Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Ciências e
Letras de Ribeirão Preto

Funções Analíticas Complexas e Aplicações

Projeto de Iniciação Científica PICME/CNPq

Aluna: Muriel Andreane Dalcy.
Orientador: Tiago Henrique Picon.

Março de 2017

Sumário

Capítulo 1

O Conjunto dos Números Complexos

1.1 Introdução ao conjunto

O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, é identificado como o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das seguintes operações:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1.1}$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2). \tag{1.2}$$

A primeira coordenada representa a parte real do número complexo, enquanto a segunda coordenada representa sua parte imaginária. Denotaremos, daqui em diante, o número complexo (x, y) apenas por z. Suas partes real e imaginária serão denotas, respectivamente, como $x = \text{Re } z$ e $y = \text{Im } z$.

Por definição, a igualdade entre dois números complexos z_1 e z_2 ocorre quando

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ e } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \tag{1.3}$$

Identificando $x \in \mathbb{R}$ com o par ordenado $(x, 0)$, isto é $x \cong (x, 0)$, as operações 1.1 e 1.2 se reduzem, respectivamente, à soma e produto canônicos em $\mathbb{R}$, isto é

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Logo, as operações 1.1 e 1.2 podem ser entendidas como uma extensão das operações de soma e produto do conjunto dos números reais para o plano.

Por outro lado, se um número complexo tiver sua parte real nula, dizemos que este é um imaginário puro. Dentre estes imaginários puros, destaca-se o número $(0,1)$, denotado por i. Se realizarmos a operação i^2, teremos como resultado o valor real negativo -1, pois

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) \cong -1.$$

Da mesma forma, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e assim por diante.

Todo número complexo (x,y) pode ser decomposto como $(x,0)+(0,y)$. O produto do complexo i com um número real $(y,0)$ resulta em um número imaginário puro, ou seja, $(0,1)(y,0) = (0,y)$. Assim, vemos que um número complexo $z = (x,y)$ também pode ser decomposto como

$$z = (x,0) + (0,1)(y,0). \tag{1.4}$$

De acordo com a identificação vista anteriormente, podemos então escrever qualquer número complexo na forma

$$z = x + iy. \tag{1.5}$$

A representação anterior é chamada *forma cartesiana* de um número complexo. Para tal representação, a soma e o produto para quaisquer complexos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ serão dados por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.6}$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.7}$$

1.2 Propriedades algébricas

Veremos agora algumas propriedades algébricas do conjunto $(\mathbb{C},+)$ para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1. Associatividade: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

   Sejam $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3)$.

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x_1, y_2) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] \\ &= (x_1, y_2) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

2. Existência do elemento neutro.

   Este elemento será denotado por $(0,0)$, ou apenas identificado como o número 0. Pois, para todo $z = (x,y) \in \mathbb{C}$,

$$z + 0 = 0 + z = (x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y) = z.$$

3. Existência do elemento oposto.

   Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe w, denominado oposto aditivo, tal que

$$z + w = 0.$$

   Definimos w como o par $(-x,-y)$ e mostraremos que $(-1)z = w$.

   De fato, se identificarmos (-1) com o par $(-1,0)$, temos que

$$(-1)z \cong (-1,0)(x,y) = (-x,-y) = w.$$

4. Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

   Esta propriedade é facilmente observada escrevendo-se $z_1 = (x_1, y_2)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1,y_1) + (x_2,y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2,y_2) + (x_1,y_1) \\ &= z_1 + z_2. \end{aligned}$$

Com estas propriedades, concluímos que o conjunto $(\mathbb{C}, +)$ é um *grupo*. Mais ainda, como a comutatividade é válida, dizemos que este conjunto é um *grupo abeliano*.

Vejamos agora algumas propriedades para o produto entre números complexos.

1. Associatividade: $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$.

2. Distributividade: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ e $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

3. Existência do elemento neutro: Existe $e \in \mathbb{C}$ tal que $e.z = z.e = z$.

   O elemento neutro para o produto será o número $e = (1,0)$. Utilizando a forma cartesiana, vemos que para qualquer $(x,y) \in \mathbb{C}$, se $(x,y)(u,v) = (x,y)$, então $(u,v) = (1,0)$. De fato,

$$\begin{aligned} x + iy &= (x + iy)(u + iv) \\ &= xu + ixv + iuy - yv \\ &= x(u + iv) + iy(u + iv) \end{aligned}$$

Assim, pela definição de igualdade,

$$x(u + iv) = x \text{ e } y(u + iv) = y$$

Porém, como x é real, podemos utilizar a propriedade do cancelamento, o que nos deixa com

$$u + iv = 1,$$

ou seja, $u + iv \cong =(1, 0)$.

4. Comutatividade: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

   Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, então

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2) \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1, y_2 x_1 + x_2 y_1) \\ &= (x_2, y_2)(x_1, y_1) \\ &= z_2 z_1. \end{aligned}$$

   Desta forma, munido das operações de soma e produto, concluímos que o conjunto $(\mathbb{C}, +, .)$ é um *anel.* Mas como a comutatividade é também válida para o produto, este conjunto é um *anel abeliano.*

5. Para cada número complexo $z \neq 0$, existe um único $z^{-1} \neq 0$ tal que

$$zz^{-1} = 1,$$

   onde z^{-1} também pode ser representado por $\dfrac{1}{z}$. Isto pode ser observado escrevendo-se z em sua forma cartesiana.

$$z\left(\frac{1}{z}\right) = x+iy\left(\frac{1}{x+iy}\right) = x+iy\left(\frac{1}{x+iy}\right)\left(\frac{x-iy}{x-iy}\right) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

   Assim, podemos afirmar que para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ pode ser escrito como $z_1\left(\dfrac{1}{z_2}\right)$.

Enfim, provada a existência da inversa, podemos dizer que o conjunto dos números complexos, com as operações definidas de soma e produto, é um *corpo.*

Para ilustrar algumas das propriedades vistas, reduziremos alguns seguintes números complexos a valores reais.

Exemplo 1.2.1.

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i} &= \left(\frac{1+2i}{3-4i}\right)\left(\frac{3+4i}{3+4i}\right)+\left(\frac{2-i}{5i}\right)\left(\frac{-5i}{-5i}\right)\\ &= \frac{(1+2i)(3+4i)-5i(2-i)}{25}\\ &= \frac{-5+10i-10i-5}{25}\\ &= \frac{-2}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.2. $(1-i)^4$.

Primeiramente, reduzimos $(1-i)^2$.

$$(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = -2i.$$

Mas como $(1-i)^4 = (1-i)^2(1-i)^2$, então

$$(1-i)^4 = (-2i)(-2i) = -4.$$

1.3 Módulo

Todo número complexo z é representado como um par ordenado (x, y). Desta forma, cada número complexo $z = (x, y)$ pode ser representado como um vetor da origem $(0, 0)$ até o ponto (x, y) no *plano complexo*. À distância entre este ponto e a origem damos o nome de módulo.

A representação do plano complexo é semelhante à de $\mathbb{R}^2$, porém o eixo correspondente ao das abscissas é chamado eixo real, enquanto o correspondente ao das ordenadas é chamado eixo imaginário.

Por definição, o resultado da adição entre dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ é o ponto cujas coordenadas são $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Porém é importante ressaltar que o produto entre números complexos resulta em um número complexo também representado no plano, ou seja, este produto não corresponde ao produto escalar ou vetorial.

Geometricamente, pode-se ver que o módulo de um número complexo, denotado por $|z|$, pode ser obtido através da expressão

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Enquanto a desigualdade $z_1 < z_2$ não possui sentido para números complexos, uma vez que $z_2 - z_1$ não necessariamente é um real positivo, a desigualdade $|z_1| < |z_2|$ significa que o ponto z_1 está mais próximo da origem que z_2.

Assim, a distância entre dois números complexos z_1 e z_2 é dada por

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1.8}$$

Podemos também observar outras desigualdades envolvendo o módulo de números complexos, como

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \;\text{ e }\; \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \tag{1.9}$$

Provaremos o resultado da primeira desigualdade em 1.9. Para a segunda, o raciocínio é análogo.

É trivial que $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z|$, pois $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$, onde $x \leq |x|$. Para $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, temos

$$|\text{Re } z| = |x| = \sqrt{x^2} \;\text{ e }\; |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Desta forma,

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A *desigualdade triangular* é também válida para valores em $\mathbb{C}$ e é dada por

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.10}$$

Como consequência da desigualdade triangular, obtemos

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \tag{1.11}$$

De fato, como

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

então,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Porém,

$$|z_2| = |(z_2 - z_1) + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|,$$

e portanto,

$$-(|z_1| - |z_2|) \leq |z_2 - z_1|.$$

Com estes resultados concluímos que

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

1.4 Conjugado complexo

O conjugado de um número complexo $z = x + iy$ é definido como o número complexo $x - iy$ e é denotado por $\overline{z}$. Note que um número complexo e seu conjugado possuem a mesma parte real, porém suas partes imaginárias possuem sinais opostos, ou seja, o conjugado de um número complexo (x, y) é sua reflexão sobre o eixo real, i.e., $(x, y) \longmapsto (x, -y)$. Como propriedade, temos que

$$\overline{\overline{z}} = z \text{ e } |\overline{z}| = |z|.$$

1.4.1 Propriedades

1. O conjugado da soma $z_1 + z_2$ é a soma dos conjugados de z_1 e z_2.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

   De fato, para $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, temos

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) \\ &= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

2. Da forma semelhante, temos para o produto:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

3. A soma de um número complexo $z = x+iy$ com seu conjugado $\overline{z} = x-iy$ resulta em $2x$, e a diferença $z - \overline{z}$ em $2iy$. Como $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, então

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

4.

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

   Escrevendo $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$, obtemos

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

5. Seja z um número complexo e $\overline{z}$ seu conjugado. Então,

$$-\overline{z} = \overline{-z}.$$

De fato, se $z = (x, y)$, então

$$\overline{-z} = \overline{(-x, -y)} = (-x, y) = -(x, -y) = -\overline{z}.$$

Vejamos agora alguns exemplos de igualdades que podem ser obtidas através das propriedades anteriores.

Exemplo 1.4.1. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
Pela Propriedade 1,

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1 + (-z_2)} = \overline{z_1} + \overline{-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Exemplo 1.4.2. $\overline{iz} = -i\overline{z}$. Se $z = x + iy$,

$$\overline{iz} = \overline{i(x + iy)} = \overline{-y + ix} = -y - ix = i(x - iy) = -i\overline{z}.$$

Exemplo 1.4.3. $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$.

$$\overline{(2 + i)^2} = \overline{4 + 4i - 1} = \overline{3 + 4i} = 3 - 4i.$$

1.5 Forma Exponencial

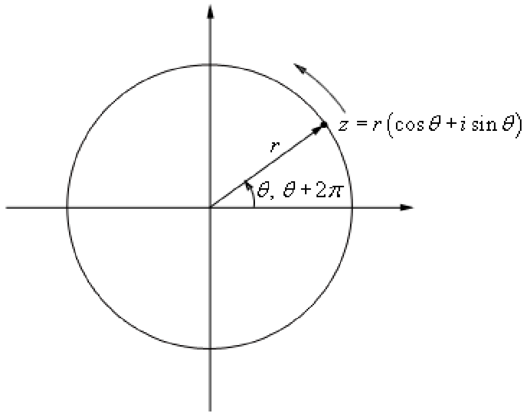
Todo número complexo pode ser representado como um vetor no plano com a identificação $z = x + iy \cong (x, y)$. Munidos dos conceitos de geometria no plano, podemos associar o conceito de distância do ponto até a origem e a noção de ângulo em relação ao eixo real. Ao primeiro, que já definimos como sendo o módulo, damos o nome de raio; O ângulo formado com o eixo real é denotado pela letra θ e seus valores se diferem por múltiplos inteiros de 2π.

O ângulo θ possui infinitos valores e cada valor é chamado de um argumento de z, sendo o conjunto de todos estes tais valores denotado por arg z. O valor principal de arg z, também chamado argumento principal, é denotado por Arg z e é o único valor de θ contido no intervalo $(-\pi, \pi]$. Dessa forma

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

Utilizando a geometria no triângulo retângulo, vemos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$ e podemos escrever qualquer número complexo z em sua *forma polar*, dada por

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \tag{1.13}$$



Sabe-se, de acordo com a fórmula de Euler, que

$$e^{i\theta} \doteq \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{1.14}$$

Assim, de 1.13 e 1.14, podemos definir a chamada *forma exponencial* dada por

$$z = re^{i\theta}.$$

Dizemos que dois números complexos $z_1 = r_1e^{\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{\theta_2}$ são iguais se, e somente se

$$r_1 = r_2 \text{ e } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

1.5.1 Propriedades

1. De forma semelhante ao que já é conhecido sobre exponenciais, definimos o produto entre $e^{i\theta_1}$ e $e^{i\theta_2}$ como sendo

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

   Com efeito, escrevendo $e^{i\theta_j} = \cos\,\theta_j + i\ \mathrm{sen}\ \theta_j$, para $j = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

2. Se $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, então, seguindo o que vimos anteriormente,

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

3. Mais ainda, temos que que a divisão $\dfrac{z_1}{z_2}$ pode ser escrita como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2}e^{-i\theta_2}}\right) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

4. O argumento do produto z_1z_2 é dado por

$$\arg(z_1z_2) = \arg\, z_1 + \arg\, z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

pois, se $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, então

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Ficando claro, assim, que $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi$.

