

Acima utilizamos que $\dfrac{i}{\xi_j} e^{-ix_j.\xi_j} f(x) = 0$ ao aplicarmos em $x \in \mathbb{R}^n$ com $x_j = \pm n_0$ pois todo x com $x_j = \pm n_0$ não pertence no suporte da f. Substituindo agora na identidade anterior temos que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i} \frac{1}{\xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi_k} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{|\xi_j|} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix.\xi_k}| \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| dx \\
&\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^1} \frac{1}{|\xi_j|} \longrightarrow 0 \text{ quando } |\xi_j| \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Aqui, observe que se $|\xi| \longrightarrow \infty$ então existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $|\xi_j| \longrightarrow \infty$, assim escolhemos um j como acima. Além disso, observe também que a convergência $|\hat{f}(\xi)| \longrightarrow 0$ é válida pois para todo $\varepsilon > 0$ dado podemos exibir

$$\delta = \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|\right|_{L^1} \frac{1}{|\varepsilon|}.$$

Caso 2) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então fixada f qualquer pertencente a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $||g - f||_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}[f(x) - g(x)]dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} g(x)\, dx,$$

o que implica que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq ||f - g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\hat{g}(\xi)|, \text{ para toda } g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Além disso podemos aplicar a função g no primeiro caso e afirmar que $|\hat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$, o que implica que $|\hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$.

Finalmente, concluímos que $\hat{f}(\xi) \longrightarrow 0$, quando $|\xi| \longrightarrow \infty$, para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. ■

Observação 2.1. No primeiro caso poderíamos ter usado uma derivada arbitrária, ou seja $\partial^\alpha f$, com α multi-índice. Tal generalização pode ser feita pelo processo de indução. A demonstração anterior considera $|\alpha| = 1$ mas para $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$ teríamos

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|\partial^\alpha f\|_{L^1} \frac{1}{|\xi^\alpha|}$$

2.1 Espaço de Schwartz

Motivação: A seguir veremos um exemplo de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Logo, não podemos definir a *Transformada de Fourier* como um operador em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nosso questionamento então será: existe algum subconjunto de $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que esse operador possa estar bem definido? Ou ainda, um conjunto em que a *Transformada de Fourier* seja uma operação fechada?

Exemplo 2.1. Considere $f(x) = \mathcal{X}_{(a,b)}(x)$. Note que $f \in L^1(\mathbb{R})$. De fato,

$$\int |f(x)|dx = \int |\mathcal{X}_{(a,b)}(x)|dx = \int_a^b dx = b - a < \infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_a^b e^{-ix.\xi}dx = \left.\frac{e^{-ix.\xi}}{-i\xi}\right|_a^b \\
&= \frac{-1}{i\xi}(e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}) \\
&= \frac{i}{\xi}[\cos(-\xi b) + i\,\mathrm{sen}\,(-\xi b) - \cos(-\xi a) - i\,\mathrm{sen}\,(-\xi a)] \\
&= \frac{i}{\xi}\left[-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b - \xi a}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b + \xi a}{2}\right)\right. \\
&+ \left. i\left(2\cos\left(\frac{-\xi b - \xi a)}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b + \xi a}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{i}{\xi}\left[\left\{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b + \xi a}{2}\right)\right\}\left\{i\cos\left(\frac{-\xi b - \xi a)}{2}\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b - \xi a}{2}\right)\right\}\right] \\
&= \frac{2}{\xi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b + \xi a}{2}\right)\left[-\cos\left(\frac{-\xi b - \xi a)}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b - \xi a}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\xi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b + \xi a}{2}\right)\left(-e^{\frac{-\xi b + \xi a}{2}i}\right) \\
&= \frac{-2}{\xi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi b + \xi a}{2}\right)\left(e^{\frac{-\xi b + \xi a}{2}i}\right) \\
&= \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{-\xi}{2}(a - b)\right)}{\frac{-\xi}{2}}\,e^{\frac{-\xi b + \xi a}{2}i}
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{\text{sen}\,\left(\frac{-\xi}{2}(a-b)\right)}{\frac{-\xi}{2}} \right| \left| e^{\frac{-\xi b + \xi a}{2} i} \right| \\
&= \left| \frac{\text{sen}\,\left(\frac{-\xi}{2}(a-b)\right)}{\frac{-\xi}{2}(a-b)} \right| |a-b| \\
&= \left| \frac{\text{sen}\,(\widetilde{\xi})}{\widetilde{\xi}} \right| |a-b|
\end{aligned}$$

no qual $\widetilde{\xi} = \frac{-\xi}{2}(a-b)$, o que implica

$$\int |\hat{f}(\xi)| d\xi = |a-b| \int \left| \frac{\text{sen}\,(\tilde{\xi})}{\tilde{\xi}} \right| d\tilde{\xi}.$$

Defina agora $I_{k,\varepsilon} = \{\xi \;/\; |k\pi + \frac{\pi}{2} - \xi| < \varepsilon\}$, para um ε fixo. Observe que existe um $M > 0$ tal que $M \leq \text{sen}\,\xi \leq 1$, para todo $\xi \in I_{k,\varepsilon}$. Assim $\dfrac{\text{sen}\,\xi}{|\xi|} \geq \dfrac{M}{|\xi|}$, para todo $\xi \in I_{k,\varepsilon}$. Por fim, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{|\text{sen}\,z|}{z} dz &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{k,\varepsilon}} \left| \frac{\text{sen}\,z}{z} \right| dz \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{k,\varepsilon}} \frac{M}{|\xi|} d\xi \\
&= M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon} \frac{1}{|\xi|} d\xi \\
&\geq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que o somatório acima diverge. Defina

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ e } b_n = \frac{2\varepsilon}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon}.$$

Observe que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2\varepsilon}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon}} = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{2\varepsilon n} = \frac{\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{\varepsilon}{n}}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{2\varepsilon} \neq 0.$$

Pelo Critério do Limite ou $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ divergem ou $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ convergem. Como sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Portanto $\hat{f}(\xi)$ não pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

Definição 2.2. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$, o espaço de Schwartz, denotado por $S(\Omega)$, é definido como*

$$S(\Omega) = \{\phi \in C^{\infty}(\Omega) \; / \sup_{x \in \Omega} |x^{\alpha} \, \partial^{\beta} \, \phi(x)| < \infty\},$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Observação 2.2. Seja $\phi \in S(\Omega)$, então pela definição deste espaço $\partial^{\beta}\phi$ e $x^{\alpha}\phi \in S(\Omega)$ para todo β e α multi-índices.

A seguir, definiremos a convergência em $S(\Omega)$.

Definição 2.3. *Seja $\{\phi_j\}_j \subset S(\Omega)$ uma sequência de funções de $S(\Omega)$, então dizemos que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$ se $x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j(x) \longrightarrow 0$ uniformemente em Ω, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.*

Observação 2.3. Seja $\{\phi_j\}_j \subset C_c^{\infty}(\Omega)$. Observe que se $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^{\infty}(\Omega)$ então $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$.

De fato, se $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^{\infty}(\Omega)$, então existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e tal que $\partial^{\beta}\phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K para todo β multi-índice. Como x^{α} é limitado em K então $x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em K. Além disso, como $x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j(x) = 0$ para todo $x \in \Omega - K$ então $x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j \longrightarrow 0$ uniformemente em Ω. Por fim, concluímos que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$.

Definição 2.4. *Definimos o conjunto das funções de decaimento rápido como*

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C} \; , \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} \phi(x) = 0 \right\}.$$

Observação 2.4. Note que $S(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, então para cada α e β multi-índices, existe $C_{\alpha,\beta}$ tal que $|x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$. Em particular para $\alpha = e_j$ e β o vetor nulo temos que

$$|\phi(x)x_j| \leq c \Rightarrow |\phi(x)| \leq \frac{c}{|x_j|}.$$

Note que $||x|| \longrightarrow +\infty$ equivale a $|x_j| \longrightarrow \infty$ para algum $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Portanto, pelo Teorema do Confronto, concluímos que $|\phi(x)| \longrightarrow 0$.

Proposição 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então $C_c^\infty(\Omega) \subset S(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\sup_{x\in\Omega} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = \sup_{x\in \text{supp}(\phi)} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty,$$

pois $\partial^\beta \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e supp $(\partial^\beta \phi) \subseteq$ supp (ϕ), para todo β. Além disso, como x^α é contínua então $x^\alpha \partial^\beta \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e supp $(x^\alpha \partial^\beta \phi) \subseteq$ supp (ϕ).

Seja $\phi \in S(\Omega)$, para mostrarmos que $S(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ considere os dois seguintes casos:

(i) $1 \leq p < \infty$.
Defina m o primeiro natural tal que $m > \dfrac{n}{2p}$, note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\phi(x)|^p \, dx &= \int_\Omega \frac{[(1+|x|^2)^m |\phi(x)|]^p}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx \\
&\leq \left[\sup_{x\in\Omega} \{(1+|x|^2)^m |\phi(x)|\}\right]^p \int_\Omega \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx \\
&\leq \underbrace{\left[\sup_{x\in\Omega} \{(1+|x|^2)^m |\phi(x)|\}\right]^p}_{(a)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx}_{(b)}
\end{aligned}$$

(a) Note que $\sup_{x\in\Omega}\{(1+|x|^2)^m |\phi(x)|\} < \infty$ pela definição de $S(\Omega)$. De fato,

$$(1+|x|^2)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 1^{m-i} |x|^{2i} = \sum_{i=0}^m C_{m,i} \left(\sum_{i=1}^n x_j^2\right)^i.$$

Como temos uma soma finita então o supremo da soma pode ser aplicado como a soma do supremo, que por sua vez é finita pela definição de $S(\Omega)$.

(b) Seja $r > 1$, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx = \int_{B[0,r]} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx + \int_{B[0,r]^c} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx$$

Mostremos que cada integral é finita:

$$\int_{B[0,r]} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} \, dx \leq m(B[0,r]) \sup_{x\in B[0,r]} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} < \infty,$$

pois a Medida de Lebesgue de um conjunto compacto e o supremo de uma função contínua em um conjunto compacto são ambos finitos. Utilizaremos agora a integração em coordenadas polares, no qual $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$. Pelo Teorema 2.52, demonstrado em [3], podemos reescrever tal integral como

$$\begin{aligned}\int_{B[0,r]^c} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}}\, dx &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_r^\infty \frac{1}{(1+\rho^2)^{mp}} \rho^{n-1}\, d\rho\, dw \\ &= m(\mathbb{S}^{n-1}) \int_r^\infty \frac{1}{(1+\rho^2)^{mp}} \rho^{n-1}\, d\rho\ .\end{aligned}$$

Como $\mathbb{S}^{n-1}$ é um conjunto compacto então $m(\mathbb{S}^{n-1}) < \infty$ e como $1+\rho^2 > \rho^2$ então $\dfrac{1}{1+\rho^2} < \dfrac{1}{\rho^2}$, logo

$$\begin{aligned}\int_{B[0,r]^c} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}}\, dx &\overset{*}{\leq} C \int_r^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2)^{mp}}\, d\rho \\ &= C \int_r^\infty \rho^{n-1-2mp}\, d\rho < \infty,\end{aligned}$$

pois temos agora uma integrável imprópria, cujo expoente de ρ é menor que -1. De fato, pela definição de m temos que

$$m > \frac{n}{2p} \Leftrightarrow n - 2mp < 0 \Leftrightarrow n - 1 - 2mp < -1$$

Do anterior, concluímos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e portanto $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $p = \infty$.
Como $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|\phi\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| < \infty,$$

basta aplicarmos a definição do espaço de Schwartz para $\alpha = \beta = 0$.

■

Exemplo 2.2. Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-|x|^2}$. Note que $f \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n$. Por outro lado $f \in S(\mathbb{R}^n)$. De fato, inicialmente considere $\beta = e_1$, assim

$$\partial^\beta e^{-|x|^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}) = -2x_1 e^{-|x|^2}.$$

Para $\beta = (1,1,0,...,0)$ temos que

$$\begin{aligned}
\partial^\beta e^{-|x|^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2}(e^{-(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-2x_2 e^{-|x|^2}) \\
&= (-2x_2)(-2x_1)e^{-|x|^2} = 4x_1x_2e^{-|x|^2}.
\end{aligned}$$

De maneira geral, concluímos que $\partial^\beta e^{-|x|^2} = e^{-|x|^2} p_\beta(x)$, no qual $p_\beta(x)$ corresponde a um polinômio de x de ordem menor ou igual a $|\beta|$. Logo $x^\alpha \partial^\beta e^{-|x|^2} = x^\alpha p_\beta(x) e^{-|x|^2}$. Consideremos agora os dois seguintes casos:

a) Para $|x| > 1$ o termo exponencial tem crescimento mais rápido que o polinômio, assim
$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^\alpha p_\beta(x)}{e^{|x|}} = 0,$$
e portanto
$$\sup_{x \in B[0,1]^c} x^\alpha p_\beta(x) e^{-|x|^2} < \infty.$$

b) Agora, quando $|x| \leq 1$ estamos calculando o supremo de uma função contínua, pois $x^\alpha p_\beta(x) e^{-|x|^2}$ é o produto de funções contínuas, no compacto $B[0,1] \subset \mathbb{R}^n$, logo
$$\sup_{x \in B[0,1]} x^\alpha p_\beta(x) e^{-|x|^2} < \infty.$$

Portanto, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} x^\alpha p_\beta(x) e^{-|x|^2} < \infty$ e $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, além de mostrarmos operações e manipulações que podem ser feitas com a *Transformação de Fourier*, veremos que o *operador-transformação* está bem definido no espaço de Schwartz e é contínuo. Por fim, veremos que este operador é inversível e sua inversa também é contínua.