5. A exponenciação de números complexos $z^n, n \in \mathbb{Z}$, pode ser reescrita utilizando-se a forma exponencial como

$$z^n = r^ne^{in\theta}, \tag{1.15}$$

o que pode ser demonstrado utilizando o Princípio da Indução Matemática.

Note que a igualdade é válida para $n = 1$. Supomos válida para $n = k$ e mostraremos que continua válida para $n = k + 1$:

$$z^{k+1} = zz^k = re^{i\theta}(r^ke^{ik\theta}) = r^{k+1}e^{i(k+1)\theta}.$$

Assim, podemos concluir que a igualdade 1.15 é válida para qualquer n natural. Para inteiros negativos, basta tomarmos $m \in \mathbb{Z}^-$ tal que $m = -n$. Desta maneira,

$$z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^ne^{in\theta}} = \left(\frac{1}{r}\right)^n\left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^n = r^{-n}e^{-in\theta} = r^me^{im\theta}.$$

Portanto, concluímos que a igualdade é válida para todo n inteiro.

6. Do item anterior, podemos observar que quando $r = 1$, então 1.15 se torna $e^{(i\theta)n} = e^{in\theta}$. Na forma polar, temos

$$(\cos\,\theta + i\text{sen}\,\theta)^n = \cos\,n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta,\ n \in \mathbb{Z}.$$

A igualdade anterior é conhecida como fórmula de *de Moivre*. Sua demonstração também pode ser vista utilizando o Princípio da Indução Matemática.

Para $n = 1$ a igualdade é satisfeita. Suponhamos válida para $n = k$ e provaremos para $n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
&(\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta)^{k+1} = (\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta)^{k}(\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta) \\
&= (\cos\ k\theta + i\ \text{sen}\ k\theta)(\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta) \\
&= \cos(k\theta)\ \cos\ \theta - \text{sen}(k\theta)\ \text{sen}\ \theta + i(\cos(k\theta)\ \text{sen}\ \theta + \ \text{sen}(k\theta)\ \cos\ \theta) \\
&= \cos(k\theta + \theta) + i(\text{sen}(k\theta + \theta)) \\
&= \cos(\theta(k+1)) + i(\text{sen}(\theta(k+1))).
\end{aligned}
$$

Assim, podemos concluir que a fórmula de de Moivre é válida para todo n natural.

Exemplo 1.5.1. Utilizando a fórmula de de Moivre, mostraremos as seguintes igualdades

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta \text{ e } \text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta.$$

Como $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta$, então

$$
\begin{aligned}
\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}^3\theta \\
&= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta) + i(3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta).
\end{aligned}
$$

Pela definição de igualdade entre números complexos,

$$
\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta, \\
\text{sen}\,3\theta &= 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta.
\end{aligned}
$$

1.6 Raízes

Podemos agora introduzir o conceito de raiz de um número complexo. Se $z^n = z_0$, $n \in \mathbb{N}$, podemos determinar os valores possíveis para z, ou seja, podemos determinar as *raízes* da equação dada.

Seja $z = re^{i\theta}$ e $z_0 = \rho e^{i(\phi + 2k\pi)}$. Se $z^n = z_0$, então

$$r^n e^{i\theta n} = \rho e^{i(\phi + 2k\pi)}$$

e portanto,

$$r^n = \rho \text{ e } \theta n = \phi + 2k\pi.$$

O valor para k varia apenas de 0 a $n - 1$, pois os valores de θ se repetem a partir de $k = n$. Assim, podemos encontrar o valor para r e valores para θ em função de k.

Por exemplo, se tivermos a equação $z^4 = -4$, escrevemos $z = re^{i\theta}$ e $-4 = \rho e^{i(\phi+2k\pi)}$. Neste caso, fica claro que o raio ρ vale 4 e que -4 encontra-se no plano com o ângulo correspondente $\phi = \pi + 2k\pi$.

Portanto, temos que

$r^4 e^{i4\theta} = 4e^{i(\pi+2k\pi)}$, com $r^4 = 4$ e $4\theta = \pi + 2k\pi$. Portanto,

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi(1+2k)}{4}.$$

Ainda não possuímos um valor exato para θ, já que este varia de acordo com o valor de k. Voltando ao exemplo anterior, encontraremos cada raiz w_k, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Para $k = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, e

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}.$$

Para $k = 1$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, e

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}.$$

Para $k = 2$, $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$, e

$$w_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}.$$

Para $k = 3$, $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$, e

$$w_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4})}.$$

É importante nos lembrarmos de um resultado do Teorema Fundamental da Álgebra, que nos diz respeito sobre raízes de um polinômio.

Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes reais de ordem n. Se $z \in \mathbb{C}$ é raiz deste polinômio, então seu conjugado também será uma raiz.

Com efeito, se z é raiz de $P(x)$, então $P(z) = 0$. Assim,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0.$$

Utilizando as propriedades do conjugado, observamos que

$$a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + ... + a_n \overline{z}^n = 0.$$

Ou seja, concluímos que $P(\overline{z})$ também é raiz do polinômio $P(x)$.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais Complexos

Em geral, quando tratamos de espaços vetoriais, é comum utilizarmos o conceito de multiplicação de vetor por número real. Entretanto, podemos tratar de espaços vetoriais definindo uma operação de multiplicação por um número complexo. Isto será feito a seguir para definir o que chamamos de Espaços Vetoriais Complexos.

Definição 1. *Um espaço vetorial complexo é um conjunto E cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:*

i Adição: A cada dois vetores $u, v \in E$ corresponde um vetor $u + v \in E$;

ii Multiplicação por um número complexo: A cada $\alpha \in \mathbb{C}$, $v \in E$, corresponde um vetor αv.

Exemplo 2.0.1. O conjunto $\mathbb{C}^n$ de todas as listas $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n), v = (\beta_1, ..., \beta_n)$ de n números complexos com as definições

$$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n), \\ \gamma u &= (\gamma\alpha_1, ..., \gamma\alpha_n). \end{aligned}$$

é um espaço vetorial complexo. Em particular, o próprio conjunto $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo.

Também o conjunto $F(X, \mathbb{C})$ de todas as funções $f : X \to \mathbb{C}$ para X arbitrário, é um espaço vetorial complexo quando munido das definições usuais para $f + g$ e αf. O conjunto $M(m \times n; \mathbb{C})$ das matrizes complexas $m \times n$ também é um espaço vetorial complexo.

Chamaremos aqui a transformação linear entre dois espaços vetoriais complexos de transformação $\mathbb{C}$-linear. Do mesmo modo, a base de um espaço vetorial complexo será chamada $\mathbb{C}$-base. Os espaços munidos de uma operação de adição e de multiplicação por número real serão aqui chamados de espaços vetoriais reais.

Um espaço vetorial complexo E pode ser visto como um espaço vetorial real se considerarmos apenas a multiplicação dos vetores de E por números reais; analogamente, uma transformação $\mathbb{C}$-linear pode ser vista como uma transformação $\mathbb{R}$-linear.

Notação: Se $A : E \to F$ é uma transformação $\mathbb{C}$-linear, $A_r : E \to F$ indica a transformação $\mathbb{R}$-linear, chamada descomplexificada de A.

Exemplo 2.0.2. O conjunto $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo de dimensão um, de modo que todo número complexo fornece uma base para $\mathbb{C}$. Em particular, $\{1\}$ é uma $\mathbb{C}$-base para $\mathbb{C}$. No entanto, considerando $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial real, o conjunto $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ fornece uma $\mathbb{R}$-base para $\mathbb{C}$, pois todo número complexo $\alpha + i\beta$ é uma combinação linear real de 1 e i.

De forma mais geral, observe que se $U = \{u_1, ..., u_n\} \subset E$ é $\mathbb{C}$-base do espaço vetorial complexo E, então $U' = \{u_1, ..., u_n, iu_1, ..., iu_n\} \subset E$ é uma $\mathbb{R}$-base de E.

Notação: Se $dim_{\mathbb{C}}E = n$, então $dim_{\mathbb{R}}E = 2n$.

Quando tratamos de espaços vetoriais complexos, precisamos modificar o conceito de produto interno. Desta forma, vamos introduzir um produto interno não bilinear chamado produto interno hermitiano. Observe que se o produto interno for bilinear então $\langle iv, iv\rangle = i^2\langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle \leq 0$.

Definição 2. *Produto interno hermitiano é uma função* $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ *que associa a cada par ordenado de vetores* u, v *no espaço vetorial complexo* E *um número complexo* $\langle u, v\rangle$*, de modo que, para quaisquer* $u, v, w \in E$*,* $z \in \mathbb{C}$*, sejam cumpridas as seguintes condições:*

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$;
2. $\langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$;
3. $\langle zu, v\rangle = z\langle u, v\rangle$;
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *se* $u \neq 0$.

Note que $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$, pois

$$\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$$

Analogamente, temos que $\langle u, zv\rangle = \overline{z}\langle u, v\rangle$.

Logo, observamos que o produto interno hermitiano é *sesqui-linear*, isto é, linear na primeira variável e anti-linear na segunda variável.

Exemplo 2.0.3. Em $\mathbb{C}^n$, o produto interno canônico é definido para $u = (z_1, ..., z_n)$ e $v = (w_1, ..., w_n)$ como

$$\langle u, v \rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + ... + z_n\overline{w_n}. \tag{2.1}$$

Observação 2.0.1. Para $z \in \mathbb{C}$, com o produto interno canônico definido em 2.1, temos que

$$\langle z, z \rangle = z\overline{z} = |z|^2,$$

logo,

$$|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}.$$

Exemplo 2.0.4. Seja $E = C^0\left([a, b]; \mathbb{C}\right)$ o espaço vetorial complexo formado pelas funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Um produto hermitiano em E pode ser definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

para $f, g \in E$ quaisquer.

Teorema 1. *Seja E um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido de um produto interno hermitiano e E^* seu espaço dual. A correspondência que associa a cada vetor $v \in E$ o funcional $\mathbb{C}$-linear $\phi(v) = v^* : E \to \mathbb{C}$, tal que $v^*(w) = \langle w, v \rangle$, $\forall w \in E$, é uma bijeção $\phi : E \to E^*$ tal que $(u + v)^* = u^* + v^*$ e $(zv)^* = \overline{z}v^*$, $\forall u, v \in E, z \in \mathbb{C}$.*

Observe que a correspondência $v \mapsto v^*$ não é um isomorfismo, pois trata-se de uma bijeção não linear. Assim, a bijeção $\phi : E \to E^*$ é chamada *anti-isomorfismo.*

Munidos de um produto interno hermitiano, o que faremos em sequência será definir a transformação adjunta de uma transformação $\mathbb{C}$-linear.

Definição 3. *Seja $A : E \to F$ uma transformação $\mathbb{C}$-linear entre espaços vetoriais complexos munidos de um produto interno hermitiano; definimos a transformação adjunta $A^* : F \to E$ como a transformação $\mathbb{C}$-linear tal que*

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle,$$

$\forall v \in E, w \in F$.

Desta forma, são válidas as seguintes propriedades para transformações $\mathbb{C}$-lineares A, B:

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$;

2. $(BA)^* = A^*B^*$;

3. $I^* = I$;

4. $(A^*)^* = A$;

5. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;

6. $(zA)^* = \overline{z}A^*$, $z \in \mathbb{C}$.

Lembramos agora que, para o caso em que temos uma transformação $\mathbb{R}$-linear $A : E \to F$, a matriz a^* da transformação adjunta em bases ortonormais de E e F é dada por $a^* = a^T$, isto é, pela transposta da matriz da transformação $\mathbb{R}$-linear. Isto é resumido no enunciado do Teorema 11.2 presente na referência [E].

Entretanto, este resultado precisa ser modificado para o caso de transformações $\mathbb{C}$-lineares, como é feito a seguir.

Teorema 2. *Se a matriz da transformação $\mathbb{C}$-linear $A : E \to F$ nas bases ortonormais $U \in E$ e $V \in F$ é $a = [a_{kj}] \in M(m \times n)$, então a matriz da transformação adjunta $A^* : F \to E$ nas bases V, U é a matriz $a^* = \overline{a}^T$ (transposta da conjugada de a), em que $\overline{a} \doteq [\overline{a}_{kj}] \in M(m \times n; \mathbb{C})$.*

O próximo resultado a ser enunciado mostra que todo operador $\mathbb{C}$-linear $T : E \to E$ é triangularizável, isto é, E possui uma base relativamente à qual a matriz de T é triangular (superior ou inferior). Mas antes, precisamos de algumas definições.

Definição 4. *Um operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ chama-se hermitiano quando $A = A^*$, ou seja,*
$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle,$$
$\forall u, v \in E$.

Definição 5. *Uma matriz $a = [a_{kj}] \in M(n \times n; \mathbb{C})$ chama-se hermitiana quando $a = a^*$, isto é, quando*

$$a_{jk} = \overline{a}_{kj},\ k, j = 1, ..., n.$$

Note que, particularmente para os elementos da diagonal de a,

$$a_{jj} = \overline{a}_{jj},\ \forall j = 1, ..., n,$$

e portanto a diagonal de uma matriz hermitiana possui apenas números reais. Para matrizes reais, hermitiana é o mesmo que matriz simétrica.

Assim, as matrizes a e a^* têm a forma

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Definição 6. *Um operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ é chamado hermitiano se, e somente se, sua matriz em qualquer base ortonormal de E é uma matriz hermitiana.*

Definição 7. *Um operador $\mathbb{C}$-linear $U : E \to E$ chama-se unitário quando $U^* = U^{-1}$. Analogamente, uma matriz $u \in M(n \times n; \mathbb{C})$ chama-se unitária quando $u^* = u^{-1}$.*

Note que as matrizes unitárias reais são as matrizes ortogonais.

Como a definição de polinômio característico independe da definição de produto interno, esta primeira possui a mesma definição para operadores $\mathbb{C}$-lineares. Entretanto, sabemos do Teorema Fundamental da Álgebra que todo polinômio com coeficientes complexos possui ao menos uma raiz complexa. Considere o polinômio característico do operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ dado por $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. O número complexo λ_0 é uma raiz de $p_A(\lambda)$ se, e somente se, o operador $A - \lambda_0 I$ é não invertível, ou seja, existe $v \neq 0$ em E tal que $Av = \lambda_0 v$. Portanto, as raízes características de um operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ são os autovalores deste operador, e assim, como estas raízes sempre existem, concluímos que todo operador $\mathbb{C}$-linear possui autovalores complexos.

A garantia de existência destes autovalores implica no resultado a seguir.

Teorema 3. *Todo operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ é triangularizável.*

Dizemos que um operador $A : E \to E$ é triangularizável quando E possui uma base relativamente à qual a matriz de A é triangular. A demonstração será análoga ao caso para operadores $\mathbb{R}$-lineares, e pode ser vista na referência [E]. A versão matricial deste mesmo teorema é:

Teorema 4. *Para toda matriz complexa a, existe uma matriz unitária u tal que $u^* a u = u^{-1} a u = t$ é uma matriz triangular (superior ou inferior).*

O que faremos a seguir será apresentar dois resultados importantes em Álgebra Linear que resultam do Teorema anterior. Primeiramente, apresentaremos o Teorema de Cayley-Hamilton para depois apresentarmos o Teorema

Espectral para operadores complexos. Mas antes disso, precisamos de uma definição.

Definição 8. *Dados um operador linear $A : E \to E$ e um polinômio $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m$, definimos $p(A)$ como*

$$p(A) \doteq a_0 I + a_1 A + ... + a_m A^m.$$

Teorema 5 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Se p_A é o polinômio característico do operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ então $p_A(A) = 0$.*

Demonstração. Do Teorema 3, existe uma base $\{u_1, ..., u_n\} \in E$ relativamente à qual a matriz $a = [a_{ij}]$ de A é triangular (superior, digamos).

Da seção 17 da referência [E], temos o seguinte resultado: $A : E \to E$ é triangularizável se, e somente se, existe uma cadeia $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n = E$ tal que $A(F_i) \subset F_i$ e $\dim F_i = i$.

Desta forma, escrevendo $F_0 = \{0\}$ e $F_i =$ subespaço vetorial de E gerado por $u_1, ..., u_i$, obtemos a cadeia

$$F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n = E$$

de forma que cada F_i é invariante por A, ou seja,

$$A(F_i) \subset F_i.$$

Por hipótese, temos que $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_n)$, em que $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são as raízes de p_A. Escrevendo $B = p_A(A)$, temos que

$$B = (-1)^n(A - a_{11}I)(A - a_{22}I)...(A - a_{nn}I),$$

pois as raízes características de A são os elementos a_{ii} da diagonal da matriz a, uma vez que a é triangular.

Assim, para cada $i = 1, ..., n$ temos $Au_i = z + a_{ii}u_i$, em que $z \in F_{i-1}$, e portanto

$$(A - a_{ii})u_i = z \in F_{i-1}.$$

Daí, obtemos que para todo $i = 1, ..., n$ o operador $B_i = A - a_{ii}I$ transforma F_i em F_{i-1}. Como $p_A(A) = B = B_1 \circ B_2 \circ ... \circ B_n$, concluímos que $p_A(A)$ transforma E em $\{0\}$, isto é, $p_A(A) = 0$.

□

Definição 9. *Um operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ em um espaço vetorial complexo de dimensão finita chama-se normal quando comuta com seu adjunto, isto é, $AA^* = A^*A$. Analogamente, uma matriz quadrada a chama-se normal quando $aa^* = a^*a$.*

Teorema 6 (Teorema Espectral para operadores complexos)**.** *Seja E um espaço vetorial complexo munido de um produto interno hermitiano. Um operador $\mathbb{C}$-linear $A : E \to E$ é normal se, e somente se, existe uma base ortonormal de E formada por autovetores de A.*

Teorema 7 (Versão Matricial do Teorema Espectral)**.** *Seja a matriz $a \in M(n \times n; \mathbb{C})$. Afim de que exista uma matriz unitária u tal que $d = u^*au$ é diagonal, é necessário e suficiente que a seja normal.*

Como ambos os teoremas anteriores são equivalentes, apresentaremos apenas a demonstração da versão matricial.

Demonstração. Considere, primeiramente, que a matriz a é normal. Do Teorema 4, sabemos que existe uma matriz unitária u tal que $t = u^*au$ é triangular. Tomando adjuntas em ambos os lados da igualdade $t = u^*au$, temos $t^* = u^*a^*u$. Como u é unitária, $uu^* = I$ e logo

$$tt^* = (u^*au)(u^*a^*u) = u^*aa^*u. \tag{2.2}$$

Analogamente,

$$t^*t = (u^*a^*u)(u^*au) = u^*a^*au. \tag{2.3}$$

Mas como a é normal, $aa^* = a^*a$ e de 2.2 e 2.3 temos que $tt^* = t^*t$, ou seja, t normal. Assim, t é uma matriz triangular e normal; logo, t é diagonal.

Considere agora que $d = u^*au$ é uma matriz diagonal. Então, como u é unitária,

$$\begin{aligned} & dd^* = d^*d \\ \Leftrightarrow\ & (u^*au)(u^*a^*u) = (u^*a^*u)(u^*au) \\ \Rightarrow\ & u^*aa^*u = u^*a^*au \\ \Rightarrow\ & aa^*u = a^*au \\ \Rightarrow\ & aa^* = a^*a. \end{aligned}$$

Logo, a é normal. □

Capítulo 3

Estudo de Funções Complexas

Neste capítulo trabalharemos com funções em uma variável complexa, transpondo conceitos conhecidos do Cálculo real para o contexto complexo.

3.1 Funções

Uma função f em uma variável complexa definida em $S \subset \mathbb{C}$ relaciona cada $z \in S$ a um número complexo w, chamado "valor da função f em z", ou seja, w corresponde ao valor de $f(z)$. Definimos como *domínio* o aberto conectado S no qual f está definida.

$$f(z) = w. \tag{3.1}$$

Note que, apesar de estarmos trabalhando com funções de apenas uma variável, não é possível representar graficamente uma função complexa, uma vez que seu gráfico estaria representado em $\mathbb{C}$ x $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$.

O valor w assumido por uma função $f(z)$ pode também ser escrito como $w = u + iv$ (forma cartesiana). Se $z = x + iy$, então podemos escrever 3.1 como

$$f(x + iy) = u + iv, \tag{3.2}$$

com $u, v \in \mathbb{R}$ dependentes das variáveis x e y. Desta forma, temos que u e v são escritos em *função* de x e de y, sendo então chamados de *funções componentes* de f.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{3.3}$$

Assim, quando trabalhamos com coordenadas polares, isto é $z = re^{i\theta}$, então escrevemos

$$u + iv = f(re^{i\theta}),$$

no qual u e v dependem das variáveis r e θ. Portanto, em sua forma polar, a equação 3.3 se torna

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \tag{3.4}$$

Exemplo 3.1.1. Seja $f(z) = z^3 + z + 1$, $z = x + iy$. Veremos que a função f pode ser escrita como na equação 3.3.

$$\begin{aligned} z^3 + z + 1 &= (x + iy)^3 + x + iy + 1 \\ &= x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 + x + iy + 1 \\ &= (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y), \end{aligned}$$

com $u(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1)$ e $v(x, y) = (3x^2y - y^3 + y)$.

3.2 Limites

Seja $f(z)$ uma função definida em todos os pontos de uma vizinhança de z_0. Se sempre que o valor da função ficar limitado a uma vizinhança de w_0 no contradomíno os valores desta vizinhança se aproximam de z_0, então dizemos que *o limite da função f, quando z tende a z_0, vale w_0*, ou seja

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Chamaremos de δ o raio da vizinhança de centro z_0 e de ε o raio da vizinhaça de w_0. Formalmente, dizemos que para cada ε existe um δ tais que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

É importante ressaltar que se o limite de $f(z)$ existe em z_0, então este limite é único. Isto pode ser visto supondo o contrário, ou seja, suponha que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \text{ e } \lim_{z \to z_0} f(z) = w_1, \text{ para } w_0 \neq w_1.$$

Neste caso, teríamos, para qualquer $\varepsilon > 0$, que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_0,$$

e também

$$|f(z) - w_1| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

Assim, se δ representa o menor valor entre δ_1 e δ_2, e $0 < |z - z_0| < \delta$, então

$$|w_1 - w_0| = |(f(z) - w_0) - (f(z) - w_1)| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Porém, $|w_1 - w_0|$ é sempre positivo e também menor que 2ε, que é arbitrariamente pequeno e positivo. Desta forma, temos que $w_1 - w_0 = 0$, ou seja, $w_1 = w_0$, provando assim que o valor do limite deve ser único.

Apresentaremos agora dois teoremas que serão de grande importância no estudo de limites de funções de variáveis complexas.

Teorema 8. *Suponha que*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0, \text{ e } w_0 = u_0 + iv_0,$$

então,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

se, e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Teorema 9. *Suponha que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \text{ e } \lim_{z \to z_0} F(z) = W_0.$$

Então,

1. $$\lim_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0,$$

2. $$\lim_{z \to z_0} [f(z)F(z)] = w_0 W_0,$$

3. $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0},\ W_0 \neq 0.$$

Apresentaremos apenas a demonstração do primeiro item a fim de ilustrarmos as técnicas de demostrações.

Demonstração. Dado um $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ quando } 0 < |(f+F)(z) - (w_0 + W_0)| < \varepsilon.$$

Assim,

$$|(f+F)(z) - (w_0 + W_0)| = |(f(z) - w_0) + (F(z) - W_0)|.$$

Porém, como sabemos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim_{z \to z_0} F(z) = W_0$, então $0 < |f(z) - w_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, da mesma forma que $0 < |F(z) - W_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Portanto,

$$|(f(z) - w_0) + (F(z) - W_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.3 Continuidade

Dizemos que uma função f é contínua em um ponto z_0 quando z_0 pertence ao domínio da f, o limite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe, e

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{3.5}$$

Da identidade 3.5, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ quando } |z - z_0| < \delta.$$

Uma função é contínua em um subconjunto quando ela é contínua em todos os pontos deste subconjunto. Como resultado do Teorema 9 temos também que se duas funções são contínuas em um ponto, então a soma e o produto dessa função também serão contínuos neste ponto. O mesmo é válido para o quociente, dado que o denominador não se anule no ponto. Para finalizar, apresentamos um resultado envolvendo composição de funções.

Teorema 10. *A composição de duas funções contínuas é também contínua.*

Agora, apresentaremos exemplos referentes a limites utilizando os resultados já vistos.

Exemplo 3.3.1. Através da definição de limite, mostraremos que $\lim_{z \to z_0} \text{Re } z = \text{Re } z_0$.

Dado um $\varepsilon > 0$, queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |\text{Re } z - \text{Re } z_0| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Assim, como

$$|\text{Re } z - \text{Re } z_0| = |\text{Re } (z - z_0)|,$$

se $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, então

$$|\text{Re } (z - z_0)| = |x - x_0|.$$

Porém, $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > |x - x_0|$.