Teorema 2.1. *Dados quaisquer multi-índices α e β, e $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, valem as seguintes igualdades:*

$$\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi), \tag{2.2}$$
$$\widehat{x^\beta \phi}(\xi) = (-1)^{|\beta|} D^\beta \widehat{\phi}(\xi). \tag{2.3}$$

Além disso, o operador $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \mapsto S(\mathbb{R}^n)$ dado por $\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi)$ está bem definido e é contínuo.

Demonstração. Verifiquemos a primeira igualdade. Para isso, note que pelas Observações 2.2 e 2.4, dada uma $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ qualquer então $\partial^\alpha \phi \in S(\mathbb{R}^n)$ e possui decaimento rápido, para qualquer multi-índice α. Logo, ao tomarmos $\beta = e_j$ e integrarmos por partes em relação a variável x_j obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \partial_{x_j} \phi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} \partial_{x_j} \phi(x) dx_j \right] dx_1 ... dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{M \to \infty} e^{-ix.\xi} \phi(x)|_{-M}^{M} + (i\xi_j) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} \phi(x)\, dx_j \right] dx_1 ... dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \left[(i\xi_j) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} \phi(x)\, dx_j \right] dx_1 ... dx_n \\
&= (i\xi_j) \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} \phi(x)\, dx_j \right] dx_1 ... dx_n \\
&= (i\xi_j) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \phi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \partial_{x_j} \phi(x)\, dx = (i\xi_j) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \phi(x)\, dx.$$

Ou seja,

$$\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = (i^{|\alpha|} \xi^\alpha) \widehat{\phi}(\xi), \text{ para todo } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1.$$

Mostremos por indução que tal igualdade é válida para qualquer α. Suponha que seja válido para qualquer β com $|\beta| = m$ e seja α tal que $|\alpha| = m + 1$, logo $\alpha = \beta + e_j$, para algum β tal que $|\beta| = m$ e algum $1 \leq j \leq n$. Então

$$\partial^\alpha \phi(\xi) = \partial^{\beta + e_j} \phi(\xi) = \partial^\beta [\partial^{e_j} \phi](\xi) = \partial^\beta [\partial_{x_j} \phi](\xi).$$

O que implica que

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) &= \widehat{\partial^\beta \partial_{x_j} \phi}(\xi) \\
&= (i^{|\beta|} \xi^\beta) \widehat{\partial_{x_j} \phi}(\xi) \\
&= (i^m \xi^\beta)(i \xi^{x_j}) \widehat{\phi}(\xi) \\
&= (i^{|\alpha|} \xi^\alpha) \widehat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = (i^{|\alpha|} \xi^\alpha) \widehat{\phi}(\xi)$. Dividindo por i^α concluímos que $\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$.

Para demonstrarmos a segunda igualdade utilizamos novamente a Observação 2.2, ou seja, se $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ então $x^\beta \phi \in S(\mathbb{R}^n)$ para todo β multi-índice. Pela demonstração da Proposição 2.2, temos que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |x|^2)^m \phi(x)\} < \infty$,

logo existe um $C_{n,\beta} > 0$ tal que $|x^\beta(|x|^2+1)^{n+1}\phi(x)| \leq C_{n,\beta}$, o que implica que
$$\left|\frac{x^\beta(|x|^2+1)^{n+1}}{(|x|^2+1)^{n+1}}\phi(x)\right| \leq \frac{C_{n,\beta}}{(|x|^2+1)^{n+1}}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$
Defina $\tilde{x} \doteq x + e_j t$, para $t \in \mathbb{R}$. Aplicando a definição da derivada direcional em $\hat{\phi}$ na direção de e_j e o Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_j}\hat{\phi}(\xi) &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tilde{x}.\xi}\phi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\phi(x)\,dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e^{-i\tilde{x}.\xi} - e^{-ix.\xi})}{t}\phi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}.(-ix_j)\phi(x)\,dx \\
&= (-i)^{|e_j|}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}.x^{e_j}\phi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Operando novamente de maneira indutiva podemos concluir que

$$\partial^\beta\widehat{\phi}(\xi) = (-i)^{|\beta|}\int_\Omega e^{-ix.\xi}x^\beta\phi(x)\,dx.$$

Ao dividirmos por $(-i)^{|\beta|}$ encontramos

$$D^\beta\widehat{\phi}(\xi) = (-1)^{|\beta|}\widehat{x^\beta\phi}(\xi).$$

Portanto $\widehat{x^\beta\phi}(\xi) = (-1)^{|\beta|}D^\beta\hat{\phi}(\xi)$.

Seguindo a demonstração do Teorema, observe que $\mathcal{F}$ é linear e que, pelas igualdades anteriores, encontramos

$$\xi^\alpha D^\beta\widehat{\phi}(\xi) = \xi^\alpha(-1)^{|\beta}\widehat{x^\beta\phi}(\xi) = (-1)^{|\beta|}\widehat{D^\alpha(x^\beta\phi)}(\xi).$$

O que implica que

$$|\xi^\alpha D^\beta\widehat{\phi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n}|e^{-ix.\xi}D^\alpha(x^\beta\phi(x))|dx = C_{\alpha,\beta},$$

no qual $C_{\alpha,\beta}$ é uma constante, visto que $D^\alpha(x^\beta\phi) \in S(\mathbb{R}^n)$. Portanto $\mathcal{F}(S(\mathbb{R}^n)) \in S(\mathbb{R}^n)$, de modo que $\mathcal{F}$ está bem definido. Para mostrarmos agora que $\mathcal{F}$ é contínuo, tome $\{\phi_j\}_j \subset S(\mathbb{R}^n)$ uma sequência que converge a zero em $S(\mathbb{R}^n)$. Logo, para quaisquer α e β multi-índices temos que

$$
\begin{aligned}
|\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}_j(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^\beta \phi_j(x))| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(|x|^2+1)^{n+1} D^\alpha(x^\beta \phi_j(x))}{(|x|^2+1)^{n+1}} \right| dx \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(|x|^2+1)^{n+1} D^\alpha(x^\beta \phi_j(x))| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|^2+1)^{n+1}} dx \\
&= \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\substack{\gamma\leq\beta+2(n+1)\\ \nu\leq\alpha}} C_{\gamma,\nu}\, x^\gamma D^\nu \phi_j(x) \right|}_{(a)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|^2+1)^{n+1}}\, dx}_{(b)} .
\end{aligned}
$$

(a) Observe que este somatório é finito, logo

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\substack{\gamma\leq\beta+2(n+1)\\ \nu\leq\alpha}} C_{\gamma,\nu}\, x^\gamma D^\nu \phi_j(x) \right| = \sum_{\substack{\gamma\leq\beta+2(n+1)\\ \nu\leq\alpha}} C_{\gamma,\nu} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\gamma D^\nu \phi_j(x)| < \infty
$$

pois $\phi_j \in S(\mathbb{R}^n)$.

(b) Tal integral é finita pela demonstração da Proposição 2.2. Aqui tomamos $mp = n+1$. Note que m satisfaz a condição $m > \dfrac{n}{2p}$ necessária da demonstração.

Pela definição de convergência em $S(\mathbb{R}^n)$, temos que $x^\gamma D^\nu \phi_j(x) \longrightarrow 0$, logo $|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\phi_j}(\xi)| \longrightarrow 0$, ou ainda, $\mathcal{F}(\phi_k) \longrightarrow 0$, finalizando assim nossa demonstração. ∎

Exemplo 2.3. Seja $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}}$. Observe que a função ϕ definida acima é solução do seguinte PVI:

$$
\begin{cases} \varphi'(x) + x\varphi(x) = 0; \\ \varphi(0) = 1. \end{cases}
$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação acima, constatamos que

$$
\widehat{\varphi'}(x) + \widehat{x\varphi}(x) = \widehat{0} \Rightarrow i\xi\widehat{\varphi}(\xi) + D\widehat{\varphi}(x) = 0 \Rightarrow i\xi\widehat{\varphi} - \frac{1}{i}\widehat{\varphi}'(x) = 0.
$$

Dividindo a expressão por i e resolvendo a EDO temos que $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^c$ e que $\widehat{\varphi}(0) = e^c$, ou ainda, $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \widehat{\varphi}(0)$. Defina por praticidade $\tilde{c} \doteq e^c$. Por outro lado,

$$\tilde{c} = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Generalizemos tal resultado para nossa ϕ definida em $\mathbb{R}^n$. Observe que, pela definição da Transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{j=1}^{n} e^{-ix_j.\xi_j} e^{-\frac{x_j^2}{2}} \right] dx \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j.\xi_j} e^{-\frac{x_j^2}{2}}\, dx_j \right] \\
&= \prod_{j=1}^{n} \widehat{e^{-\frac{x_j^2}{2}}}(\xi_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi_j^2}{2}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \mapsto S(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$ com $\xi \in \mathbb{R}^n$. Então $\mathcal{F}$ é continuamente inversível e*

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \widehat{\phi}(\xi) d\xi, \qquad \textit{para toda } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Consideremos $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ e a função $\psi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Pelo Exemplo 2.3 sabemos que $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, defina $\psi_\varepsilon(x) \doteq \psi(\varepsilon x)$. Para calcularmos $\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)$ considere a seguinte mudança de variável: $\varepsilon x = y$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) &= \int e^{-x.\xi} \psi(\varepsilon x)\, dx = \int e^{-\frac{y}{\varepsilon}.\xi} \psi(y) \frac{1}{\varepsilon^n}\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\int e^{-y.\frac{\xi}{\varepsilon}} \psi(y)\, dy \right) = \frac{1}{\varepsilon^n} \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\frac{\xi}{\varepsilon}|^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)$. Com isto podemos inverter a ordem de integração nas integrais abaixo para escrever

$$\begin{aligned}
\int \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix.\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi &= \int \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix.\xi}\, d\xi \left(\int e^{-iy.\xi}\phi(y)dy\right)\\
&= \int \phi(y)\int \psi_\varepsilon(\xi)e^{-i(y-x).\xi}\, d\xi\, dy\\
&= \int \phi(y)\widehat{\psi_\varepsilon}(y-x)dy\\
&= e^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \phi(y)\psi(\frac{y-x}{\varepsilon})\, dy.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = \dfrac{y-x}{\varepsilon}$, vemos que

$$\int \psi_\varepsilon(\xi)e^{ix.\xi}\widehat{\phi}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \phi(x+\varepsilon z)\psi(z)dz.$$

Justifiquemos agora o uso posterior do Teorema da Convergência Dominada, para isso defina $f_\varepsilon(z) = \psi(z)\phi(x+\varepsilon z)$. Note que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(z) = \psi(z)\phi(x) \text{ , para todo } z \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, como $\phi \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ então existe $M > 0$ tal que $\|\phi\|_{L^\infty} \leq M$. Assim,

$$|f_\varepsilon(z)| = |\psi(z)\phi(x+\varepsilon z)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}|\psi(z)| \leq Me^{\frac{-|z|^2}{2}} \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \phi(x+\varepsilon z)\psi(z)dz &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \phi(x)\psi(z)dz\\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi(x)\int \psi(z)dz\\
&= (2\pi)^n\phi(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(\xi) = 1.$$

Assim, concluímos que

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix.\xi}\widehat{\phi}(\xi)d\xi,$$

uma vez que $\int \psi(z)dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$. A continuidade de $\mathcal{F}^{-1}$ é análoga a de $\mathcal{F}$.

■

Teorema 2.3. *Sejam $\varphi, \phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Então*

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\varphi(x)\, dx.$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\bar{\phi}(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\bar{\widehat{\phi}}(x)\, dx.$

c) $\widehat{\varphi * \phi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\phi}(\xi).$

d) $\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = (2\pi)^n \check{\varphi}(\xi).$

e) $\widehat{\varphi\phi}(\xi) = (2\pi)^{-n}(\widehat{\varphi} * \widehat{\phi})(\xi).$

f) $\widehat{\check{\phi}}(\xi) = \check{\widehat{\phi}}(\xi).$

Demonstração. a) Basta trocarmos a ordem de integração:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\phi(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x)dx \right) \phi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\phi(\xi)d\xi \right) \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{\phi}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

b) Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$ e tome $\widehat{\varphi} = \bar{f}$, note que $\varphi = \mathcal{F}^{-1}(\bar{f})$, assim para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\overline{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\overline{f}(x)dx \tag{2.4}$$

$$= (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\overline{f})(\xi) = (2\pi)^n \varphi(\xi). \tag{2.5}$$

Pela fórmula acima temos que $\widehat{\overline{\widehat{f}}}(\xi) = (2\pi)^n \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^n \overline{f}(\xi)$. Pela igualdade anterior e pelo item **a)**

$$\begin{aligned}
(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\phi}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{f}}(x)\overline{\phi}(x)\, dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\phi(x)\, dx} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\phi}(x)\, dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f}(x)\, \overline{\widehat{\phi}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\phi}}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\phi}(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\phi}}(x)\, dx.$$

c) Note que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}(\varphi * \psi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x-y)dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)e^{-iy.\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y).\xi}\varphi(x-y)dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)e^{-iy.\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz.\xi}\varphi(z)dz\right)dy = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

Como ξ era arbitrário, concluímos que $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$.

d) Pela equação 2.4, temos que

$$(2\pi)^n\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(-x).\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \widehat{\widehat{\varphi}}(-x).$$

Por questão de notação, defina $y = -x$, então $\widehat{\widehat{\varphi}}(y) = (2\pi)^n\varphi(-y) = (2\pi)^n\check{\varphi}(y)$. Como x era arbitrário (e consequentemente y também), concluímos que $\widehat{\widehat{\varphi}} = (2\pi)^n\check{\varphi}$.

e) Observamos que, pela fórmula de inversão basta mostrarmos que $\widehat{\widehat{\varphi\psi}} = (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}}$, o que é evidente em razão de **c)** e **d)**.

f) Por fim, considere a seguinte mudança de variável $z = -x$

$$\begin{aligned}
\widehat{\check{\phi}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\check{\phi}(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\phi(-x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz.(-\xi)}\phi(z)\ dz \\
&= \widehat{\phi}(-\xi) = \check{\widehat{\phi}}(\xi).
\end{aligned}$$

■

2.2 Transformada de Fourier em $S'(\Omega)$.

Definição 2.5 (Distribuição temperada). *Dizemos que $u : S(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada se u é um funcional linear e contínuo em $S(\Omega)$, isto é*

(i) Sejam $\phi_1, \phi_2 \in S(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então $< u, \phi_1 + \lambda\ \phi_2 > = < u, \phi_1 > +\lambda\ < u, \phi_2 >$.

(ii) Seja $\{\phi_j\}_j \subset S(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$, então $< u, \phi_j > \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Denotamos por $S'(\Omega)$ o conjunto das distribuições temperadas.

Observação 2.5. Como vimos na Proposição 2.2 $C_c^\infty(\Omega) \subset S(\Omega)$, logo $S'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. De fato, seja $u \in S'(\Omega)$, então u é um funcional linear e contínuo em $S(\Omega)$, em particular ao restringirmos em $C_c^\infty(\Omega)$

$$u\Big|_{C_c^\infty} : C_c^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$$

é linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$, pois a convergência em $C_c^\infty(\Omega)$ implica na convergência em $S(\Omega)$, como visto na Observação 2.2 e portanto pertence a $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Proposição 2.3. *Seja $f \in S(\Omega)$ e defina $T_f : S(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ o funcional dado por*

$$< T_f, \phi >= \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx, \text{ para toda } \phi \in S(\Omega).$$

Então $T_f \in S'(\Omega)$.

Demonstração. Antes de mostrarmos que T_f é uma distribuição temperada note primeiramente que toda função que pertence a $S(\Omega)$ é limitada, bem como suas derivadas de qualquer ordem. De fato, seja $\phi \in S(\Omega)$ então $\sup_{x\in\Omega}|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty$ para todo α e β multi-índices. Em particular para $\alpha = \beta = \vec{0}$ temos que $\sup_{x\in\Omega}|\phi(x)| < \infty$. Note agora que T_f está bem definida, pois

$$
\begin{aligned}
| < T_f, \phi > | &= \left| \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x)||\phi(x)|\, dx \\
&\leq \sup_{x\in\Omega} |\phi(x)| \int_\Omega |f(x)|\, dx \\
&\leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_\Omega |f(x)|\, dx \\
&\leq M,
\end{aligned}
$$

visto que $\phi, f \in S(\Omega)$ então pela Proposição 2.2 $\phi \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^1(\Omega)$.

A linearidade de T_f é provada diretamente pela linearidade da integral. Para mostrarmos a continuidade suponha $\{\phi_j\}_j \subset S(\Omega)$ tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$ e defina $\psi_j(x) \doteq f(x).\phi_j(x)$, para todo $x \in \Omega$. Como as derivadas de f são limitadas, aplicando a Regra de Leibniz de maneira análoga a demonstração do Teorema 1.11 obtemos

$$
\begin{aligned}
|x^\alpha \partial^\beta \psi_j(x)| &= |x^\alpha \partial^\beta (f.\phi_j)(x)| \\
&\leq \left| x^\alpha \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \tilde{C}_{\beta,\gamma,f} |\partial^\gamma \phi_j(x)| \right| \\
&\leq \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \tilde{C}_{\beta,\gamma,f}\, |x^\alpha \partial^\gamma \phi_j(x)| \longrightarrow 0 \text{ uniformemente,}
\end{aligned}
$$

pois é uma soma finita. Logo, pelo Teorema do Confronto $\psi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$. Por fim, como ψ_j converge (pontualmente) a zero e é limitada, pois

$$
|\psi_j(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |\phi_j(x)||f(x)| = M|f(x)| \doteq g(x),
$$

então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$
\int_\Omega \psi_j(x) dx \longrightarrow 0,
$$

demonstrando assim a continuidade. ∎

Observação 2.6. Pela proposição anterior, podemos concluir (passando pela associação de T_f) que $S(\Omega) \subset S'(\Omega)$.

Teorema 2.4. *Seja u um funcional linear em $S(\Omega)$. As duas condições são equivalentes* *(i) u é contínuo.*

(ii) Existem constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$| < u, \phi > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi(x)|, \text{ para toda } \phi \in S(\Omega). \quad (2.6)$$

Demonstração. Suponha que a estimativa 2.6 seja verdadeira e seja $\{\phi_j\}_j \in S(\Omega)$ sequência tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$. Pela demonstração da Proposição 2.2 vimos que $\sup_{x \in \Omega} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi_j(x)| < \infty$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi_j(x)| < \infty,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, visto que é um somatório finito. Como $\phi_j \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$ então $|(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi_j(x)| \longrightarrow 0$, o que implica

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi_j(x)| \longrightarrow 0$$

e portanto $| < u, \phi_j > | \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$, demonstrando assim a continuidade de u.

Suponha agora que a estimativa 2.6 seja falsa quaisquer constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Em outras palavras para cada C, m existe $\phi \in S(\Omega)$ tal que

$$| < u, \phi > | > C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi(x)|.$$

Queremos mostrar que u não é um funcional contínuo em $S(\Omega)$, para isso tome $C = m = n$, então existe uma função $\phi_n \in S(\Omega)$ tal que

$$r_n \doteq | < u, \phi_n > | > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \Omega} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha \phi_n(x)|.$$

Note que $r_n > 0$. Prosseguindo, defina $\psi_n = \dfrac{\phi_n}{r_n}$ e observe que $\psi_n \longrightarrow 0$ em $S(\Omega)$. Por outro lado, $| < u, \psi_n > | = |r_n^{-1} < u, \phi_n > | = 1$, o que contradiz a continuidade de u. ∎

Proposição 2.4. *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e defina $T_f : S(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ o funcional dado por*

$$< T_f, \phi > = \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx, \text{ para toda } \phi \in S(\Omega).$$

Então $T_f \in S'(\Omega)$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração nos três seguintes casos e mostraremos que T_f está bem definida em cada caso:

(i) $1 < p < \infty$.
Seja q o expoente conjugado de p, ou seja, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Defina m o primeiro natural tal que $m > \frac{n}{q}$, observe que

$$\begin{aligned} |< T_f, \phi >| &= \left| \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \right| \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\phi(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \text{ (pela Desigualdade de Holder)} \\ &= \|f\|_{L^p} \cdot \left(\int_\Omega \frac{|(1+|x|^2)^m \phi(x)|^q}{(1+|x|^2)^{mq}}\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \cdot \sup_{x\in\Omega} |(1+|x|^2)^m \phi(x)| \left(\int_\Omega \frac{1}{(1+|x|^2)^{mq}}\, dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \end{aligned}$$

pela demonstração da Proposição 2.2.

(ii) $p = \infty$.
Como $f \in L^\infty$ então $\|f\|_{L^\infty} < \infty$. Logo,

$$\begin{aligned} |< T_f, \phi >| &= \left| \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \int_\Omega \frac{|(1+|x|^2)^m \phi(x)|}{(1+|x|^2)^m}\, dx \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \sup_{x\in\Omega} |(1+|x|^2)^m \phi(x)| \int_\Omega \frac{1}{(1+|x|^2)^m}\, dx < \infty \end{aligned}$$

(iii) $p = 1$.
Como $f \in L^1$ então $\int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty$. Logo,

$$\begin{aligned} |< T_f, \phi >| &= \left| \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \right| \\ &\leq \sup_{x\in\Omega} |\phi(x)|. \int_\Omega |f(x)|\, dx \\ &= M\, \|f\|_{L^1} < \infty \end{aligned}$$

A linearidade de T_f é provada diretamente pela linearidade da integral e a continuidade é provada aplicando o Teorema 2.4 em cada estimativa encontrada nos três casos. ■

Observação 2.7. Pelo teorema anterior podemos dizer (passando pela associação de T_f) que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ e que $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.6. *Seja $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, a Transformada de Fourier de u, indicada por $\hat{u}$, é definida por*

$$< \hat{u}, \phi > \; \doteq \; < u, \hat{\phi} >, \textit{ para toda } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Note que a *Transformada de Fourier* de uma distribuição temperada está bem definida e também é uma distribuição temperada.

Exemplo 2.4. Seja $\delta : S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ a distribuição temperada Delta de Dirac, note que para cada $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} < \widehat{\delta}, \phi > \; &\doteq \; < \delta, \widehat{\phi} >= \widehat{\phi}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \\ &= \; < 1, \phi > . \end{aligned}$$

Portanto $\widehat{\delta} = 1$.

Proposição 2.5. *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ em distribuição temperada.*

Demonstração. Pela definição da *Transformada de Fourier* de uma distribuição temperada e pelo item **a)** do Teorema 2.3 temos que para cada $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} < \widehat{T_f}, \phi > \; &= \; < T_f, \widehat{\phi} >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\phi}(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\phi(x) \, dx =< T_{\widehat{f}}, \phi > . \end{aligned}$$

Portanto $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$. ■

Proposição 2.6. *Seja $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{\check{u}} = \check{\widehat{u}}$.*

Demonstração. De fato, para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned} < \widehat{\check{u}}, \phi > \; &= \; < \check{u}, \widehat{\phi} > = < u, \check{\widehat{\phi}} > \\ &= \; < u, \widehat{\check{\phi}} > = < \widehat{u}, \check{\phi} > \\ &= \; < \check{\widehat{u}}, \phi > . \end{aligned}$$

No qual a terceira igualdade é justificada pelo item **f** do Teorema 2.3. Portanto $\widehat{\check{u}} = \check{\widehat{u}}$. ■

Teorema 2.5 (Teorema de Plancherel)**.** *Seja* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*, então* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $\|f\|_{L^2}^2 = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2$.

Demonstração. Como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então tome $\{\phi_n\}_n \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \longrightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right|^2 (x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right) \left(\overline{\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}}\right) (x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right) \left(\overline{\widehat{\phi_j}} - \overline{\widehat{\phi_k}}\right) (x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{\phi_j}.\overline{\widehat{\phi_j}} - \widehat{\phi_j}\overline{\widehat{\phi_k}} - \overline{\widehat{\phi_j}}\widehat{\phi_k} + \widehat{\phi_k}\overline{\widehat{\phi_k}}\right) (x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\phi_j}\right|^2 (x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_j}\overline{\widehat{\phi_k}}(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{\phi_j}}\widehat{\phi_k}(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\phi_k}\right|^2 (x)\, dx
\end{aligned}$$

Aplicando o item **b)** do Teorema 2.3 em cada integral temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{\phi_j}.\overline{\widehat{\phi_j}} - \widehat{\phi_j}\overline{\widehat{\phi_k}} - \overline{\widehat{\phi_j}}\widehat{\phi_k} + \widehat{\phi_k}\overline{\widehat{\phi_k}}\right) (x)\, dx \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\phi_j.\overline{\phi_j} - \phi_j\overline{\phi_k} - \overline{\phi_j}\phi_k + \phi_k\overline{\phi_k}\right) (x)\, dx \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_j - \phi_k|^2 (x)\, dx \\
&= (2\pi)^n \|\phi_j - \phi_k\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Como $\{\phi_n\}_n$ é uma sequência convergente em $L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\{\phi_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_j - \phi_k\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{(2\pi)^n}}, \text{ para todo } j, k \geq n_0.$$

Logo, para todo $j, k \geq n_0$ temos que

$$\left\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right\|_{L^2}^2 < (2\pi)^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{(2\pi)^n}}\right)^2 = \varepsilon^2.$$

Como $\|\cdot\|_{L^2} \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ então

$$\left\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi_k}\right\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \text{para todo } j, k \geq n_0.$$

Portanto $\{\widehat{\phi_n}\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo então existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\phi_n} \longrightarrow g$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
< \widehat{T_f}, \psi > &\doteq < T_f, \widehat{\psi} > = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\psi}(x)\, dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x)\widehat{\psi}(x)\, dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_j}(x)\psi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\psi(x)\, dx =< T_g, \psi > .
\end{aligned}$$

Note que a terceira igualdade é justificada pela densidade e a penúltima igualdade é justificada pela convergência em L^2 implicar na convergência em distribuição. De fato, como $\left\|\widehat{\phi_j} - g\right\|_{L^2} \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$ então pela Desigualdade de Holder para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
< T_{\widehat{\phi_j}-g}, \psi > &= \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\phi_j} - g)(x)\psi(x)\, dx \\
&\leq \left\|\widehat{\phi_j} - g\right\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{T_f} = T_g$, ou ainda, $\widehat{f} = g$-q.t.p., o que implica que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Por fim,

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(x)\right|^2\, dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\phi_j}(x)\right|^2\, dx \\
&= \lim_{j\to\infty} (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_j(x)|^2\, dx \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = (2\pi)^n \|f\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.6.