Portanto, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, e assim,

$$|x - x_0| < |z - z_0| = \varepsilon.$$

Exemplo 3.3.2. Através do Princípio da Indução Matemática, provaremos que $\lim\limits_{z \to z_0} z^n = z_0^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente, podemos observar que o resultado é válido para $n = 1$, pois claramente

$$\lim_{z \to z_0} z = z_0.$$

Suponha o resultado válido para $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\lim_{z \to z_0} z^k = z_0^k.$$

Mostraremos que o resultado continua válido para $k + 1$. De fato, pelo Teorema 9,

$$\lim_{z \to z_0} z^{k+1} = \lim_{z \to z_0} z^k z = \lim_{z \to z_0} z^k \lim_{z \to z_0} z = z_0^k z_0 = z_0^{k+1}.$$

Podemos, enfim, concluir que o resultado do limite dado é válido para qualquer n natural.

Exemplo 3.3.3. Como já vimos, a unicidade é um critério para a existência de um limite. Aqui, apresentaremos como exemplo o limite da função $f(z) = \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2$ quando z tende a 0. Para mostrar que este limite não existe, exibimos dois caminhos que tendem à origem cujos limites assumem valores diferentes.

Para $z = (x, x)$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{z \to 0} f(z) &= \lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2 = \lim_{z \to 0} \left(\frac{x + ix}{x - ix}\right)^2 = \lim_{z \to 0} \left(\frac{x(1 + i)}{x(1 - i)}\right)^2 \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^2} = \lim_{z \to 0} \left(\frac{1 + 2i - 1}{1 - 2i - 1}\right) = \lim_{z \to 0} -1 = -1.\end{aligned}$$

Para $z = (x, 0)$,

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2 = \lim_{z \to 0} \left(\frac{x + i0}{x - i0}\right)^2 = \lim_{z \to 0} 1 = 1.$$

Como os valores obtidos são diferentes, podemos concluir que o limite dado não existe.

3.4 Derivadas

Seja f uma função cujo domínio contém uma vizinhança de z_0. Se o limite a seguir existe, então definimos a derivada da função f em z_0, denotada por $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}z_0$, por

$$f'(z_0) \doteq \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \tag{3.6}$$

A identidade anterior também pode ser reescrita fazendo $\Delta z \doteq z - z_0$. Assim, ficamos com a identidade

$$f'(z_0) \doteq \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

Mais ainda, se tivermos Δw tal que $\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$, podemos escrever a identidade 3.6 como

$$f'(z_0) \doteq \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

3.4.1 Fórmulas de diferenciação

Apesar de termos visto a definição de limite, apresentaremos aqui algumas fórmulas de diferenciação.

Seja c uma constante complexa e f uma função complexa tal que $f'(z_0)$ existe, logo são válidos os seguintes cálculos:

$$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{df}{dz}z_0 = 1, \quad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z). \tag{3.7}$$

Tais resultados são obtidos utilizando-se a definição de derivada. Para a primeira igualdade da equação anterior temos que, para $f(z) = c$,

$$\frac{d}{dz}c = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{c-c}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 0 = 0.$$

Para $f(z) = z$,

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 1 = 1.$$

Finalmente, para $f(z) = cg(z)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}[cg(z)] &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{cg(z)-cg(z_0)}{z-z_0} \\
&= c\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \\
&= cg'(z_0).
\end{aligned}$$

Além disso, se as derivadas de duas funções f e F existem em um ponto z, então podemos provar as seguintes igualdades:

$$\frac{d}{dz}[f(z)+F(z)] = f'(z)+F'(z), \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dz}[[f(z)F(z)] = f'(z)F(z)+f(z)F'(z)], \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{f'(z)F(z)-f(z)F'(z)}{[F(z)]^2},\ F(z)\neq 0. \tag{3.10}$$

Para a igualdade 3.8, basta fazer $g(z) = f(z)+F(z)$ e partir da definição, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}[f(z)+F(z)] &= \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)+F(z)-f(z_0)-F(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}\right] \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \\
&= f'(z_0)+F'(z_0).
\end{aligned}$$

Para a igualdade 3.9, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}[F(z)f(z)] &= \lim_{z\to z_0}\frac{F(z)f(z)-F(z_0)f(z_0)}{z-z_0}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{F(z)f(z)+F(z)f(z_0)-F(z)f(z_0)-F(z_0)f(z_0)}{z-z_0}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{F(z)[f(z)-f(z_0)]+f(z_0)[F(z)-F(z_0)]}{z-z_0}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{F(z)[f(z)-f(z_0)]}{z-z_0}+\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0)[F(z)-F(z_0)]}{z-z_0}\\
&= F(z_0)f'(z_0)+F'(z_0)f(z_0).
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o Princípio da Indução Matemática, já podemos provar que, para qualquer n inteiro não nulo,

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}. \tag{3.11}$$

Para $n = 1$, podemos observar que a igualdade é válida. Suponhamos agora a igualdade válida pra $k \in \mathbb{N}$. Mostraremos que para $k+1$ a igualdade permanece válida.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}[z^{k+1}] &= \frac{d}{dz}[z^k z] = \frac{d}{dz}[z^k]z + z^k\frac{d}{dz}z = kz^{k-1}z + z^k\\
&= kz^k + z^k = (k+1)z^k.
\end{aligned}$$

Podemos, enfim, concluir que a equação é válida para todo n inteiro *positivo*. Agora, seja $m = -n$, para $n \in \mathbb{N}$. Provaremos a igualdade 3.11 para inteiros negativos. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}z^n &= \frac{d}{dz}z^{-m} = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z^m}\right] = \frac{1'z^m-(z^m)'}{z^{2m}}\\
&= \frac{-mz^{m-1}}{z^{2m}} = -mz^{-m-1} = nz^{n-1}.
\end{aligned}$$

3.5 Equações de Cauchy-Riemann

Uma função de variável complexa $f(z)$, $z = x + iy$, pode ser escrita como $f(z) = u + iv$, sendo u e v funções reais que dependem de x e y. Aqui, veremos um resultado importante envolvendo derivadas parciais das funções componentes e derivação complexa.

Teorema 11. *Suponha que* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *e que* $f'(z)$ *exista em* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Então, as derivadas parciais de primeira ordem de* u *e de* v *existem em* (x_0, y_0) *e devem satisfazer as* ***equações de Cauchy-Riemann****, dadas por*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ e } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \tag{3.12}$$

Além disso, $f'(z_0)$ *pode ser escrita como*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \text{ ou também } f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Demonstração. Como a função f possui derivada em z_0, então podemos dizer que existe o limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0),$$

com $\Delta w = f(\Delta z + z_0) - f(z_0)$. Porém, como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Delta w &= u(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) + iv(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] \\ &= u(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - v(x_0, y_0)].\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{[v(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3.13}$$

Como o limite existe, podemos aproximar Δz de 0 por qualquer caminho. Tomaremos o limite da expressão 3.13 das partes real e imaginária quando Δz se aproxima pelos pontos $(\Delta x, 0)$ e depois $(0, \Delta y)$.

Primeiramente, se deixarmos $(\Delta x, \Delta y)$ se aproximar de $(0, 0)$ com $\Delta y = 0$, temos

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0).$$

Note que através do resultado anterior podemos escrever $f'(z)$ como

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \tag{3.14}$$

Agora, se deixarmos $(\Delta x, \Delta y)$ se aproximar de $(0,0)$ pelo caminho onde $\Delta x = 0$, temos

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0, y_0).$$

Os últimos resultados obtidos também nos permitem escrever $f'(z_0)$ como

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0). \tag{3.15}$$

Finalmente, pela definição de igualdade e através de 3.14 e 3.15, temos

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ e } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0),$$

obtendo, enfim, as *equações de Cauchy-Riemann.*

□

3.6 Condições suficientes para diferenciabilidade

A existência de derivadas parciais não implica diferenciabilidade. Note que satisfazer 3.12 é condição necessária, mas não suficiente para diferenciabilidade. Vejamos então um resultado que fornece tais condições.

Teorema 12. *Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função definida em uma vizinhança de $z_0 = x_0 + iy_0$, e suponha que as derivadas parciais de primeira ordem das funções u e v em relação a x e y existem em toda esta vizinhança. Se estas derivadas parciais são contínuas em (x_0, y_0) e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0), então $f'(z_0)$ existe.*

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada nas páginas 64 e 65 da referência [C].

Exemplo 3.6.1. Seja $f(z) = iz + 2$. Mostraremos que $f'(z)$ existe em qualquer ponto do plano complexo.

De fato, se $z = x + iy$,

$$f(z) = iz + 2 = i(x + iy) + 2 = ix + 2 - y,$$

com $u(x,y) = 2 - y$ e $v(x,y) = x$.

Como $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são polinomiais, e portanto de classe C^∞, as derivadas parciais serão dadas por

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 0, & u_y(x,y) = -1, \\ v_x(x,y) = 1, & v_y(x,y) = 0, \end{array}$$

que são contínuas. As equações de Cauchy-Riemann são claramente satisfeitas para qualquer ponto do plano complexo. Portanto, pelo Teorema 12, $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exemplo 3.6.2. Seja $f(z) = x^2 + iy^2$. Veremos em quais pontos esta função é diferenciável.

As funções componentes de $f(z)$ são dadas por

$$u(x,y) = x^2 \text{ e } v(x,y) = y^2,$$

cujas derivadas parciais são expressas da forma

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 2x, & u_y(x,y) = 0, \\ v_x(x,y) = 0, & v_y(x,y) = 2y. \end{array}$$

As derivadas parciais são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, pois

$$\begin{array}{l} u_y(x,y) = -v_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{C}, \\ u_x(x,y) = v_y(x,y) \Leftrightarrow x = y. \end{array}$$

Portanto, f é diferenciável apenas nos pontos da forma $z = (x,x)$ e, além disso, $f'(z) = 2x$.

Exemplo 3.6.3. Seja $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$. Veremos que é possível escrever $f'(z) = 3x^2$ apenas quando $z = i$.

Assim, como $u(x,y) = x^3$ e $v(x,y) = (1-y)^3$, então

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 3x^2, & u_y(x,y) = 0, \\ v_x(x,y) = 0, & v_y(x,y) = -3(1-y)^2. \end{array}$$

Porém, as equações de Cauchy-Riemann serão válidas apenas quando $(x,y) = (0,1)$, pois

$$u_y(x,y) = v_x(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{C},$$

mas

$$u_x = v_y \Leftrightarrow x^2 = -(1-y)^2.$$

Assim, como as equações de Cauchy-Riemann são válidas apenas para $x = 0$ e $y = 1$, temos que f é diferenciável apenas em $z = (0,1) = i$ e além disso $f'(z) = 3x^2$.

3.7 Equações de Cauchy-Riemann para coordenadas polares

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, uma função diferenciável em z_0. Usando que em vista

$$x = r\cos\theta \ \text{ e } \ y = r\,\text{sen}\,\theta, \tag{3.16}$$

$f(z)$ também pode ser dada por

$$f(z) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) + iv(x(r,\theta), y(r,\theta)).$$

Da identidade 3.16, podemos escrever as derivadas parciais de x e y em relação a r e θ:

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u_x(x,y)\cos\theta + u_y(x,y)\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -u_x(x,y)r\,\text{sen}\,\theta + u_y(x,y)r\cos\theta,$$

$$\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = v_x(x,y)\cos\theta + v_y(x,y)\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -v_x(x,y)r\,\text{sen}\,\theta + v_y(x,y)r\cos\theta.$$

Se a função $f(z)$ possui derivada em um ponto z_0, então as derivadas parciais de u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann neste ponto, e assim, em vista das identidades acima, temos as seguintes relações no ponto (r, θ):

$$ru_r = v_\theta \text{ e } u_\theta = -rv_r. \tag{3.17}$$

O obtido em 3.17 resulta no que chamamos de *forma polar das equações de Cauchy-Riemann*. Este resultado nos permite enunciar o teorema a seguir.

Teorema 13. *Seja a função $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ definida em uma vizinhança de um ponto z_0, e suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de u e v em relação a r e θ existam em toda esta vizinhança. Se estas derivadas parciais são contínuas em (r_0, θ_0) e satisfazem a forma polar das equações de Cauchy-Riemann, então $f'(z_0)$ existe e é dada por*

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0)).$$

Através do Teorema anterior, mostraremos que as funções dos exemplos a seguir são diferenciáveis em seus respectivos domínios.

Exemplo 3.7.1. Seja $f(z) = \sqrt{r}ei^{\frac{\theta}{2}}$ $(r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$. Então,

$$f(z) = \sqrt{r}ei^{\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = r^{1/2}\cos\frac{\theta}{2} + ir^{1/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}.$$

Assim, $u(r,\theta) = r^{1/2}\cos\dfrac{\theta}{2}$, $v(r,\theta) = r^{1/2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\theta}{2}$ e as derivadas parciais são

$$u_r = \frac{1}{2}r^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2}, \quad u_\theta = \frac{-1}{2}r^{1/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2},$$

$$v_r = \frac{1}{2}r^{-1/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}, \quad v_\theta = \frac{1}{2}r^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Verificamos as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} ru_r &= \frac{rr^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} &= \frac{r^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} = v_\theta, \\ -rv_r &= \frac{-rr^{-1/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}{2} &= u_\theta, \end{aligned}$$

e, portanto, $f'(z)$ existe em todo seu domínio.

Exemplo 3.7.2. Seja $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,(\ln r)$.

Suas funções componentes serão $u(r,\theta) = e^{-\theta}\cos(\ln r)$ e $v(r,\theta) = e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,(\ln r)$. Encontrando as derivadas parciais:

$$u_r = -e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,(\ln r)\frac{1}{r}, \qquad u_\theta = -\cos(\ln r)e^{-\theta},$$

$$v_r = e^{-\theta}\cos(\ln r)\frac{1}{r}, \qquad v_\theta = -e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,(\ln r).$$

As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para qualquer ponto no domínio. Portanto, $f(z)$ é diferenciável.

3.8 Funções Analíticas

Definição 10. *Dizemos que uma função em uma variável complexa f é analítica em um dado conjunto aberto se ela possui derivada em todos os pontos deste conjunto. Mais ainda, f será analítica em um ponto apenas se for analítica em alguma vizinhança deste ponto.*

Uma função será dita *inteira* se for analítica em todo o plano complexo.

Definição 11. *Se uma função é analítica em algum ponto para toda vizinhança de um ponto z_0, mas não em z_0, então z_0 é um ponto singular, ou singularidade de f.*

Por exemplo, como a derivada de um polinômio existe em qualquer ponto do plano, então toda função polinomial é inteira.

Pelos resultados obtidos a respeito de diferenciabilidade, temos que a soma e o produto de duas funções analíticas em um conjunto serão analíticas neste conjunto, assim como sua composição será também analítica neste mesmo conjunto. Seu quociente será analítico quando o denominador for não nulo.

Teorema 14. *Considere o domínio D e a função $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, então f(z) é constante em D.*

Demonstração. Vamos provar que, fixados dois pontos $p, q \in D$ tais que $\overline{pq} \subset D$, então $f(p) = f(q)$, isto é, f é constante em D.

Como D é conectado, sabemos que para dois pontos $p, q \in D$ fixados existem uma poligonal, denotada por L, e pontos $z_0, ..., z_n$, com $z_0 = p$ e $z_n = q$, tais que L é decomposta em segmentos da forma $\overline{z_{i-1}z_i}$ para $i = 1, ..., n$.

Logo, é suficiente demonstrar que $f(z_i) = f(z_{i+1})$ para cada segmento de reta da poligonal L.

Do estudo de Análise na Reta, temos que se $f : I \to \mathbb{R}$ é tal que $f'(x) = 0,\ x \in I$, no qual I é um intervalo, então f é constante neste intervalo. Utilizaremos este resultado em seguida.

Sejam $z_i = (a, b)$, $z_{i+1} = (c, d)$. O segmento $\overline{z_i z_{i+1}}$ pode ser parametrizado como

$$(x, y) = (a, b) + t(c - a, d - b), \quad t \in [0, 1],$$

cujas equações paramétricas são escritas na forma

$$\begin{cases} x(t) = a + t(c - a), \\ y(t) = b + t(d - b), \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Desta forma, $\overline{z_i z_{i+1}}$ é dado por $\gamma(t) = \{(a+t(c-a), b+t(d-b)),\ t \in [0, 1]\}$. Observe que como $f(\gamma(t)) : I \to \mathbb{C}$ é definida em um intervalo I, então $f(\gamma(t)) = u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))$, nos quais $u(\gamma(t)) : I \to \mathbb{R}$ e $v(\gamma(t)) : I \to \mathbb{R}$. Portanto, basta provarmos que $u'(\gamma(t)) = v'(\gamma(t)) = 0$.

De fato, note que

$$u'(\gamma(t)) = \nabla u(\gamma(t))\gamma'(t) = 0,$$

uma vez que

$$\nabla u(h,k) = (u_x(h,k), u_y(h,k)) = (0,0), \quad \forall (h,k) \in D.$$

Assim, $u(\gamma(t))$ é constante ao longo de $\overline{z_i z_{i+1}}$. De forma análoga obtemos o mesmo resultado para $v(\gamma(t))$. Portanto, $f(\gamma(t))$ é constante ao longo deste segmento.

Repetindo os argumentos utilizados anteriormente para cada segmento de reta de L, obtemos que f é constante ao longo de L. Mas como a poligonal L é qualquer, então concluímos que a função f é constante em D.

$\square$

Exemplo 3.8.1. Seja $f(z) = 2xy + i(x^2+y^2)$. Veremos que f não é analítica em nenhum ponto. Assim, para $u(x,y) = 2xy$ e $v(x,y) = x^2+y^2$,

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 2y, \quad u_y(x,y) = 2x,\\ v_x(x,y) &= 2x, \quad v_y(x,y) = 2y. \end{aligned}$$

Porém, as equações de Cauchy-Riemann serão satisfeitas apenas para valores sobre o eixo imaginário, isto é $z = (0,y)$, ou seja, não existe vizinhança para estes valores na qual f seja analítica. Portanto, f não é analítica.

Exemplo 3.8.2. Seja $f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$. Mostraremos que f é uma função inteira.

Relembrando que para $y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

então

$$f(z) = \operatorname{sen} x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

com as funções componentes dadas por

$$u(x,y) = \operatorname{sen} x \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ e } v(x,y) = \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Desta forma,

$$u_x = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad u_y = \operatorname{sen} x \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

$$v_x = -\operatorname{sen} x \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad v_y = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

e assim as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para quaisquer x, y. Também podemos notar que as derivadas parciais são contínuas em todo o plano complexo, fazendo com que a função f seja analítica no plano todo, ou seja, f é uma função inteira.

Exemplo 3.8.3. Para $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$, encontraremos seus pontos singulares. Como numerador e denominador são polinômios, para que f seja analítica precisamos que o valor do denominador seja não nulo.

$$z(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z^2+1 = 0.$$

Porém, $z^2+1=0$ quando $z = \pm i$. Assim, as singularidades da função f são os ponto 0 e $\pm i$.

3.9 Funções Harmônicas

Seja H uma função de duas variáveis reais x e y. H é dita *harmônica* se, em um dado domínio do plano xy, possui derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas e satisfaz a *equação de Laplace*, dada por

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = 0. \tag{3.18}$$

Note que não estamos tratando de funções de uma variável complexa, mas sim de funções de duas variáveis reais. Vejamos agora um resultado que relaciona as funções componentes de uma função de variável complexa com o conceito de harmonicidade.

Teorema 15. *Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é uma função uma de variável complexa analítica em um domínio D, então suas funções componentes são harmônicas em D.*

Para a demonstração deste Teorema é necessário lembrarmos de um resultado importante estudado no cálculo garantindo que a continuidade das derivadas parciais de $u(x,y)$ e $v(x,y)$ implica que $u_{xy}(x,y) = u_{yx}(x,y)$ e $v_{xy}(x,y) = v_{yx}(x,y)$.

Demonstração. Se f é analítica, então as derivadas parciais satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y).$$

Derivando as derivadas parciais em relação a x, temos

$$u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y), \qquad u_{yx}(x,y) = -v_{xx}(x,y).$$

Fazemos o mesmo em relação a y e obtemos

$$u_{xy}(x,y) = v_{yy}(x,y), \qquad u_{yy}(x,y) = -v_{xy}(x,y).$$

Porém, como $u_{xy}(x,y) = u_{yx}(x,y)$ e $v_{xy}(x,y) = v_{yx}(x,y)$, então

$$u_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y) \Rightarrow u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0.$$

Da mesma forma,

$$v_{xx}(x,y) = -v_{yy}(x,y) \Rightarrow v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0.$$

Portanto, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são harmônicas em D.

□

Se duas funções u e v são harmônicas em um domínio D e suas derivadas parciais de primeira ordem satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, então v é chamada *conjugada harmônica* de u.

Teorema 16. *Uma função f é analítica em D se, e somente se v é conjugada harmônica de u.*

O Teorema é facilmente provado observando que, se v é conjugada harmônica de u, então f é analítica. E também, se f é analítica, sabemos que u e v são harmônicas e que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

Porém, se v é conjugada harmônica de u em um domínio, isto não significa que necessariamente u seja conjugada harmônica de v neste domínio.

A equação de Laplace pode também ser escrita em sua forma polar. Para a função $u(r,\theta)$, por exemplo, a equação de Laplace em sua forma polar é dada por

$$r^2 u_{rr}(r,\theta) + r u_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0. \tag{3.19}$$

Se $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ é uma função analítica em um domínio D que não inclui a origem, utilizando as equações de Cauchy-Riemann para coordenadas polares e assumindo a continuidade de derivadas parciais contínuas, mostraremos que u e v satisfazem a forma polar da equação de Laplace.

Se $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ satisfazem Cauchy-Riemann, então

$$r u_r = v_\theta \quad \text{e} \quad u_\theta = -r v_r.$$

Se derivarmos ambos os lados da primeira igualdade em relação a r e da segunda igualdade em relação a θ, ficamos com

$$\frac{u_{\theta\theta}}{r} = -v_{r\theta} \quad \text{e} \quad u_r + r u_{rr} = v_{\theta r}.$$

Mas com as condições dadas, $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ e portanto,

$$\begin{aligned}
u_r + r u_{rr} \quad &= -\frac{u_{\theta\theta}}{r} \\
u_r + r u_{rr} + \frac{u_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\
r u_r + r^2 u_{rr} + u_{\theta\theta} &= 0.
\end{aligned}$$

Para obter o mesmo resultado para a função v, basta derivarmos ambos os lados da primeira igualdade em relação a θ e da segunda igualdade em relação a r.

Nos exemplos a seguir, provaremos a harmonicidade das seguintes funções nos seus respectivos domínios, assim como encontraremos suas respectivas conjugadas harmônicas.

Exemplo 3.9.1. Seja $u(x, y) = 2x(1 - y)$. As derivadas parciais de u são dadas por

$$u_x = 2 - 2y \text{ e } u_y = -2x \Rightarrow u_{xx} = 0 \text{ e } u_{yy} = 0.$$

Assim, vemos que a equação de Laplace é satisfeita e portanto, a função é harmônica. Através das equações de Cauchy-Riemann, temos que

$$u_x = v_y \text{ e } u_y = -v_x.$$

Portanto $v_y = 2 - 2y$ e $v_x = 2x$. Desta forma,

$$v(x, y) = \int v_y \, dy + \phi(x) = \int 2 - 2y \, dy + \phi(x) = 2y - y^2 + \phi(x).$$

Como $v_x = 2x$, então

$$\begin{aligned}
& \phi'(x) = 2x \\
\Rightarrow \quad & \phi(x) = x^2 + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante real.}
\end{aligned}$$

Finalmente, temos uma expressão para a função $v(x, y)$, que é dada por

$$v(x, y) = 2y - y^2 + x^2 + c.$$

Exemplo 3.9.2. Seja $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$. Analogamente ao exemplo anterior,

$$u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 \text{ e } u_y = 6xy \Rightarrow u_{xx} = -6x \text{ e } u_{yy} = 6x.$$

Claramente, a equação de Laplace é satisfeita, e então construímos v de forma que

$$u_x = v_y \text{ e } u_y = -v_x.$$

Assim, $v_y = 2 - 3x^2 + 3y^2$, portanto

$$v(x,y) = \int v_y \, dy + \phi(x) = \int 2 - 3x^2 + 3y^2 \, dy + \phi(x) = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x).$$

Mas se $v_x = -6xy$, então

$$\begin{aligned} & \phi'(x) = 6xy - 6xy = 0 \\ \Rightarrow \quad & \phi(x) = c, \text{ onde } c \text{ é uma constante real.} \end{aligned}$$

Portanto, já obtemos a expressão para a conjugada harmônica $v(x,y)$, que é dada por

$$v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + c.$$

3.10 Aplicações

Nesta seção, veremos brevemente algumas aplicações do estudo de funções analíticas complexas que nos permitem observar como os valores assumidos por uma função analítica em um domínio D são afetados por seus valores em um subdomínio ou segmento de reta em D.

Lema 1. *Seja f uma função em uma variável complexa e suponha que*

1. *f é analítica em um domínio D;*

2. *$f(z) = 0$ para cada ponto neste domínio ou em um segmento de reta contido em D.*

Então, $f(z) \equiv 0$ em D.

A demonstração do Lema pode ser encontrada em [C].