(i) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada $\widehat{f}$ de f coincide com a transformada em distribuição temperada, isto é, $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

(ii) Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{u}$ é uma função que pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e será dada por

$$\widehat{u}(\xi) = < u_x, e^{-ix.\xi} > .$$

Demonstração. (i) Como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$ então tome $\{\phi_j\}_j \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \longrightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, mostremos que $\widehat{\phi_j} \longrightarrow \widehat{f}$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \left(f(x) - \phi_j(x)\right) \, dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ix.\xi} \left(f(x) - \phi_j(x)\right)\right| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \phi_j(x)| \, dx \\
&= \|f - \phi_j\|_{L^1} .
\end{aligned}$$

Como $\|f - \phi_j\|_{L^1} \longrightarrow 0$ então $\widehat{\phi_j} \longrightarrow \widehat{f}$ - q.t.p. Além disso, para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ temos que $\widehat{\phi_j}\psi \longrightarrow \widehat{f}\psi$ - q.t.p. Justifiquemos o uso do Teorema da Convergência Dominada para concluirmos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_j}(x)\psi(x) \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\psi(x) \, dx.$$

Isto é, devemos exibir uma $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\left|\widehat{\phi_j}(x)\psi(x)\right| \leq g(x)$ - q.t.p. e para todo $j \in \mathbb{N}$. Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\phi_j}(x)\psi(x)\right| &= \left|\widehat{\phi_j}(x)\right| |\psi(x)| \\
&\leq \left(\left|\widehat{\phi_j}(x) - \widehat{f}(x)\right| + \left|\widehat{f}(x)\right|\right) |\psi(x)| \\
&\leq \left(\|f - \phi_j\|_{L^1} + \left|\widehat{f}(x)\right|\right) |\psi(x)| .
\end{aligned}$$

Como $\|f - \phi_j\|_{L^1} \longrightarrow 0$ então existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|f - \phi_j\|_{L^1} \leq M$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Defina

$$g(x) \doteq \left(M + \left|\widehat{f}(x)\right|\right) |\psi(x)| .$$

Resta mostrarmos que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pela Equação 2.1 observada logo após a definição da Transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ temos que $\widehat{f}$ é limitada, ou ainda, existe uma constante $\tilde{M} \geq 0$ tal que $\left|\widehat{f}(x)\right| \leq \tilde{M}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para facilitar a notação defina a constante $C \doteq M + \tilde{M}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(M + \left|\widehat{f}(x)\right| \right) |\psi(x)| \right| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |C \, |\psi(x)|| \, dx \\
&= C. \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \, dx < \infty,
\end{aligned}$$

pois $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ e $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, após demonstrarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_j}(x)\psi(x) \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\psi(x) \, dx,$$

temos que para cada $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
< \widehat{T_f}, \psi > &= < T_f, \widehat{\psi} >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\psi}(x) \, dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x)\widehat{\psi}(x) \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_j}(x)\psi(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\psi(x) \, dx =< T_{\widehat{f}}, \psi > .
\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

(ii) Tome ϕ, ϕ_ε como no Teorema 1.14 e defina $u_\varepsilon \doteq u * \phi_\varepsilon$, note que $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $S'(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{u_\varepsilon} \longrightarrow \widehat{u}$. De fato, fixe $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{\psi} \in S(\mathbb{R}^n)$. Como $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $S'(\mathbb{R}^n)$ então em particular

$$< u_\varepsilon, \widehat{\psi} > \longrightarrow < u, \widehat{\psi} > .$$

Logo, pela definição

$$< \widehat{u_\varepsilon}, \psi > \longrightarrow < \widehat{u}, \psi > .$$

Por fim, como ψ é arbitrária então $\widehat{u_\varepsilon} \longrightarrow \widehat{u}$. Suponha agora que $u \in C^\infty$, então a convolução de uma distribuição com uma função coincide com a convolução de duas funções, logo

$$\begin{aligned}
\widehat{u_\varepsilon}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\, u_\varepsilon(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}(u * \phi_\varepsilon)(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\phi_\varepsilon(x-y)\, dy\right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\phi_\varepsilon(x-y)\, dx\right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}e^{-iy.\xi}e^{iy.\xi}\phi_\varepsilon(x-y)\, dx\right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-iy.\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y).\xi}\phi_\varepsilon(x-y)\, dx\right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-iy.\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tilde{x}.\xi}\phi_\varepsilon(\tilde{x})\, d\tilde{x}\right] dy \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tilde{x}.\xi}\phi_\varepsilon(\tilde{x})\, d\tilde{x}\right] \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-iy.\xi}\, dy \\
&= \widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-iy.\xi}\, dy \\
&= \widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) < u_y, e^{-iy.\xi} > \\
&= \widehat{\phi}(\varepsilon\xi) < u_y, e^{-iy.\xi} > .
\end{aligned}$$

Note que a última igualdade é verdadeira pois utilizando a mudança de variável $\dfrac{x}{\varepsilon} = y$ temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\, \phi_\varepsilon(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\, \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy.(\varepsilon\xi)}\, \phi(y)\, dy \\
&= \widehat{\phi}(\varepsilon\xi).
\end{aligned}$$

Consideremos agora o caso geral: $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Como $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, então pelo primeiro item deste teorema temos que a transformada de u_ε como função coincide com a transformada de u_ε como uma distribuição, logo

$$
\begin{aligned}
\widehat{u_\varepsilon}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} u_\varepsilon(x)\, dx \\
&= < T_{u_\varepsilon}, e^{-ix.\xi} > \\
&= T_{u_\varepsilon} * (e^{-ix.\xi})\check{}\,(0) \\
&= u_\varepsilon * (e^{-ix.\xi})\check{}\,(0) \qquad\qquad \text{(pela Observação 1.9)} \\
&\doteq (u * \phi_\varepsilon) * (e^{-ix.\xi})\check{}\,(0) \\
&= u * [\phi_\varepsilon * (e^{-ix.\xi})\check{}\,]\,(0) \\
&= < u, [\phi_\varepsilon * (e^{-ix.\xi})\check{}\,]\check{}\; > \\
&= \widehat{\phi}(\varepsilon\xi) < u, e^{-iy.\xi} > .
\end{aligned}
$$

Observe que $\mathrm{supp}(T_{u_\varepsilon}) = \mathrm{supp}(u_\varepsilon) \subseteq K$, com K compacto, então $T_{u_\varepsilon} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos que $e^{-ix.\xi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, logo o terceiro termo está bem definido. Para justificarmos a última igualdade considere a seguinte mudança de variável: $-y - z = w$. Assim,

$$
\begin{aligned}
[\phi_\varepsilon * (e^{-ix.\xi})\check{}\,]\check{}\,(y) &= [\phi_\varepsilon * (e^{-ix.\xi})\check{}\,]\,(-y) \\
&= (\phi_\varepsilon * e^{ix.\xi})\,(-y) \\
&= (e^{ix.\xi} * \phi_\varepsilon)\,(-y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz.\xi} \phi_\varepsilon(-y-z)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(-w-y).\xi} \phi_\varepsilon(w)\, dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w+y).\xi} \phi_\varepsilon(w)\, dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw.\xi} e^{-iy.\xi} \phi_\varepsilon(w)\, dw \\
&= e^{-iy.\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw.\xi} \phi_\varepsilon(w)\, dw \\
&= e^{-iy.\xi}\, \widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) \\
&= e^{-iy.\xi}\, \widehat{\phi}(\varepsilon\xi).
\end{aligned}
$$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$ então $\widehat{\phi}(\varepsilon\xi) \longrightarrow 1$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
|\widehat{\phi}(\varepsilon\xi) - 1| &= |\widehat{\phi}(\varepsilon\xi) - \widehat{\phi}(0)| \\
&\leq \varepsilon|\xi| \left| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \triangledown\widehat{\phi}(x) \right| \\
&\leq \left\| \triangledown\widehat{\phi} \right\|_{L^\infty} \varepsilon|\xi| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

para cada $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Portanto

$$\begin{aligned}
\widehat{u_\varepsilon}(\xi) &\longrightarrow \widehat{u}(\xi) \text{ em } S'(\mathbb{R}^n) \\
\widehat{u_\varepsilon}(\xi) &\longrightarrow \; < u_y, e^{-iy.\xi} > \text{ em } C^\infty(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Pela unicidade do limite concluímos que

$$\widehat{u}(\xi) = < u_y, e^{-iy.\xi} > .$$

■

A seguir veremos um exemplo no qual tentaremos calcular explicitamente a Transformada de Fourier da distribuição temperada T_H que não pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2.5. Seja $T_H \in S'(\mathbb{R})$ a distribuição temperada de Heaviside e defina $u_\varepsilon(x) = H(x)e^{-\varepsilon x}$. Note que $H \notin L^1(\mathbb{R})$, por outro lado $u_\varepsilon \in L^1$ e $u_\varepsilon \longrightarrow T_H(x)$ em $S'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\widehat{u_\varepsilon}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u_\varepsilon(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} H(x) e^{-\varepsilon x}\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-ix\xi} e^{-\varepsilon x}\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x(\varepsilon+i\xi)}\, dx \\
&= \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-x(\varepsilon+i\xi)}}{\varepsilon+i\xi}\Bigg|_0^M \\
&= -\frac{1}{\varepsilon+i\xi} \lim_{M\to\infty} \left[e^{-M(\varepsilon+i\xi)} - e^{-0(\varepsilon+i\xi)} \right] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon+i\xi} \lim_{M\to\infty} \left[e^{-M(\varepsilon+i\xi)} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon+i\xi} \\
&= \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} - i\frac{\xi}{\varepsilon^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Defina $g_\varepsilon(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$. Observe que $g_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ e que

(i) Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dx = 1$. De fato, seja $\varepsilon > 0$, então

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}\, dx \\
&= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^2+\xi^2}\, dx \\
&= \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon^2+\xi^2}\, dx \\
&= \frac{2\varepsilon}{\pi}\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{\varepsilon}\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_0^M\right] \\
&= \frac{2\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon}\lim_{M\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{0}{\varepsilon}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\lim_{M\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) - \arctan(0)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\lim_{M\to\infty}\arctan\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

(ii) Para cada $a > 0$ fixo, $\displaystyle\int_{|x|>a} g_\varepsilon(x)\, dx \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>a} g_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{|x|>a} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}\, dx \\
&= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{|x|>a} \frac{1}{\varepsilon^2+\xi^2}\, dx \\
&= \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_a^\infty \frac{1}{\varepsilon^2+\xi^2}\, dx \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_a^\infty \frac{1}{\xi^2}\, dx \\
&= \frac{2\varepsilon}{\pi}\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{M}+\frac{1}{a}\right] \\
&= \frac{2\varepsilon}{\pi}\frac{1}{a} = \frac{2\varepsilon}{\pi a}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>a} g_\varepsilon(x)\,dx\right] \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi a}\,\varepsilon = 0.$$

Pela Proposição 1.9 temos que $g_\varepsilon \longrightarrow \delta$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ou ainda

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} \longrightarrow \pi\delta \text{ em } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Mostremos agora que

$$\frac{\xi}{\varepsilon^2+\xi^2} \longrightarrow \text{p.v.}\frac{1}{\xi} \text{ em } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