Corolário 1. *Suponha que duas funções f e g sejam analíticas em um domínio D e que $f(z) = g(z)$ para cada z em um domínio ou segmento de reta contido em D. Então, $f(z) = g(z)$, $\forall z \in D$.*

A demonstração do Corolário segue do Lema anterior. Basta definirmos $h(z) = f(z) - g(z)$. A diferença $f(z) - g(z)$ também é analítica e $h(z) = 0$ em um domínio ou segmento de reta contido em D. Portanto, pelo Lema, $h(z) = 0$, $\forall z \in D$, isto é, $f(z) = g(z)$ para cada $z \in D$.

O próximo resultado, conhecido como *Princípio da Reflexão*, nos mostra que algumas funções possuem como propriedade que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ em um domínio.

Teorema 17 (Princípio da Reflexão)**.** *Suponha que uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seja analítica no aberto conectado D que contém um segmento do eixo real I e cuja metade inferior seja o reflexo da metade superior em relação a este eixo. Então,*

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$$

para cada ponto $z \in D$ se, e somente se, $f(x)$ é real para cada $x \in I$.

Demonstração. Começamos a demonstração assumindo que $f(x)$ é real para cada x no segmento I. Mostraremos que a função $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é analítica em D. De fato, como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D, então

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \qquad u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

Escrevemos $F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = u(x, -y) - iv(x, -y)$ e obtemos as seguintes relações

$$\begin{array}{ll} U_x(x, y) = u_x(x, -y), & U_y(x, y) = -u_y(x, -y), \\ V_x(x, y) = -v_x(x, -y), & V_y(x, y) = v_y(x, -y). \end{array}$$

Mas por analiticidade da função f, temos que

$$\begin{array}{l} U_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = V_y(x, y), \\ U_y(x, y) = -u_y(x, -y) = v_x(x, -y) = -V_x(x, y). \end{array}$$

Portanto, $F(z)$ é analítica em D. Mais ainda, como $f(x)$ é real no segmento $I \subset D$, $v(x, 0) = 0$. Desta forma,

$$F(x) = U(x, 0) + iV(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0) = u(x, 0),$$

ou seja,

$$F(z) = f(z)$$

para cada ponto neste segmento. Assim, pelo Corolário 1, temos que esta igualdade se estende para todo $z \in D$, isto é, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, $\forall z \in D$.

Para demonstrar a recíproca, vamos supor que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, $\forall z \in D$. Então, para todo $z \in I$, $z = x + i0$,

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} = f(\overline{z}) \quad &\Rightarrow \overline{f(x)} = f(\overline{x}) \\ &\Rightarrow \overline{f(x)} = f(x). \end{aligned}$$

Porém, se um número complexo z é igual ao seu conjugado $\overline{z}$, então z é um número real. Desta forma, concluímos que $f(x)$ assume valores reais para todo x no intervalo $I \subset D$.

$\square$

Exemplo 3.10.1. Note que da demonstração do Teorema 17 segue que, se uma função $f(z)$ é inteira, então $\overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostraremos agora que a função $\overline{f(z)}$ é derivável em $z = 0$ se, e somente se, $f'(0) = 0$.

De fato, suponhamos que $\overline{f(z)} = U(x,y) + iV(x,y)$ seja derivável em $z = 0$. Então suas funções componentes $U(x,y) = u(x,y)$ e $V(x,y) = -v(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $(x,y) = (0,0)$, ou seja,

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= -v_y(x,y), \\ u_y(x,y) &= v_x(x,y). \end{aligned}$$

Como a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é inteira, suas funções componentes também satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $(x,y) = (0,0)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) = -v_y(x,y) &\Leftrightarrow u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0, \\ u_y(x,y) = v_x(x,y) = -v_x(x,y) &\Leftrightarrow u_y(x,y) = v_x(x,y) = 0, \end{aligned}$$

e portanto, concluímos que $f'(0) = 0$.

Provaremos a recíproca supondo que $f'(0) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 \quad &\Rightarrow u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_x(0,0) = 0, \\ v_x(0,0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por analiticidade da função f, temos que

$$u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0.$$

Note que as funções componentes de $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $(x,y) = (0,0)$. Desta forma, concluímos que $\overline{f(z)}$ é derivável em $z = 0$.

Como exemplo, temos que a função $f(z) = e^z \doteq e^x e^{iy}$ é inteira e assume valores reais para todo z no eixo real, pois e^z torna-se a função exponencial conhecida em uma variável real para $z = x + i0$, e além disso, $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo z no plano, pois

$$\overline{e^z} \doteq \overline{e^x e^{iy}} = e^x e^{-iy} = e^{\overline{z}}.$$

Estudaremos esta função de forma mais detalhada no início do capítulo 4.

Capítulo 4

Funções Elementares

Neste capítulo faremos o estudo de algumas funções elementares estudadas no cálculo, mas agora definidas para uma variável complexa.

4.1 Função Exponencial

Seja f a função exponencial definida em $\mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = e^z \doteq e^x e^{iy}. \tag{4.1}$$

Aqui, e^x é a função exponencial na variável real x e, pela função de Euler, $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Note que e^z é uma extensão natural da função real exponencial, isto é, $e^z = e^x$ quando $z = x + i0$.

4.1.1 Propriedades

1. Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sabemos que

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Como extensão, para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \tag{4.2}$$

De fato, se $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, então pela Definição 4.1,

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &\doteq e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} \\ &= e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} \\ &= e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} \\ &\doteq e^{z_1 + z_2}. \end{aligned}$$

2. Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, é válida a seguinte propriedade
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}. \tag{4.3}$$
De fato, utilizando novamente a definição, temos
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \doteq \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \frac{e^{iy_1}}{e^{iy_2}} = e^{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)} \doteq e^{z_1-z_2}.$$

3. De forma semelhante ao que é visto no cálculo, temos que para todo $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{d}{dz} e^z = e^z. \tag{4.4}$$
Além disso, $f(z) = e^z$ é inteira.

De fato, se $z = x + iy$, então
$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y.$$
Encontramos como funções componentes $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. As derivadas parciais são, portanto,
$$\begin{array}{ll} u_x(x, y) = e^x \cos y, & u_y(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y, \\ v_x(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, & v_y(x, y) = e^x \cos y. \end{array}$$
As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e as derivadas parciais são contínuas no plano, mostrando que $f(z)$ é diferenciável no plano. Portanto, $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$, ou seja, é inteira. Concluímos enfim que $f'(z)$ é dada por
$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) + i v_x(x, y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

4. A função exponencial nunca assume valor nulo, ou seja
$$e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$
Isto fica claro se escrevermos $e^z = re^{i\theta}$. Note que o raio de e^z é dado por
$$r = |e^z| = e^x \neq 0.$$
Como o raio de e^z é diferente de zero para todo z, então esta função nunca assume valor nulo.

5. A função $f(z) = e^z$ é periódica com período $2\pi i$.

   De fato, vemos que
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$
   pois $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$.

6. A função $f(z) = e^z$ também assume valores negativos. Ou seja, podemos encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = -k, k > 0$.

   Desta forma, se $e^z = -k$, então podemos escrever e^z como
$$e^z = e^x e^{iy} = k e^{i\pi},$$
   e, pela definição de igualdade, devemos ter
$$e^x = k \quad \text{e} \quad e^{iy} = e^{i\pi},$$
   ou seja,
$$x = \ln k \quad \text{e} \quad y = \pi + 2n\pi, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$
   Portanto, basta tomarmos $z = \ln k + i\pi(1 + 2n)$.

Exemplo 4.1.1. Segundo a Propriedade 3, a função $f(z) = e^z$ é inteira. Porém, veremos que a função $f(z) = e^{\overline{z}}$, que é contínua, não é diferenciável em nenhum ponto do plano.

De fato, se $z = x + iy$, escrevemos
$$e^{\overline{z}} = e^x e^{i(-y)} = e^x(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)) = e^x \cos y - i e^x \operatorname{sen} y$$
e obtemos como funções componentes
$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y,$$
de tal forma que obtemos as seguintes derivadas parciais:
$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = e^x \cos y, & u_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y, \\ v_x(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y, & v_y(x,y) = -e^x \cos y. \end{array}$$

Verificamos agora que as equações de Cauchy-Riemann não são válidas em nenhum ponto do plano, pois
$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) &\Leftrightarrow e^x \cos y = -e^x \cos y \\ &\Leftrightarrow \cos y = -\cos y \\ &\Leftrightarrow \cos y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad &\Leftrightarrow -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} y = -\operatorname{sen} y \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} y = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Teorema 11, concluímos que a função não é diferenciável em nenhum ponto.

4.2 Função Logarítmica

Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^z = w, \ w \neq 0.$$

O que faremos agora é procurar uma função inversa da exponencial complexa inspirados na função logarítmica para valores reais, isto é, vamos definir a função $\log w = z$ de forma que $e^z = w$.

Para $w = re^{i\theta}$ e $z = x + iy$, temos

$$
\begin{aligned}
e^z = w \quad &\Rightarrow e^x e^{iy} = re^{i\theta} \\
&\Rightarrow e^x = r \ \text{ e } \ e^{iy} = e^{i\theta} \\
&\Rightarrow x = \ln r \ \text{ e } \ y = \theta + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Assim, como $z = \ln r + i(\theta + 2n\pi) = \ln r + i \arg z$, podemos definir a função $\log w$ como

$$\log w \doteq \ln r + i \arg z. \tag{4.6}$$

Note que a função apresentada em 4.6 possui múltiplos valores, uma vez que os possíveis valores de $\arg z$ se diferem por múltiplos de 2π.

Desta forma, obtemos a relação

$$e^{\log z} = z. \tag{4.7}$$

Porém, observamos que $\log(e^z)$ não assume valor z, pois

$$
\begin{aligned}
\log(e^z) \quad &= \ln |e^z| + i \arg(e^z) \\
&= \ln(e^x) + i(y + 2n\pi), \ n \in \mathbb{Z} \\
&= x + iy + 2n\pi i \\
&= z + 2n\pi i.
\end{aligned}
$$

O valor principal de $\log z$, denotado por $\operatorname{Log} z$, é obtido para $n = 0$. Em 4.6, temos que $\arg z$ se reduz ao argumento principal de z, logo

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i \operatorname{Arg} z. \tag{4.8}$$

Note que neste caso deixamos de ter uma função de múltiplos valores, e que, para todo $z \neq 0$,

$$\log z = \text{ Log}\, z + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

Um ramo de uma função f de múltiplos valores é uma função F que é analítica em um domínio D no qual, para todo $z \in D$, $F(z)$ assume um dos valores de $f(z)$. Note que a função $F(z) = \text{Log}\, z$ é um ramo da função $f(z) = \log z$. Mais ainda, $\text{Log}\, z$ é chamada *ramo principal* da função $\log z$.

Vejamos que a função $\log z = \ln r + i\theta,\ \theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$, é analítica e mostraremos também o valor de $\dfrac{d}{dz} \log z$. Com as funções componentes

$$u(r,\theta) = \ln r \quad \text{e} \quad v(r,\theta) = \theta,$$

encontramos as seguintes derivadas parciais

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r}, \qquad u_\theta(r,\theta) = 0,$$

$$v_r(r,\theta) = 0, \qquad v_\theta(r,\theta) = 1,$$

que são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy Riemann na forma polar. Desta forma, podemos concluir que

$$\frac{d}{dz} \log z = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{re^{i\theta}},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0,\ \arg z \in (\alpha, \alpha + 2\pi), \tag{4.10}$$

e em particular,

$$\frac{d}{dz} \text{Log}\, z = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0,\ \text{Arg}\, z \in (-\pi, \pi).$$

4.2.1 Propriedades

1. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2. \tag{4.11}$$

2. Da mesma forma, para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2. \tag{4.12}$$

3. Para todo $z \neq 0$,
$$z^n = e^{n \log z}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$
Note que para $n = 1$ a igualdade anterior se reduz à 4.7.

É importante ressaltar que as propriedades anteriores não são em geral válidas para ramos da função logarítmica.

Exemplo 4.2.1. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. O produto entre estes é dado por

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Note que a propriedade em 4.11 nem sempre é válida para a função $\text{Log}\,(z_1 z_2)$, uma vez que

$$\begin{aligned} \text{Log}\,(z_1 z_2) &= \ln r_1 + \ln r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2N\pi) \\ &= \ln r_1 + i\theta_1 + \ln r_2 + i\theta_2 + 2N\pi i \\ &= \text{Log}\, z_1 + \text{Log}\, z_2 + 2N\pi i, \end{aligned}$$

onde $N = 0, \pm 1$, pois como

$$\text{Arg}\,(z_1) \in (-\pi, \pi] \text{ e } \text{Arg}\,(z_2) \in (-\pi, \pi],$$

então
$$\text{Arg}\,(z_1) + \text{Arg}\,(z_2) \in (-2\pi, 2\pi].$$
Desta forma, como $\text{Arg}\,(z_1 z_2) \in (-\pi, \pi]$ e $\text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2 + 2N\pi = \text{Arg}\,(z_1 z_2)$, temos que
$$-3\pi < 2N\pi \leq 3\pi \Rightarrow -3 < 2N \leq 3.$$
Mas como N é um inteiro, devemos ter $N = 0, \pm 1$.