De fato, defina $f_\varepsilon(\xi) = \dfrac{\xi}{\varepsilon^2+\xi^2}$. Para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} < T_{f_\varepsilon}, \phi > &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\phi(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\phi(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n-0}\frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\phi(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to 0}\int_{B(0,R)^c}\frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\phi(x)\,dx \\
&= \lim_{R\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(0,R)^c}\frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\phi(x)\,dx \\
&= \lim_{R\to 0}\int_{B(0,R)^c}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x}{\varepsilon^2+x^2}\phi(x)\,dx \qquad \text{(pelo T.C.D.)} \\
&= \lim_{R\to 0}\int_{B(0,R)^c}\frac{\phi(x)}{x}\,dx \\
&\doteq \text{p.v.}\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Por fim, pela unicidade do limite podemos concluir que

$$\widehat{T_H} = \pi\delta - i\text{p.v.}\frac{1}{x}.$$

Observação 2.8. Podemos utilizar o resultado anterior para calcular a Transformada de Fourier das distribuições δ e $\text{p.v.}\frac{1}{x}$. Pela Proposição 2.6 temos que

$$\widehat{\check{T}_H} = \pi\delta + i\text{p.v.}\frac{1}{x}.$$

Além disso, sabemos que $\check{T_H} = T_{\check{H}}$. Note agora que

$$\begin{aligned}
\widehat{T_1} &= \widehat{T_{H+\check{H}}} = \widehat{T_H + T_{\check{H}}} = \widehat{T_H} + \widehat{T_{\check{H}}} \\
&= \pi\delta - i.\text{p.v.}\frac{1}{x} + \pi\delta + i.\text{p.v.}\frac{1}{x} \\
&= 2\pi\delta.
\end{aligned}$$

Pelo item **d** do Teorema 2.3 temos que

$$\widehat{\delta} = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{T_1}} = \frac{1}{2\pi}2\pi\check{T_1} = T_1.$$

Portanto, assim como no Exemplo 2.4 concluímos que $\widehat{\delta} = 1$. Continuando, defina a função sinal $sn(x) \doteq H(x) - H(-x)$, observe que $\check{sn} = -sn$. Assim,

$$\begin{aligned}
\widehat{T_{sn}} &= \widehat{T_{H-\check{H}}} = \widehat{T_H - T_{\check{H}}} = \widehat{T_H} - \widehat{T_{\check{H}}} \\
&= \pi\delta - i.\text{p.v.}\frac{1}{x} - \pi\delta - i.\text{p.v.}\frac{1}{x} \\
&= -2i.\text{p.v.}\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Utilizando novamente item **d** do Teorema 2.3 temos que

$$\widehat{\text{p.v.}\frac{1}{\xi}} = \frac{i}{2}\widehat{\widehat{T_{sn}}} = \frac{i}{2}2\pi\check{T_{sn}} = i\pi T_{-sn} = -i\pi T_{sn}.$$

Portanto concluímos que $\widehat{\text{p.v.}\frac{1}{x}} = -i\pi sn$.

2.3 Transformada Parcial de Fourier

Considere $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. Se para cada $K \subset \Omega$ compacto

$$\int_K \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(t,x)|\, dx \right)\, dt < \infty.$$

então pelo Teorema de Fubini temos que f é integrável em x para quase todo $t \in \Omega$. Logo podemos definir a Transformada de Fourier de f na variável x como a seguir.

Definição 2.7. *Suponha f como anteriormente, defina a Transformada Parcial de Fourier em relação a variável x como*

$$\tilde{f}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix.\xi} f(t,x)\, dx, \text{ para quase todo } t \in \Omega.$$

Podemos também utilizar a notação $\tilde{f} = \tilde{f}_x$, no qual enfatiza a Transformada Parcial de Fourier sendo aplicada na variável x.

Observação 2.9. Pela definição acima note que $\tilde{f}$ é contínua na variável ξ para quase todo $t \in \Omega$, além disso temos que $\tilde{f} \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. De fato, seja $K_1 \times K_2$ um subconjunto compacto de $\Omega \times \mathbb{R}^m$, no qual $K_1 \subset \Omega$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos compactos, então

$$
\begin{aligned}
\int_{K_1}\left(\int_{K_2}|\tilde{f}(t,\xi)|\,d\xi\right)dt &= \int_{K_1}\left(\int_{K_2}\left|\int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix.\xi} f(t,x)dx\right| d\xi\right) dt \\
&\leq \int_{K_1}\left(\int_{K_2}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |e^{-ix.\xi} f(t,x)|dx\right) d\xi\right) dt \\
&\leq \int_{K_1}\left(\int_{K_2}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(t,x)|dx\right) d\xi\right) dt \\
&= \int_{K_2}\left(\int_{K_1}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(t,x)|dx\right) dt\right) d\xi \\
&= \left(\int_{K_1}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(t,x)|dx\right) dt\right) m(K_2) < \infty.
\end{aligned}
$$

Definição 2.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ a função projeção dada por $\pi_1(t,x) = t$ e*

$$S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \;/ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} |(t,x)^\alpha\, \partial^\beta_{(t,x)}\, \phi(t,x)| < \infty\}.$$

Então definimos

$$C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m)) = \{\phi \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)\;, \pi_1(\mathrm{supp}(\phi)) \text{ é compacto em } \Omega\}.$$

Definição 2.9. *Seja $\{\phi_j\}_j$ uma sequência em $C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$, dizemos que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$ se*

(i) $\phi_j \longrightarrow 0$ *em* $S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(ii) Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\pi_j(\mathrm{supp}(\phi_j)) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Ou ainda, $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset K \times \mathbb{R}^m$.

Definição 2.10. *De maneira análoga a primeira definição de Transformada Parcial de Fourier, seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$, então definimos sua Transformada Parcial como*

$$\widehat{\psi_x}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix.\xi}\psi(t,x)dx.$$

Teorema 2.7. *A Transformada Parcial de Fourier é um operador contínuo e inversível em $C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$ e para quaisquer $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$ e α, β multi-índices valem as seguintes fórmulas* *(i)* $\widehat{D_x^\alpha\,\psi}(t,\xi) = \xi^\alpha \widehat{\psi_x}(t,\xi)$.

(ii) $\widehat{x^\alpha\,\psi}(t,\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\psi}(t,\xi)$.

(iii) $D_t^\beta \widehat{\psi}(t,\xi) = \widehat{D_t^\beta \psi}(t,\xi)$.

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m}\int_\Omega \widehat{\phi}(t,\xi)\psi(t,\xi)\;dt\;d\xi = \int_{\mathbb{R}^m}\int_\Omega \widehat{\psi}(t,\xi)\phi(t,\xi)\;dt\;d\xi.$

Demonstração. Seja $\mathcal{F} : C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m)) \mapsto C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$ o operador dado por $\mathcal{F}(\psi)(t,\xi) = \widehat{\psi_x}(t,\xi)$. Fixando a variável t podemos demonstrar de maneira análoga ao Teorema 2.1 que $\mathcal{F}$ está bem definido e é contínuo. Além disso, o operador inverso será dado por

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\xi}\phi(t,\xi)\;d\xi.$$

Ou ainda,

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi})(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\xi}\widehat{\psi}(t,\xi)\;d\xi = \psi(t,x).$$

A demonstração dos itens **(i)** e **(ii)** segue também do Teorema 2.1 nas variáveis x. Para demonstrarmos o terceiro item suponha $|\beta| = 1$, note que

$$\begin{aligned}
\partial_{t_j}\widehat{\psi} &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi}\psi(\tilde{t},x)\;dx - \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi}\psi(t,x)\;dx}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi}\frac{\psi(\tilde{t},x)-\psi(t,x)}{h}\;dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi}\lim_{h\to 0}\frac{\psi(\tilde{t},x)-\psi(t,x)}{h}\;dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi}\partial_{t_j}\psi(t,x)\;dx,
\end{aligned}$$

no qual $\tilde{t} \doteq t + e_j h$. O caso geral decorre por indução. Por fim, para cada $t \in \Omega$ fixo temos pelo Teorema 2.3 que

$$\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\phi}(t,\xi)\psi(t,\xi)\;d\xi = \int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\psi}(t,\xi)\phi(t,\xi)\;d\xi.$$

Integrando em relação a variável t obtemos

$$\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\phi}(t,\xi)\psi(t,\xi)\;d\xi\;dt = \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\psi}(t,\xi)\phi(t,\xi)\;d\xi\;dt.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\Omega}\widehat{\phi}(t,\xi)\psi(t,\xi)\;dt\;d\xi=\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\Omega}\widehat{\psi}(t,\xi)\phi(t,\xi)\;dt\;d\xi.$$

■

Definição 2.11. *Seja $u : C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m)) \mapsto \mathbb{C}$ um funcional linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$, então dizemos que u é uma distribuição temperada em $x \in \mathbb{R}^m$. Além disso, o espaço das distribuições temperadas em x é denotado por $\mathscr{D}'(\Omega; S'(\mathbb{R}^m))$.*

Definição 2.12. *Seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega; S'(\mathbb{R}^m))$, definimos a Transformada Parcial de Fourier de uma distribuição temperada em x por*

$$<\tilde{u},\phi> \;\doteq\; <u,\widehat{\phi}>, \qquad \text{para toda } \phi\in C_c^\infty(\Omega,S(\mathbb{R}^m)).$$

Exemplo 2.6. Considere $\Omega = \mathbb{R}$, $m = 1$ e defina $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R})) \mapsto \mathbb{C}$ a distribuição temperada em x Delta de Dirac, então

$$<\tilde{\delta},\phi>=<\delta,\widehat{\phi}>=\widehat{\phi}(0,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(0,x)dx.$$

Observe que esta distribuição atua como δ na variável t e na segunda variável atua como a função 1. Assim, podemos denotar $\tilde{\delta} = \delta(t)$. Além disso, note que $\operatorname{supp}(\delta) = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Por fim, de maneira análoga vemos que a Transformada Parcial de Fourier para $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^m)) \mapsto \mathbb{C}$ é dada por

$$<\tilde{\delta},\phi>=<\delta,\widehat{\phi}>=\widehat{\phi}(0,\mathbf{0})=\int_{\mathbb{R}^m}\phi(0,x)dx,$$

no qual $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

Proposição 2.7. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\Omega; S'(\mathbb{R}^m))$ e α, β multi-índices, então*

(i) $\widetilde{D_x^\alpha u} = \xi^\alpha \tilde{u}$.

(ii) $\widetilde{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{u}$.

(iii) $D_t^\beta \widetilde{u} = \widetilde{D_t^\beta u}$.

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$, pelo Teorema 2.7 temos que

(i)

$$\begin{aligned}
< \widetilde{D_x^\alpha\, u}, \phi > &= < D_x^\alpha\, u, \widehat{\phi} > \\
&= (-1)^\alpha < u, D_x^\alpha\, \widehat{\phi} > \\
&= < u, (-1)^\alpha D_x^\alpha\, \widehat{\phi} > \\
&= < u, (-1)^\alpha D_x^\alpha\, \widehat{\phi}(t,\xi) > \\
&= < u, \widehat{x^\alpha \phi}(t,\xi) > \\
&= < \widetilde{u}, x^\alpha(t,\xi)\phi(t,\xi) > \\
&= < \widetilde{u}, \xi^\alpha \phi(t,\xi) > \\
&= < \xi^\alpha \widetilde{u}, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{D_x^\alpha\, u} = \xi^\alpha \tilde{u}$.

(ii)

$$\begin{aligned}
< (-1)^\alpha\, D_x^\alpha\, \widetilde{u}, \phi > &= < D_x^\alpha\, \widetilde{u}\ ,\ (-1)^\alpha\, \phi > \\
&= (-1)^\alpha < \widetilde{u}\ , D_x^\alpha (-1)^\alpha \phi > \\
&= < \widetilde{u}\ , (-1)^\alpha\, D_x^\alpha (-1)^\alpha \phi > \\
&= < \widetilde{u}\ , (-1)^{2\alpha}\, D_x^\alpha\, \phi > \\
&= < \widetilde{u}\ , D_x^\alpha\, \phi > \\
&= < u, \widehat{D_x^\alpha\, \phi} > \\
&= < u, \xi^\alpha \widehat{\phi} > \\
&= < u, x^\alpha(t,\xi)\widehat{\phi}(t,\xi) > \\
&= < x^\alpha u, \widehat{\phi} > \\
&= < \widetilde{x^\alpha u}, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{x^\alpha\, u} = (-1)^{|\alpha|}\, D_x^\alpha\, \widetilde{u}$.

(iii)

$$\begin{aligned}
< \widetilde{D_t^\beta u}, \phi > &= < D_t^\beta u, \widehat{\phi} > \\
&= (-1)^\beta < u, D_t^\beta \widehat{\phi} > \\
&= (-1)^\beta < u, \widehat{D_t^\beta \phi} > \\
&= (-1)^\beta < \tilde{u}, D_t^\beta \phi > \\
&= < D_t^\beta \tilde{u}, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto $D_t^\beta \widetilde{u} = \widetilde{D_t^\beta u}$.

∎

Proposição 2.8. *Seja* $f \in C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$ *e* $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega; S'(\mathbb{R}^m))$ *a distribuição temperada associada a* f *então* $\widetilde{T_f} = T_{\widehat{f}}$

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega, S(\mathbb{R}^m))$, então

$$\begin{aligned}
< \widetilde{T_f}, \phi > &= < T_f, \widehat{\phi} > \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega f(t,x)\widehat{\phi}(t,x)\, dt\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega \widehat{f}(t,x)\phi(t,x)\, dt\, dx \quad \text{(pelo Teorema 2.7)} \\
&= < T_{\widehat{f}}, \phi > .
\end{aligned}$$

∎

Capítulo 3

Solução Fundamental

Antes de apresentarmos o conceito em soluções fundamentais vamos ilustrar uma motivação. Considere a função $H_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$H_c(x) = \begin{cases} 1, & x > c, \\ 0, & x \leq c. \end{cases}$$

Lembremos que para $c = 0$ temos a função de Heaviside e que $T'_H = \delta$. Além disso, de maneira análoga ao Exemplo 1.19 podemos mostrar que $T'_{H_c} = \delta_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Motivação: Dado $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, podemos exibir $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{du}{dx} = f$ em distribuição? Para responder a pergunta acima, defina $u \doteq E * f$, no qual E é uma distribuição, suponha que

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(E * f)}{dx} = \frac{dE}{dx} * f = \delta * f = f.$$

Assim, u seria solução da nossa equação e bastaríamos encontrar uma distribuição E tal que $\dfrac{dE}{dx} = \delta$, simplificando nosso problema reduzindo para algo que não depende mais de f. Chamamos a distribuição E de solução fundamental para a equação $\dfrac{du}{dx} = f$ e neste caso sabemos que $E = T_H$ satisfaz nosso problema, visto que $\dfrac{dT_H}{dx} = \delta$.

Definição 3.1. *Seja $a_\alpha : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, no qual $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ e $0 \in \Omega$. Considere o operador*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é uma solução fundamental para o operador $P(x, D)$ quando $P(x, D)E = \delta$.

Observação 3.1. Em particular considere $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, com $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e suponha que $E \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é uma solução fundamental para o operador $P(x, D)$.

(i) Seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, existe $w \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tal que $P(D)w = u$?

Defina $w \doteq E * u$. Observe que w está bem definido e pertence a $\mathscr{D}'(\Omega)$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
P(D)w &= P(D)[E * u] = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha [E * u] \\
&= [P(D)E] * u = \delta * u = u.
\end{aligned}
$$

(ii) Seja $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, quais condições são necessárias para que possamos exibir um funcional u tal que $P(D)u = f$?

Observe que a princípio $u \doteq E * f$ não está bem definido, pois $E, f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Suponha que exista $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tal que $P(D)u = f$. Neste caso observe que $\text{supp}(u) \subset K$, com K compacto. Logo,

$$
\text{supp}(f) = \text{supp}(P(D)u) \subset \text{supp}(u) \subset K.
$$

Portanto $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Logo a condição para que $u = E * f$ esteja bem definido é u pertencer a $\mathscr{E}'(\Omega)$. Por fim, de maneira análoga ao item anterior concluímos que $P(D)u = f$.

Teorema 3.1 (Teorema de Existência e Unicidade de Solução de EDO's de primeira ordem)**.** *Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região retangular no plano xy que contenha o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em R, então existem um intervalo aberto I que contém x_0 e uma única função $y \in C^1(I)$ tal que y é solução do problema de valor inicial a seguir*

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\
y(x_0) = y_0.
\end{cases}
$$

Teorema 3.2 (Teorema de Existência e Unicidade de Solução de EDO's lineares de ordem superior)**.** *Sejam $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ e g funções contínuas em um intervalo I que contém x_0, com $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então* *existe uma única função $y \in C^n(I)$ tal que y é solução do seguinte problema de valor inicial, neste intervalo*

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \\ y(x_0) = y_{00}, \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_{01}, \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{0(n-1)}. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. Considere $P(x,D) = \dfrac{d}{dx} + a(x)$, no qual $a \in C^\infty(I)$. Dado $c \in I$, existe $E \in \mathscr{D}'(I)$ tal que $P(x,D)E = \delta_c$?

Primeiramente, considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} P(x,D)f = 0, \\ f(c) = 1. \end{cases}$$

Observe que pelo Teorema 3.1 existe uma função f contínua em uma vizinhança de c tal que f é solução do PVI. Defina $E \doteq fu$, no qual $u \in \mathscr{D}'(I)$. Qual u devemos tomar para que E seja solução fundamental deste problema, ou ainda, $P(x,D)E = \delta_c$? Note que

$$\begin{aligned} P(x,D)E &= P(x,D)(fu) = \left[\frac{d}{dx} + a(x)\right](fu) \\ &= \frac{df}{dx}u + f\frac{du}{dx} + a(x)fu \\ &= \left[\frac{df}{dx} + a(x)f\right]u + f\frac{du}{dx} \\ &= [P(x,D)f]\,u + f\frac{du}{dx} = f\frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Como $f(c) \neq 0$ então existe uma vizinhança V_c de c tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in V_c$. Logo,

$$f\frac{du}{dx} = \delta_c \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{f}\delta_c.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{f}\delta_c = \frac{1}{f(c)}\delta_c = \delta_c.$$

De fato, para cada $\phi \in C_c^\infty(I)$ temos que

$$\begin{aligned} < g\delta_c, \phi > &= < \delta_c, g\phi >= g(c)\phi(c) \\ &= g(c) < \delta_c, \phi >=< g(c)\delta_c, \phi > . \end{aligned}$$

Portanto basta encontrarmos $u \in \mathscr{D}'(I)$ tal que $\dfrac{du}{dx} = \delta_c$. Como visto no início deste capítulo, $\dfrac{dT_{H_c}}{dx} = \delta_c$, logo tomamos $u = T_{H_c}$.

A seguir veremos que o exemplo anterior é um caso particular do operador

$$P(x, D) = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$$

e que a Solução Fundamental encontrada anteriormente nos ajuda a definir uma Solução Fundamental para o caso geral.

Exemplo 3.2. Considere o operador

$$P(x, D) = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j},$$

no qual $a_j \in C^\infty(I)$ para todo $j = 0, 1, ..., m-1$. Dado $c \in I$, existe $E \in \mathscr{D}'(I)$ tal que $P(x, D)E = \delta_c$?

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} P(x, D)f = 0; \\ f^{(j)}(c) = 0, \qquad j = 0, 1, ..., m-2; \\ f^{(m-1)}(c) = 1. \end{cases}$$

Observe novamente que pelo Teorema 3.2 existe uma função f solução do PVI. Defina $E \doteq fu$, no qual $u = T_{H_c}$. Mostremos que E é uma solução fundamental deste problema, ou ainda, $P(x, D)E = \delta_c$. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} P(x, D)E &= \left[\frac{d^m}{dx^m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j} \right] (fT_{H_c}) \\ &= \frac{d^m}{dx^m}[fT_{H_c}] + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j}[fT_{H_c}]. \end{aligned}$$

Por outro lado, mostremos por indução que

$$\frac{d^j}{dx^j}[fT_{H_c}] = f^{(j)}T_{H_c}, \quad j = 1, ..., m-1.$$

De fato, para $j=1$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[fT_{H_c}] &= \frac{df}{dx}T_{H_c} + f\frac{d}{dx}T_{H_c} \\
&= f'T_{H_c} + f\delta_c \\
&= f'T_{H_c} + f(c)\delta_c \\
&= f'T_{H_c} + 0\delta_c = f'T_{H_c}.
\end{aligned}$$

Suponha agora que a identidade seja verdadeira para algum $j \in \{1, ..., m-2\}$, mostremos que é válida para $j+1$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}[fT_{H_c}] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^j}{dx^j}[fT_{H_c}]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[f^{(j)}T_{H_c}\right] \\
&= f^{(j+1)}T_{H_c} + f^{(j)}\frac{d}{dx}T_{H_c} \\
&= f^{(j+1)}T_{H_c} + f^{(j)}\delta_c \\
&= f^{(j+1)}T_{H_c} + f^{(j)}(c)\delta_c \\
&= f^{(j+1)}T_{H_c} + 0\delta_c = f^{(j+1)}T_{H_c}.
\end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}[fT_{H_c}] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[fT_{H_c}]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[f^{(m-1)}T_{H_c}\right] \\
&= f^{(m)}T_{H_c} + f^{(m-1)}\frac{d}{dx}T_{H_c} \\
&= f^{(m)}T_{H_c} + f^{(m-1)}\delta_c \\
&= f^{(m)}T_{H_c} + f^{(m-1)}(c)\delta_c \\
&= f^{(m)}T_{H_c} + \delta_c.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P(x,D)E &= \frac{d^m}{dx^m}[fT_{H_c}] + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x)\frac{d^j}{dx^j}[fT_{H_c}] \\
&= f^{(m)}T_{H_c} + \delta_c + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x)f^{(j)}T_{H_c} \\
&= [P(x,D)f]\,T_{H_c} + \delta_c \\
&= 0T_{H_c} + \delta_c = \delta_c.
\end{aligned}$$

Portanto $E = fT_{H_c}$ é uma solução fundamental deste problema.

Nas próximas seções estudaremos a solução fundamental de três importantes operadores: Calor, Onda e Laplaciano. O método utilizado para encontrar essas soluções fundamentais é inspirado nos exemplos anteriores, ou seja, definiremos uma distribuição $u \doteq fT_H$, no qual f é a solução de um PVI conveniente para cada operador. Nossas soluções fundamentais então serão encontradas ao manipularmos esta distribuição u.

3.1 Solução Fundamental do operador de calor

Considere $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos o operador de calor em $\mathbb{R}^{n+1}$ como

$$P(t,x,D) = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x,$$

no qual $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 = i^2 \sum_{i=1}^{n} D^{2e_i} = -\sum_{i=1}^{n} D^{2e_i}$.

Definição 3.2. *Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^n))$ é uma Solução Fundamental para o operador de calor quando $P(t,x,D)E = \delta$.*

Aqui δ é a função delta de Dirac $\delta_{(0,0)}$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e iremos omitir a notação por simplicidade. A notação $\mathscr{D}'(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^n))$ denota o conjunto dos funcionais lineares contínuos de $C_c^\infty(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^n))$ formado pelas funções $\varphi(t,x)$ tal que para cada t_0 fixo temos $\varphi(t_0,x) \in S(\mathbb{R}^n)$ e para cada x fixo temos $\varphi(t,x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Seja E uma Solução Fundamental para o operador de calor, logo

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \sum_{j=1}^{n} D^{2e_j} E = \delta.$$

Aplicando a Transformada Parcial de Fourier em relação a variável x temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}E + \sum_{j=1}^{n} D^{2e_j} E = \delta \quad &\Leftrightarrow \quad \widetilde{\frac{\partial}{\partial t}E} + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{D^{2e_j} E} = \widetilde{\delta} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E} + \sum_{j=1}^{n} \xi^{2e_j} \widetilde{E} = \widetilde{\delta} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E} + |\xi|^2 \widetilde{E} = \widetilde{\delta}, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

no qual a segunda equivalência é garantida pela Proposição 2.7. Observe que

$$\langle \widetilde{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widetilde{\varphi} \rangle = \widetilde{\varphi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x)dx,$$

uma vez que

$$\widetilde{\varphi}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(t,x)dx.$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f + |\xi|^2 f(t, \xi) = 0; \\ f(0, \xi) = 1. \end{cases}$$

Observe que $f(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t}$ é solução para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f + |\xi|^2 f &= \frac{\partial}{\partial t} e^{-|\xi|^2 t} + |\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t} \\ &= -|\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t} + |\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t} = 0, \end{aligned}$$

e $f(0, \xi) = e^{-0|\xi|^2} = 1$. Mostremos que $\widetilde{E}(t, \xi) := f(t, \xi) T_H(t)$ satisfaz a Equação 3.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E} + |\xi|^2 \widetilde{E} &= \frac{\partial}{\partial t} [f T_H] + |\xi|^2 f T_H \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} f \right] T_H + f \left[\frac{\partial}{\partial t} T_H \right] + |\xi|^2 f T_H \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} f + |\xi|^2 f \right] T_H + f \left[\frac{\partial}{\partial t} T_H \right] \\ &= 0 T_H + f \left[\frac{\partial}{\partial t} T_H \right] \\ &= f \widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}. \end{aligned}$$

Justifiquemos a penúltima igualdade, isto é, $\dfrac{\partial}{\partial t} T_H = \widetilde{\delta}$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^n))$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^n))$, note que $supp(\phi) \subseteq K \times \mathbb{R}^n$, com $K = [-M, M]$ para algum $M > 0$, então

$$
\begin{aligned}
< \frac{\partial}{\partial t} T_H, \phi > &= - < T_H, \frac{\partial}{\partial t}\phi > \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} H(t)\, \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\; dt\; dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\; dt \right] dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{M} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\; dt \right] dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \left[\phi(M,x) - \phi(0,x) \right] dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} -\phi(0,x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(0,x) dx \\
&= < \widetilde{\delta}, \phi > \quad \text{(pelo Exemplo 2.6).}
\end{aligned}
$$