4.3 Expoentes Complexos

Sejam $c, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. A função z^c é definida por
$$z^c \doteq e^{c \log z}. \tag{4.14}$$

Por exemplo, para $z = -1$ e $c = \dfrac{1}{\pi}$, temos

$$z^c = (-1)^{\frac{1}{\pi}} = e^{\frac{1}{\pi} \log(-1)} = e^{\frac{1}{\pi}[i(\pi + 2n\pi)]} = e^{(1+2n)i}.$$

Já foi visto que o ramo

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad \theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$$

da função logarítmica é uma função analítica em seu domínio e que assume um único valor para cada z. Para este ramo, temos que a função $z^c = e^{c \log z}$ também assume apenas um valor para cada z e é analítica neste mesmo domínio. Desta forma, podemos encontrar $\dfrac{d}{dz} z^c$:

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} e^{c \log z} = \frac{c}{z} e^{c \log z} = c \frac{e^{c \log z}}{e^{\log z}} = c e^{\log(z)(c-1)} = c z^{c-1}.$$

Dizemos que o valor principal de z^c ocorre quando temos $\log z = \operatorname{Log} z$. Assim, o ramo principal da função z^c é dado por

$$\text{V.P. } z^c = e^{c \operatorname{Log} z}.$$

Porém, para $c^z = e^{z \log c}$, encontramos

$$\frac{d}{dz} c^z = \frac{d}{dz} e^{z \log c} = e^{z \log c} \log c = c^z \log c.$$

4.4 Funções Trigonométricas

Pela fórmula de Euler, sabemos que, para $y \in \mathbb{R}$,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \text{ e } e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y,$$

assim,

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i \operatorname{sen} y \text{ e } e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y,$$

o que nos permite escrever

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Definimos agora as funções seno e cosseno de uma variável complexa como extensão do resultado obtido para uma variável real:

$$\operatorname{sen} z \doteq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \doteq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{4.15}$$

A derivada da função exponencial já foi estudada e nos permite encontrar

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z$$

Da definição, temos também que

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \text{ e } \cos(-z) = \cos z.$$

Vejamos agora algumas identidades envolvendo as funções seno e cosseno.

1. $2\,\text{sen}\, z_1 \cos z_2 = \text{sen}\,(z_1+z_2) + \text{sen}\,(z_1-z_2)$.

2. $\begin{cases} \text{sen}(z_1+z_2) & = \text{sen}\, z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \,\text{sen}\, z_2, \\ \cos(z_1+z_2) & = \cos z_1 \cos z_2 - \text{sen}\, z_1 \,\text{sen}\, z_2. \end{cases}$

3. $\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$. De fato, por definição,

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2 - (e^{iz}-e^{-iz})^2}{4} \\ &= \frac{2e^{iz}e^{-iz} + 2e^{iz}e^{-iz}}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. $\text{sen}\, 2z = 2\,\text{sen}\, z \cos z, \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \text{sen}^2 z.$

5. $\text{sen}\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \qquad \text{sen}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z.$

Podemos definir outras quatro funções trigonométricas em função de seno e cosseno:

$$\text{tg}\, z \doteq \frac{\text{sen}\, z}{\cos z},\ \ \text{cotg}\, z \doteq \frac{\cos z}{\text{sen}\, z},\ \ \sec z \doteq \frac{1}{\cos z},\ \ \text{cossec}\, z \doteq \frac{1}{\text{sen}\, z},$$

cujas derivadas são dadas respectivamente por

$$\frac{d}{dz}\,\text{tg}\, z = \sec^2 z, \qquad \frac{d}{dz}\,\text{cotg}\, z = -\,\text{cossec}^2 z,$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z\,\text{tg}\, z, \qquad \frac{d}{dz}\,\text{cossec}\, z = -\,\text{cossec}\, z\,\text{cotg}\, z.$$

Capítulo 5

Integração

Introduzimos este capítulo com algumas definições referentes à integração de funções em uma variável real a valores complexos. Em seguida, serão apresentados resultados a respeito da integração de funções em uma variável complexa definidas em curvas no plano complexo.

5.1 Derivação e integração de funções a valores complexos

Seja $w(t) : I \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ uma função dada por $w(t) = u(t) + iv(t)$, $u, v : I \longmapsto \mathbb{R}$, $I = [a, b]$. Definimos a derivada $w'(t)$ por

$$w'(t) \doteq u'(t) + iv'(t).$$

Definição 12. *Seja $w(t)$ como definido anteriormente. Então,*

$$\int_a^b w(t)\, dt \doteq \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt, \tag{5.1}$$

desde que cada integral exista.

Da definição anterior, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_a^b w(t)\, dt &= \int_a^b \operatorname{Re} w(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt, \\ \operatorname{Im} \int_a^b w(t)\, dt &= \int_a^b \operatorname{Im} w(t)\, dt = \int_a^b v(t)\, dt. \end{aligned}$$

É importante observar que uma condição para que uma função f seja integrável em $I = [a, b]$ é que f seja *contínua por partes* em I, isto é, $\exists\ t_1, t_2, ..., t_{n-1} \in I$ tais que $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$ e f contínua em $]t_{i-1}, t_i[$.

5.1.1 Propriedades

Vejamos agora algumas propriedades referentes à integração de parametrizações como apresentadas anteriormente.

1. Seja $c \in]a, b[$. Então,
$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^c w(t)\,dt + \int_c^b w(t)\,dt.$$

2. Se $U(t) = \int u(t)\,dt$ e $V(t) = \int v(t)\,dt$, então
$$U(t) + iV(t) = \int w(t)\,dt.$$

3. Para $a \leq b$, temos
$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|\,dt, \tag{5.2}$$
no qual $\displaystyle\int_a^b |w(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}\,dt.$

Exemplo 5.1.1. Utilizando a Definição 12, calculamos o valor da integral $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{i2t}\,dt.$

Para $w(t) = e^{i2t}$, temos $u(t) = \cos(2t)$ e $v(t) = \operatorname{sen}(2t)$. Assim,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} e^{i2t}\,dt &= \int_0^{\pi/6} \cos(2t)\,dt + i\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(2t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\Big]_0^{\pi/6} + \frac{i}{2}\left[-\cos(2t)\right]\Big]_0^{\pi/6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.1.2. Sejam as funções dadas por
$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\theta)^n\,d\theta, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Mostraremos que para todo $x \in [-1,1]$, $|P_n(x)| \leq 1$.

De fato, pela Propriedade 5.2,

$$\begin{aligned} |P_n(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n \, d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n \right| \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta \right|^n \, d\theta. \end{aligned}$$

Note que o termo $\left| x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta \right|$ pode ser escrito como

$$\sqrt{x^2 + (\sqrt{1-x})^2\cos^2\theta} = \sqrt{x^2(1-\cos^2\theta) + \cos^2\theta} = \sqrt{x^2 \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}.$$

Mas como $x \in [-1,1]$,

$$\sqrt{x^2 \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta} \leq \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta} = 1.$$

Desta forma,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta \right|^n \, d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1^n \, d\theta = 1.$$

5.2 Arcos e contornos

A integração de funções em uma variável complexa é definida sobre curvas no plano complexo. Vejamos agora algumas definições relevantes.

Definição 13. *Um conjunto de pontos $\gamma = \{z = (x,y)\} \subset \mathbb{C}$ é dito ser um arco, ou contorno, se $x = x(t), y = y(t)$ para $t \in [a,b]$ no qual $x(t), y(t)$ são funções contínuas.*

Um arco é chamado *simples*, ou *arco de Jordan*, quando não possui interseção própria, isto é,

$$z(t_1) \neq z(t_2), \quad \forall\, t_1 \neq t_2.$$

Porém, se o arco simples γ é tal que $z(a) = z(b)$, então dizemos que γ é uma curva simples *fechada*, ou *curva de Jordan*.

Definição 14. *Um arco γ é um arco por partes quando γ é dado pela justaposição finita de arcos.*

Seja γ um arco parametrizado da forma

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b].$$

γ é chamado um *arco derivável* quando $z(t)$ é derivável. Para

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

$x'(t), y'(t)$ contínuas em $[a, b]$, temos que

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

Assim, o comprimento L do arco γ é dado por

$$L = \int_a^b |z'(t)| \, dt. \tag{5.3}$$

Exemplo 5.2.1. O arco γ dado por

$$z(\theta) = e^{i\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi]$$

é uma curva simples e fechada. Fazendo uso de 5.3, mostramos que o perímetro L do círculo unitário é dado por $L = 2\pi$.

De fato, se $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, então

$$L \ = \int_0^{2\pi} |(e^{i\theta})'| \, d\theta = \int_0^{2\pi} | - \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta| \, d\theta = \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi.$$

5.3 Integração complexa em curvas

Nesta seção, veremos a definição da integração de funções em uma variável complexa, assim como algumas de suas propriedades.

Seja a função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ e γ um arco tal que $\gamma \subset \mathbb{C}$. Suponhamos que γ seja parametrizada por $z(t)$ para $t \in [a, b]$, onde $z(a) = z_1$ e $z(b) = z_2$, e que

$$f(\gamma) = (f \circ z)(t) = f(z(t)) \doteq w(t)$$

seja contínua por partes. Temos a seguinte definição.

Definição 15. *Sejam γ e f como anteriormente. A integral de linha ou integral de contorno de f ao longo de γ é definida por*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \doteq \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.$$

5.3.1 Propriedades

1. Seja f uma função em uma variável complexa e $\gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva formada pela união $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Então,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

2. Seja γ um contorno suave parametrizado por $\gamma = z(t), t \in [a,b]$. Então, por 5.2,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt.$$

Note que se f é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \gamma$, então podemos fazer o controle da integral da seguinte forma:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt \leq M\int_a^b |z'(t)|\,dt \leq ML, \tag{5.4}$$

no qual L denota o comprimento do arco γ.

3. Seja z_0 uma constante complexa. Segue que

$$\int_\gamma z_0 f(z)\,dz = z_0\int_\gamma f(z)\,dz.$$

4. Sejam f, g funções em uma variável complexa. Então,

$$\int_\gamma [f(z) + g(z)]\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz.$$

5. Seja $\gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva parametrizada por $z(t)$, $t \in [a,b]$, e $-\gamma$ uma curva consistindo no mesmo conjunto de pontos, porém parametrizada por $z(-t)$. Então,

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Exemplo 5.3.1. Seja $f(z) = \dfrac{1}{z}$ e γ o semicírculo de centro $z = (0,0)$ e raio 2 definido no intervalo $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Note que a curva γ pode ser parametrizada por

$$z(t) = 2e^{it}, \quad t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pela Definição, podemos calcular o valor de $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$. Desta forma, temos

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz \doteq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2e^{it}} \left(2e^{it}\right)'\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} e^{-it} 2ie^{it}\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i\, dt = i\pi.$$

Exemplo 5.3.2. Seja $f(z) = \begin{cases} 1, \ y < 0, \\ 4y, \ y > 0, \end{cases}$ $z = x + iy$. Vamos calcular $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$, onde C é o arco de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$ sobre a curva $y = x^3$.

Para isso, vamos primeiramente decompor o arco C em $C = \gamma_1 \cup \gamma_2$ de tal forma que, para C dado por $z(t) = t + it^3$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{z_1 \in \mathbb{C} : z_1 = t + it_3, \ t \in [-1, 0]\}, \\ \gamma_2 &= \{z_2 \in \mathbb{C} : z_2 = t + it_3, \ t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Para a primeira integral, $f(z) = 1$ e temos

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{-1}^{0} 1 + i3t^2\, dt = \int_{-1}^{0} 1\, dt + i \int_{-1}^{0} 3t^2\, dt = 1 + i.$$

Analogamente, para a segunda integral, $f(z) = 4y$ e

$$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_0^1 4t^3(1 + 3it^2)\, dt = 4 \int_0^1 t^3\, dt + 12i \int_0^1 t^5\, dt = 1 + 2i.$$

Portanto, concluímos que

$$\int_C f(z)\, dz = 2 + 3i.$$

Capítulo 6

Teoremas de Cauchy

A teoria de integração complexa foi profundamente desenvolvida durante o século XIX graças ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Introduzimos neste capítulo alguns de seus resultados mais importantes no estudo de análise complexa.

6.1 Teorema de Cauchy-Goursat

Sejam γ um arco simples e fechado orientado no sentido positivo dado por $z(t) = x(t) + iy(t)$ e $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $\overline{R} \doteq int\gamma \cup \partial\gamma$, no qual $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Vamos calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$.