Portanto $\dfrac{\partial}{\partial t} T_H = \widetilde{\delta}$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^n))$. Justifiquemos agora a última igualdade, isto é, $f\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^n))$. Seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^n))$, então

$$
\begin{aligned}
< f\widetilde{\delta}, \phi > &= < \widetilde{\delta}, f\phi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(0,x)\phi(0,x)\; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1.\phi(0,x)\; dx \\
&= < \widetilde{\delta}, \phi > .
\end{aligned}
$$

Assim, vimos que $\widetilde{E}(t,\xi) = f(t,\xi) T_H(t)$, porém nosso interesse é encontrar a solução fundamental E. Para isso, note que $\widetilde{E} = f T_H = T_{fH}$. De fato, seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^n))$, então

$$
\begin{aligned}
< f T_H, \phi > &= < T_H, f\phi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} H(t) f(t,x) \phi(t,x)\; dt\; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} f(t,x) H(t) \phi(t,x)\; dt\; dx \\
&= < T_{fH}, \phi > .
\end{aligned}
$$

Além disso, como

$$\widetilde{E}(t,\xi) = \begin{cases} e^{-|\xi|^2 t}, & \text{se } t > 0; \\ 0, & \text{se } t \leq 0; \end{cases}$$

então para cada $t > 0$ fixo temos que $\widetilde{E}(t,\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ logo podemos aplicar a inversa da transformada de Fourier e assim

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} e^{-|\xi|^2 t} \, d\xi \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_j \xi_j} e^{-\xi_j^2 t} \, d\xi_j. \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte mudança de variável: $\xi_j = \dfrac{s}{\sqrt{2t}}$ ficamos com

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_j \frac{s}{\sqrt{2t}}} \, e^{-\frac{s^2}{2}} \, \frac{1}{\sqrt{2t}} \, ds \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{2t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{ix_j}{\sqrt{2t}} s} \, e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{2t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{-x_j}{\sqrt{2t}} s} \, e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Exemplo 2.3 temos que se $\phi(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$ então $\widehat{\phi}(r) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}$. Logo

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{2t}} \, \widehat{\phi}\left(\frac{-x_j}{\sqrt{2t}}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{2t}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando $t \leq 0$ temos que $E(t,x) = 0$. Note que a continuidade função $E(t,x)$ é mantida em $(0,x)$ para $x \neq 0$, visto que

$$\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow 0.$$

Finalmente, podemos concluir que uma Solução Fundamental para o Operador de Calor $E(t,x)$ é dada por

$$E(t,x) = H(t)\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

Claramente quando $t \neq 0$ temos que $E(t,x)$ é uma funçao suave e além disso $E(t,x)$ e todas suas derivadas convergem a zero quando $(t,x) \longrightarrow (0,x)$ para $x \neq 0$. Dessa forma concluímos que $E(t,x)$ é suave fora da origem. As seguintes propriedades são v́lidas para $E(t,x)$;

(i) $E(t,x) \geq 0$;

(ii) para cada $t > 0$ temos $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1$;

(iii) $\int_{|x|>a} E(t,x)dx \longrightarrow 0$ se $t \longrightarrow 0^+$ e $a > 0$ fixo.

Pela Proposição 1.9 temos que $E(t,x) \longrightarrow \delta_x$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0^+$. Com isso provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$ então a equação*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n; \\ u(0,x) = f(x); \end{cases}$$

é dada por $u(t,x) = E(t,x) * f(x)$ suave em $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Obs.: a conclusão do teorema ainda é válida se assumirmos $f(x)$ contínua satisfazendo $|f(x)| \leq Ae^{B|x|}$ e nesse caso $u(t,x) = E(t,x) * f(x)$ é diferenciável em $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

3.2 Solução Fundamental do operador de onda

A seguir apresentaremos o operador de onda e utilizaremos um método análogo ao anterior para encontrarmos uma solução fundamental.

Consideremos o operador de onda em $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$P(t,x,D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} D^{2e_i}.$$

Definição 3.3. *Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}; S'(\mathbb{R}^n))$ é uma solução Fundamental para o operador de onda quando $P(t,x,D)E = \delta$.*

Seja E uma Solução Fundamental para o operador de onda, logo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \sum_{j=1}^{n} D^{2e_j} E = \delta.$$

Aplicando a Transformada Parcial de Fourier em relação a variável x temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \sum_{j=1}^{n} D^{2e_j} E = \delta \quad &\Leftrightarrow \quad \widetilde{\frac{\partial^2}{\partial t^2} E} + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{D^{2e_j} E} = \widetilde{\delta} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widetilde{E} + \sum_{j=1}^{n} \xi^{2e_j} \widetilde{E} = \widetilde{\delta} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widetilde{E} + |\xi|^2 \widetilde{E} = \widetilde{\delta}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Consideremos agora o seguinte PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} f + |\xi|^2 f = 0; \\ \\ f(0,\xi) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial t} f(0,\xi) = 1. \end{cases}$$

Encontremos uma solução f da forma $f(t,\xi) = c(\xi)e^{\lambda t}$. Para isso note que

$$\lambda^2 + |\xi|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm |\xi| i.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
f(t,\xi) &= c_1(\xi)e^{i|\xi|t} + c_2(\xi)e^{-i|\xi|t} \\
&= c_1(\xi)\left[\cos(|\xi|t) + i\,\mathrm{sen}\,(|\xi|t)\right] \;+\; c_2(\xi)\left[\cos(-|\xi|t) + i\,\mathrm{sen}\,(-|\xi|t)\right] \\
&= c_1(\xi)\left[\cos(|\xi|t) + i\,\mathrm{sen}\,(|\xi|t)\right] \;+\; c_2(\xi)\left[\cos(|\xi|t) - i\,\mathrm{sen}\,(|\xi|t)\right] \\
&= \left[c_1(\xi) + c_2(\xi)\right]\cos(|\xi|t) + \left[c_1(\xi)i - c_2(\xi)i\right]\,\mathrm{sen}\,(|\xi|t) \\
&= \tilde{c_1}(\xi)\cos(|\xi|t) + \tilde{c_2}(\xi)\,\mathrm{sen}\,(|\xi|t).
\end{aligned}$$

Pela primeira condição inicial

$$f(0,\xi) = \tilde{c_1}(\xi)\cos(0) + \tilde{c_2}(\xi)\,\mathrm{sen}\,(0) = \tilde{c_1}(\xi) = 0.$$

Logo, $f(t,\xi) = \tilde{c_2}(\xi)\,\mathrm{sen}\,(|\xi|t)$. Aplicando a derivada parcial em relação a t temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,\xi) = \tilde{c_2}(\xi)|\xi|\cos(|\xi|t).$$

Pela segunda condição

$$\frac{\partial}{\partial t}f(0,\xi) = \tilde{c_2}(\xi)|\xi| = 1.$$

Assim, para $\xi \neq 0$ temos que $\tilde{c_2}(\xi) = \dfrac{1}{|\xi|}$ e portanto

$$f(t,\xi) = \frac{\mathrm{sen}\,(|\xi|t)}{|\xi|}.$$

Suponha agora que $\xi = 0$, então podemos apresentar nosso problema como

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,0) = 0; \\[2ex]
f(0,0) = 0; \\
\dfrac{\partial}{\partial t}f(0,0) = 1.
\end{cases}$$

Logo $f(t,0) = C_1t + C_2$, com C_1, C_2 constantes. Pelas condições iniciais temos que $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$. Portanto definiremos nossa f como

$$f(t,\xi) = \begin{cases}
\dfrac{\mathrm{sen}\,(|\xi|t)}{|\xi|}, \text{ se } \xi \neq 0; \\
t, \text{ se } \xi = 0;
\end{cases}$$

Observe que a continuidade da f em $\xi = 0$ é satisfeita, pois

$$\begin{aligned}
\lim_{|\xi|\to 0} f(t,\xi) &= \lim_{|\xi|\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|} \\
&= \lim_{|\xi|\to 0} t \frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|t} \\
&= t \lim_{|\xi|\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|\xi|t)}{|\xi|t} = t.
\end{aligned}$$

Mostremos que $\widetilde{E}(t,\xi) = f(t,\xi)T_{H(t)}$ satisfaz a Equação 3.2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{E} + |\xi|^2\widetilde{E} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}[fT_H] + |\xi|^2 fT_H \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)T_H + f\left(\frac{\partial}{\partial t}T_H\right)\right] + |\xi|^2 fT_H \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f\right)T_H + \left(2\frac{\partial}{\partial t}f\right)\frac{\partial}{\partial t}T_H + f\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_H\right) + |\xi|^2 fT_H \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}f + |\xi|^2 f\right]T_H + \left(2\frac{\partial}{\partial t}f\right)\frac{\partial}{\partial t}T_H + f\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_H\right) \\
&= 0\,T_H + \left(2\frac{\partial}{\partial t}f\right)\frac{\partial}{\partial t}T_H + f\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_H\right) \\
&= \left(2\frac{\partial}{\partial t}f\right)\widetilde{\delta} + f\left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\delta}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)\widetilde{\delta} + \frac{\partial}{\partial t}\left(f\widetilde{\delta}\right).
\end{aligned}$$

Afirmação 1: $\left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}$.

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^n))$, então

$$\begin{aligned}
< \left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)\widetilde{\delta}, \phi > &= < \widetilde{\delta}, \left(\frac{\partial}{\partial t}f\right)\phi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(0,x)\,\phi(0,x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1\phi(0,x)\,dx \\
&= < \widetilde{\delta}, \phi > .
\end{aligned}$$

Afirmação 2: $f\widetilde{\delta} = 0$.

De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^n))$, então

$$\begin{aligned} < f\widetilde{\delta}, \phi > &= < \widetilde{\delta}, f\phi > \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(0,x)\ \phi(0,x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 0\ \phi(0,x)\ dx \\ &= < 0, \phi > . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[fT_H \right] + |\xi|^2 fT_H &= \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right) \widetilde{\delta} + \frac{\partial}{\partial t}\left(f\widetilde{\delta} \right) \\ &= \widetilde{\delta} + \frac{\partial}{\partial t} 0 = \widetilde{\delta}. \end{aligned}$$

Dando continuidade, de maneira análoga a seção anterior temos

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} H(t) \frac{\text{sen}\,(|\xi| t)}{|\xi|}\ d\xi \\ &= \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \frac{\text{sen}\,(|\xi| t)}{|\xi|}\ d\xi. \end{aligned}$$

Portanto

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \frac{\text{sen}\,(|\xi| t)}{|\xi|}\ d\xi.$$

Observação 3.2. Note que para o operador de onda não conseguiremos uma fórmula explícita da função $E(t,x)$, mas para melhor compreensão podemos simplificar nosso problema tomando $n = 1$. Neste caso note que

$$\frac{\text{sen}\,(|\xi| t)}{|\xi|} = \frac{\text{sen}\,(\xi t)}{\xi}, \text{ para todo } \xi \neq 0.$$

Assim, para $t > 0$ temos que

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{\text{sen}\,(|\xi| t)}{|\xi|}\ d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{\text{sen}\,(\xi t)}{\xi}\ d\xi. \end{aligned}$$

Consideremos a seguinte mudança de variável: $\xi = \dfrac{s}{t}$, logo

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\frac{s}{t}} \frac{\text{sen}\,(s)}{s}\ ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x}{t}s} \frac{\text{sen}\,(s)}{s}\ ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} X_{[-1,1]}(x)$, então

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \, \frac{1}{2} \, X_{[-1,1]}(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} \, dx = \frac{1}{2} \, \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Bigg|_{-1}^{1} \quad = \quad \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi}.$$

Assim,

$$E(t,x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{x}{t} s} \frac{\operatorname{sen}(s)}{s} \, ds = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}) \left(\frac{x}{t} \right) = \varphi \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{2} \, X_{[-1,1]} \left(\frac{x}{t} \right).$$

Portanto

$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \, X_{[-1,1]} \left(\dfrac{x}{t} \right), \text{ se } t > 0; \\ \\ 0, \text{ se } t \leq 0, \end{cases}$$

equivalentemente

$$E(t,x) = \frac{1}{2} \, H(t) \, X_{[-1,1]} \left(\frac{x}{t} \right).$$

3.3 Solução Fundamental do operador de Laplace

Antes de apresentarmos o operador de Laplace e buscarmos uma solução fundamental relembremos algumas identidades que serão usadas posteriormente.

Sejam $\phi, \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\operatorname{div}(\phi \bigtriangledown \varphi - \varphi \bigtriangledown \phi) = \phi \bigtriangleup \varphi - \varphi \bigtriangleup \phi. \tag{3.3}$$

De fato, como

$$\bigtriangledown\varphi(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\right)$$

então

$$\phi \bigtriangledown \varphi(x) = \left(\phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x), ..., \phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\right).$$

De maneira análoga

$$\varphi \bigtriangledown \phi(x) = \left(\varphi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), \varphi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x), ..., \varphi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x)\right).$$

Assim

$$\begin{aligned}\phi \bigtriangledown \varphi(x) - \varphi \bigtriangledown \phi(x) &= \left(\phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) - \varphi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), \phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x) - \varphi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x),\right.\\ &\qquad \left. ...\,,\ \phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) - \varphi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x)\right).\end{aligned}$$

Defina $v(x) \doteq \phi \bigtriangledown \varphi(x) - \varphi \bigtriangledown \phi(x)$, calculemos a derivada da i-ésima entrada do vetor v em relação a variável x_i

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \varphi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)(x)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)(x)\\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) + \phi(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) - \varphi(x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}(x)\\ &= \phi(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x) - \varphi(x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}(x)\\ &= \left(\phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} - \varphi\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}\right)(x).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \right)(x) \\
&= \phi(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x) - \varphi(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x) \\
&= \phi(x) \bigtriangleup \varphi(x) - \varphi(x) \bigtriangleup \phi(x) \\
&= (\phi \bigtriangleup \varphi - \varphi \bigtriangleup \phi)(x).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que

$$\operatorname{div}(\phi \bigtriangledown \varphi - \varphi \bigtriangledown \phi) = \phi \bigtriangleup \varphi - \varphi \bigtriangleup \phi.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, definimos o operador de Laplace como

$$P(x, D) = \bigtriangleup_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Definição 3.4. *Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental para o operador de Laplace $P(x, D)$ quando $P(x, D)E = \delta$.*

Para facilitar a notação, utilizaremos inicialmente E para denotar uma função e posteriormente veremos como podemos associar a função E com uma distribuição. Defina $E(x) \doteq f(|x|)$, de tal forma que $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n - 0)$ e $P(x, D)E = 0$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, note que podemos escrever $E(x) = f(r)$, no qual $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r) \frac{2x_j}{2r} = f'(r) \frac{x_j}{r}. \tag{3.4}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} &= f''(r) \frac{x_j}{r} + f'(r) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{r} \right) \\
&= f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \left(\frac{1}{r} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \\
&= f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \left(\frac{1}{r} + x_j \frac{-x_j}{r^3} \right) \\
&= f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \\
&= f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{1}{r} - f'(r) \frac{x_j^2}{r^3}.
\end{aligned}$$

O que implica que

$$\begin{aligned}
P(x,D)E &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(f''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_j^2}{r^3} \right) \\
&= f''(r)\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r)\frac{n}{r} - f'(r)\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{r^3} \\
&= f''(r) + f'(r)\frac{n}{r} - f'(r)\frac{1}{r} \\
&= f''(r) + f'(r)\frac{n-1}{r} = 0.
\end{aligned}$$

Resolveremos então a seguinte EDO

$$y''(r) + \frac{n-1}{r}y'(r) = 0.$$

defina $v = y'$, então

$$v'(r) + \frac{n-1}{r}v(r) = 0.$$

Aplicando o Método das variáveis separáveis temos que $v(r) = cr^{-n+1}$ é solução para a EDO acima. Logo, $y' = cr^{-n+1}$, o que implica que

$$y(r) = \begin{cases} \dfrac{c}{-n+2}r^{-n+2} + b, \text{ se } n > 2; \\ \\ c\ln r + d, \text{ se } n = 2. \end{cases}$$

Isto é,

$$E(x) = \begin{cases} a|x|^{-n+2} + b, \text{ se } n > 2; \\ \\ c\ln|x| + d, \text{ se } n = 2. \end{cases}$$

Observe que $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Se $0 \notin K$ então E é contínua em K e portanto é localmente integrável em K. Suponha agora que $0 \in K$, então existe $R > 0$ tal que $K \subseteq B[0,R]$. Para facilitar as operações consideremos $b = d = 0$, utilizando coordenadas polares temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B[0,R]} \frac{a}{|x|^{n-2}} &= a\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_0^R \frac{1}{r^{n-2}}r^{n-1}\,dr\right] dw \\
&= a\,|\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^R r\,dr \\
&= \frac{aR^2}{2}\,|\mathbb{S}^{n-1}| < \infty, \text{ para todo } n > 2.
\end{aligned}$$

Além disso, para $n = 2$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B[0,R]} c \ln |x| dx &= c \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_0^R r \ln r \; dr \right] dw \\
&= c\, |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^R r \ln r \; dr \\
&= c\, |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^R r \ln r \; dr \\
&= c\, |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{r^2}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \Big|_\varepsilon^R \right] \\
&= c\, |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{R^2}{2} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\ln \varepsilon - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= c\, |\mathbb{S}^{n-1}| \left[\frac{R^2}{2} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\ln \varepsilon - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= c\, |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{R^2}{2} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, podemos associar E com a distribuição definida como

$$< E, \phi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} E(x) \phi(x) \; dx, \text{ para toda } \phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Estamos buscando uma distribuição $\tilde{E}$ tal que

$$< \triangle \tilde{E}, \phi >=< \delta, \phi >= \phi(0), \text{ para toda } \phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para isso, desenvolveremos primeiro a distribuição $\triangle E$. Seja $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, note que existe $R > 0$ tal que $\operatorname{supp} \phi \subseteq B[0, R]$, assim $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \phi) \subseteq B[0, R]$, para todo α multi-índice. Logo,

$$\begin{aligned}
< \triangle E, \phi > &= < \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}, \phi > \\
&= \sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}, \phi > \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{e_i} < \frac{\partial E}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} > \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2e_i} < E, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} > \\
&= \sum_{i=1}^{n} < E, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} > \\
&= < E, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} > \\
&= < E, \triangle \phi > \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} E(x) \triangle \phi(x)\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} E(x) \triangle \phi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Pela Identidade 3.3 temos que

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} E(x) \triangle \phi(x)\, dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \operatorname{div}(E \bigtriangledown \phi - \phi \bigtriangledown E)(x) + \phi(x) \triangle E(x)\, dx.$$

Mas, como $\triangle E(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ então

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} E(x) \triangle \phi(x)\, dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \operatorname{div}(E \bigtriangledown \phi - \phi \bigtriangledown E)(x)\, dx.$$

Pelo Teorema da Divergência temos que

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \operatorname{div}(E \bigtriangledown \phi - \phi \bigtriangledown E)(x)\, dx = \int_{\partial(\varepsilon \leq |x| \leq R)} [E(x) \bigtriangledown \phi(x) - \phi(x) \bigtriangledown E(x)] . \eta(x)\, d\sigma,$$

no qual η é o vetor normal unitário exterior à fronteira e $\partial(\varepsilon \leq |x| \leq R) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = \varepsilon \text{ ou } |x| = R\}$. Observe a ilustração abaixo dombola.png

Assim, podemos definir

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{r}, \text{ quando } |x| = R; \\ \\ \dfrac{-x}{r}, \text{ quando } |x| = \varepsilon. \end{cases}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} E(x) \triangle \phi(x)\, dx &= \int_{|x|=\varepsilon} \left[E(x) \bigtriangledown \phi(x) - \phi(x) \bigtriangledown E(x) \right] .\eta(x)\, d\sigma \\ &+ \int_{|x|=R} \left[E(x) \bigtriangledown \phi(x) - \phi(x) \bigtriangledown E(x) \right] .\eta(x)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Além disso, vimos anteriormente que ϕ e $\partial^\alpha \phi$ se anulam na fronteira do conjunto compacto que limita seus suportes. Caso contrário a continuidade não seria válida na fronteira e $\phi \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\phi(x) = \bigtriangledown\phi(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| = R$, o que implica

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} E(x) \triangle \phi(x)\, dx &= \int_{|x|=\varepsilon} \left[E(x) \bigtriangledown \phi(x) - \phi(x) \bigtriangledown E(x) \right] .\eta(x)\, d\sigma \\ &= \int_{|x|=\varepsilon} E(x) \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x) - \phi(x) \frac{\partial E}{\partial \eta}(x)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Consideremos agora a seguinte mudança de coordenadas: $x = \varepsilon w$, com $w \in \mathbb{S}^{n-1}$, então

$$\int_{|x|=\varepsilon} E(x) \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x) - \phi(x) \frac{\partial E}{\partial \eta}(x)\, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[E(\varepsilon w) \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w) - \phi(\varepsilon w) \frac{\partial E}{\partial \eta}(\varepsilon w) \right] \varepsilon^{n-1}\, dw.$$

Calculemos a derivada direcional de E em relação ao vetor η. Por 3.4 temos que $\dfrac{\partial E}{\partial x_j} = f'(r)\dfrac{x_j}{r}$, logo

$$\bigtriangledown E(x) = \left(f'(r)\frac{x_1}{r}, f'(r)\frac{x_2}{r}, ..., f'(r)\frac{x_n}{r}\right) = f'(r)\frac{x}{r}.$$

O que implica

$$\frac{\partial E}{\partial \eta}(x) = \bigtriangledown E(x).\eta(x) = f'(r)\frac{x}{r}.\eta(x).$$

Assim, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| = \varepsilon$ temos que $E(x) = f(|x|) = f(\varepsilon)$ e

$$\frac{\partial E}{\partial \eta}(x) = f'(r)\frac{x}{r}.\eta(x) = f'(r)\frac{x}{r}.\frac{-x}{r} = -f'(r) = -f'(\varepsilon).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[E(\varepsilon w)\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w) - \phi(\varepsilon w)\frac{\partial E}{\partial \eta}(\varepsilon w)\right] \varepsilon^{n-1}\, dw \\
= & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[f(\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w) + \phi(\varepsilon w) f'(\varepsilon)\right] \varepsilon^{n-1}\, dw \\
= & \; f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w)\, dw + f'(\varepsilon) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\varepsilon^{n-1}\, dw.
\end{aligned}$$

Retornando as igualdades anteriores vemos que

$$\begin{aligned}
< \triangle E, \phi > &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} E(x) \triangle \phi(x)\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w)\, dw + f'(\varepsilon) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\varepsilon^{n-1}\, dw\right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w)\, dw\right] + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[f'(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\, dw\right].
\end{aligned}$$

A seguir demonstraremos algumas afirmações que permitirão resolver os limites acima.

Afirmação 1: $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\varepsilon w)\, dw$ é limitada. De fato,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varepsilon w)\, dw\right| &\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varepsilon w)\right|\, dw \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla\phi(\varepsilon w).\eta(\varepsilon w)|\, dw \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla\phi(\varepsilon w)|\,|\eta(\varepsilon w)|\, dw \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla\phi(\varepsilon w)|\, dw \\
&\leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1\, dw \\
&= \|\nabla\phi\|_{L^\infty} |\mathbb{S}^{n-1}| < \infty.
\end{aligned}
$$

Afirmação 2: $f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. De fato,

$$
f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{c}{-n+2}\varepsilon^{-n+2}\varepsilon^{n-1} + b\varepsilon^{n-1}, \text{ se } n > 2; \\ \\ c\ln(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} + d\varepsilon^{n-1}, \text{ se } n = 2. \end{cases}
$$

Isto é,

$$
f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{c}{-n+2}\varepsilon + b\varepsilon^{n-1}, \text{ se } n > 2; \\ \\ c\ln(\varepsilon)\varepsilon + d\varepsilon, \text{ se } n = 2. \end{cases}
$$

Para $n > 2$ é direto que $f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, resta mostrarmos para $n = 2$.

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} ln(\varepsilon)\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{ln(\varepsilon)}{\varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\varepsilon = 0.
$$

Portanto $f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \longrightarrow 0$. Assim, pelas Afirmações 1 e 2 concluímos que

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(\varepsilon)\varepsilon^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varepsilon w)\, dw\right] = 0.
$$

Calculemos agora o segundo limite, para isso lembremos que $f'(r) = cr^{-n+1}$. Logo,

$$
f'(\varepsilon)\varepsilon^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\, dw = c\varepsilon^{-n+1}\varepsilon^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\, dw = c\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\, dw.
$$

Além disso, pelo T.C.D. temos que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\ dw \longrightarrow \phi(0)|\mathbb{S}^{n-1}|.$$

Portanto

$$< \triangle E, \phi >= \lim_{\varepsilon \to 0} f'(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi(\varepsilon w)\ dw = c|\mathbb{S}^{n-1}|\phi(0).$$

Finalmente, a fim de corrigirmos a constante acima consideremos $b = d = 0$ e definiremos $\widetilde{E}(x) := \dfrac{E(x)}{c|\mathbb{S}^{n-1}|}$. Em outras palavras,

$$\tilde{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{-n+2}}{(-n+2)|\mathbb{S}^{n-1}|}, \text{ se } n > 2; \\ \\ \dfrac{\ln|x|}{2\pi}, \text{ se } n = 2. \end{cases}$$

Concluímos que a função $\widetilde{E}$, associada a uma distribuição assim como associamos E é a solução fundamental do operador de Laplace.

Referências Bibliográficas

[1] Hounie, J. G., *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[2] Lima, E. L., *Curso de Análise Vol. 2*, IMPA, Rio de Janeiro (1981). 1.1.1, 1.1.2

[3] Folland, G., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, New York (1999). 1.1.1, 1.2, 1.2, 2.1

[4] Elias, T. F., *Uma nova caracterização dos espaços de Sobolev* $W^{1,p}(R^n)$, tese de mestrado (2018). https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/10178/Mestrado.pdf?sequence=3&isAllowed=y. 1.2