Note que, para $f(z(t)) = f(x(t) + iy(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, dz &\doteq \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]\, dt \\
&= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}\, dt \\
+ &\quad i\left[\int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}\, dt\right] \\
&= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.
\end{aligned}$$

A notação anterior foi utilizada convenientemente, de tal forma que aplicaremos o Teorema de Green, enunciado a seguir.

Teorema 18 (Teorema de Green)**.** *Seja γ como anteriormente. Se P, Q são funções de classe C^1 definidas em $\overline{R}$, então*

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y)\, dx\, dy. \tag{6.1}$$

Aplicando o Teorema, temos que

$$\int_\gamma u dx - v dy = \iint_R (-v_x - u_y)\, dx\, dy = 0,$$

pois a função f é analítica em $\Omega \supset \overline{R} \supset R$, ou seja, as condições de Cauchy-Riemann são válidas $\forall (x, y) \in R$. Analogamente,

$$\int_\gamma v dx + u dy = \iint_R (u_x - v_y)\, dx\, dy = 0.$$

Desta forma, concluímos que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

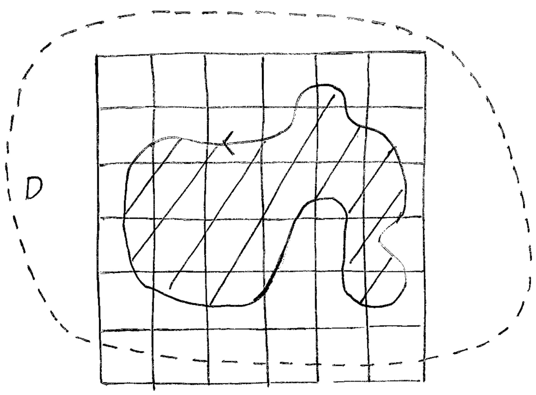
O resultado anterior utiliza como hipóteses que f é analítica e que as funções componentes da f são de classe C^1. Este resultado foi obtido por Augustin-Louis Cauchy no início do século XIX. Porém, em 1900 Edouard Goursat (1858–1936) mostrou que o resultado é válido utilizando como hipótese apenas a analiticidade da função f. Mais adiante, mostraremos que se f é analítica, então suas funções componentes são de classe C^∞. Desta forma, o resultado obtido por Cauchy foi revisado e é conhecido como o *Teorema de Cauchy-Goursat*, enunciado a seguir.

Teorema 19 (Teorema de Cauchy-Goursat)**.** *Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica no interior e sobre um contorno simples e fechado γ. Então*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0. \tag{6.2}$$

A demonstração feita por Goursat será apresentada a seguir.

Demonstração. Iniciaremos a demonstração com um lema. Mas para isso, primeiramente subdividimos a região $R \doteq int\gamma \cup \partial\gamma$ em um reticulado, isto é, em um número finito de quadrados desenhando linhas igualmente espaçadas e paralelas aos eixos real e imaginário. Nos referimos ao interior do quadrado unido à sua fronteira apenas como *quadrado*.



Note que alguns quadrados podem não estar inteiramente contidos em R. Neste caso, removemos os pontos não pertencentes a R e denominamos o restante por *quadrado parcial*. Nós então cobrimos a região R com um número finito de quadrados e quadrados parciais.

Lema 2. *Seja f analítica em R. Para todo $\varepsilon > 0$, R pode ser coberta com um número finito de quadrados e quadrados parciais, indexados por $j = 1, 2, ..., n$, tais que em cada um existe z_j fixado para o qual a desigualdade*

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \quad (z \neq z_j) \tag{6.3}$$

é satisfeita para todos os outros pontos naquele quadrado ou quadrado parcial.

Prova do Lema: Considere a possibilidade de que na construção dos quadrados ou quadrados parciais, para algum deles, não existe z_j tal que 6.3 seja satisfeita, para todo z contido naquele quadrado ou quadrado parcial.

Se a região é um *quadrado*, subdividimos em quatro quadrados menores. Se a região é um *quadrado parcial*, tratamos da mesma forma e depois excluímos a região não contida em R. Se após a divisão ainda não existir z_j como desejamos, repetimos o procedimento.

Afirmação: Após um número finito de passos, R pode ser coberta com um número finito de quadrados e quadrados parciais tais que o lema será válido.

Justificativa: Vamos supor que os pontos z_j não existem após subdividir a região em um número finito de vezes e vamos chegar em uma contradição.

Denotamos uma região por q_0 se ela é um quadrado; se é um quadrado parcial, q_0 denota o quadrado completo do qual a região faz parte.

Após subdividir q_0, pelo menos um dos quadrados menores (q_1) deve conter pontos em R, mas nenhum z_j apropriado como procuramos. Então, subdividimos q_1 e assim por diante. Depois que o quadrado q_{k-1} foi subdividido, haverá mais do que um quadrado menor que pode ser escolhido.

Sem perda de generalidade, podemos escolher especificamente o quadrado q_k no inferior e à esquerda. Formamos assim a seguinte sequência infinita:

$$q_0,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{k-1},\ q_k,\ \cdots$$

para os quais temos a relação:

$$q_0 \supset q_1 \supset q_2 \supset \ldots \supset q_{k-1} \supset q_k \supset \ldots$$

Note que a sequência acima é formada por conjuntos fechados e não vazios. Vamos enunciar agora um resultado que permite garantir a existência de um ponto z_0 comum a todos os quadrados. Além disso, cada quadrado contém pontos de R.

Corolário 2. *Se $\{K_n\}$ é uma sequência de conjuntos compactos não vazios, tais que $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ é não vazia.*

Este resultado segue do Teorema 2.36 enunciado e demonstrado na página 40 da referência [R].

Note que os perímetros dos quadrados q_j, $j = 1, 2 \ldots$, em sequência são decrescentes, e que qualquer δ tal que $|z - z_0| < \delta$ contém tais quadrados a partir de um z_j para o qual suas diagonais são menores que δ.

Por definição, um ponto é chamado *ponto de acumulação* de um conjunto se cada vizinhança deste ponto contém ao menos um ponto do conjunto. Como cada vizinhança toma pontos em R, então z_0 é um ponto de acumulação de R. Note que $z_0 \in R$, pois R é um conjunto fechado. Mas como f é analítica em R, então particularmente f é analítica em z_0, ou seja, $\exists f'(z)$.

Desta forma, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

para todo $z \neq z_0$ neste vizinhança.

Porém, a vizinhança $|z - z_0| < \delta$ contém um quadrado q_L para L grande o suficiente tal que a diagonal de q_L é menor que δ. Assim, se fixarmos $z_j = z_0$, a desigualdade 6.3 é satisfeita na região do quadrado q_L. Ou seja, não será necessário subdividir q_L. Note que chegamos em uma contradição, pois a sequência de quadrados formada será finita. Desta forma, o lema está provado.

Voltamos então à demonstração do Teorema.

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos a divisão de R como no lema. Definimos então sobre o j-ésimo quadrado a seguinte função:

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j), & z \neq z_j, \\ 0, & z = z_j. \end{cases}$$

Note que pela desigualdade 6.3,

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon,$$

para todo z contido na sub-região na qual $z_j(z)$ está definida. Além disso, $\delta_j(z)$ é contínua nesta sub-região, uma vez que $f(z)$ é contínua e

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_j} \delta_j(z) &= \lim_{z\to z_j} \left[\frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j)\right] \\ &= \lim_{z\to z_j} \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - \lim_{z\to z_j} f'(z_j) \\ &= f'(z_j) - f'(z_j) = 0. \end{aligned}$$

Em seguida, seja γ_j, $j = 1, 2, ..., n$, as fronteiras dos quadrados ou quadrados parciais cobrindo R, orientadas no sentido positivo (anti-horário). O valor da f em um ponto $z \neq z_j$ para um γ_j particular pode ser escrito como:

$$\delta_j(z) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \Leftrightarrow \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} = \delta_j(z) + f'(z_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z) &= (z - z_j)[\delta_j(z) + f'(z_j)] + f(z_j) \\ &= z\delta_j(z) + zf'(z_j) - z_j\delta_j(z) - z_j f'(z_j) + f(z_j) \\ &= f(z_j) - z_j f'(z_j) + zf'(z_j) + (z - z_j)\delta_j(z). \end{aligned}$$

E portanto,

$$\int_{\gamma_j} f(z)\, dz = \int_{\gamma_j} f(z_j) - z_j f'(z_j) + zf'(z_j) + (z - z_j)\delta_j(z)\, dz$$

$$= f(z_j)\int_{\gamma_j} dz - z_j f'(z_j)\int_{\gamma_j} dz + f'(z_j)\int_{\gamma_j} z\, dz + \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)\, dz.$$

Entretanto, observe que, para um contorno fechado arbitrário $C : z(t), t \in [a, b]$, no qual $z(a) = z(b)$, temos

$$\int_C dz = \int_a^b z'(t)\,dt = z(b) - z(a) = 0.$$

Analogamente, através de uma mudança de variável, obtemos que

$$\int_C z\,dz = \int_a^b z(t)z'(t)\,dt = \frac{[z(b)]^2 - [z(a)]^2}{2} = 0.$$

Portanto,

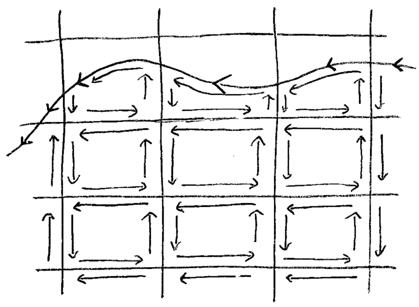
$$\int_{\gamma_j} dz = \int_{\gamma_j} z\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Assim, a soma de todas as n integrais será

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz,$$

pois a integral sobre um lado comum a dois quadrados se cancela e resta apenas a integral sobre a curva.



Como $\displaystyle\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz, \quad j = 1, 2, ..., n$, então

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz,$$

e assim,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{\gamma_j}(z-z_j)\delta_j(z)\,dz\right|.$$

Utilizando propriedades de integração, vamos limitar cada valor do módulo na desigualdade acima. Lembramos que cada γ_j coincide inteiramente ou parcialmente com a fronteira de um quadrado.

Seja s_j o tamanho do lado do quadrado. Na j-ésima integral, ambos z e z_j ficam inteiramente contidos no quadrado ou quadrado parcial, pois é nesta etapa que paramos de dividir o quadrado. Desta forma, a distância entre z e z_j não excede o valor da diagonal do quadrado, dada por $\sqrt{2}s_j$, ou seja,

$$|z-z_j| \leq \sqrt{2}s_j.$$

Como $|\delta_j(z)| < \varepsilon$, então

$$|z-z_j||\delta_j(z)| < \sqrt{2}s_j\varepsilon.$$

Note que o objetivo é controlar a integral $\displaystyle\int_{\gamma_j}(z-z_j)\delta_j(z)\,dz$. Vamos utilizar a desigualdade 5.4, pela qual sabemos que, para a função $g(z) = (z-z_j)\delta_j(z)$ contínua no compacto R,

$$\left|\int_{\gamma_j} g(z)\,dz\right| \leq ML.$$

Para um quadrado, temos do anterior que

$$\begin{cases} M &= \sqrt{2}s_j\varepsilon, \\ L &= 4s_j \text{ (perímetro do quadrado),} \end{cases}$$

e assim,

$$\left|\int_{\gamma_j}(z-z_j)\delta_j(z)\,dz\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon 4s_j = 4\sqrt{2}A_j\varepsilon,$$

no qual A_j denota a área do quadrado.

No caso de um quadrado parcial, seu perímetro não excede $4s_j + L_j$, no qual L_j é o comprimento da curva que é parte de γ_j e também de γ. Novamente, para A_j denotando a área total do quadrado, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_j}(z-z_j)\delta_j(z)\,dz\right| &< \sqrt{2}s_j\varepsilon(4s_j + L_j) \\ &< 4\sqrt{2}A_j\varepsilon + \sqrt{2}SL_j\varepsilon,\end{aligned}$$

no qual S é o lado de um quadrado que engloba γ assim como todos os quadrados que foram utilizados inicialmente para cobrir a região R. Assim, a soma de todos os A_j não excede S^2.

Se L denota o comprimento de γ, então

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &\leq \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{\gamma_j}(z-z_j)\delta_j(z)\,dz\right| \\ &\leq (4\sqrt{2}S^2+\sqrt{2}SL)\varepsilon.\end{aligned}$$

Uma vez que o valor de ε é arbitrário, este pode ser escolhido de forma que $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|$ seja tão pequeno quanto se queira.

Desta forma, concluímos que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

$\square$

Enunciaremos brevemente dois resultados que aparecem como consequência do Teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema 20. *Sejam C um contorno simples e fechado, orientado no sentido positivo, e C_k $(k = 1, 2, ..., n)$ contornos simples e fechados contidos no interior de C, orientados no sentido negativo, disjuntos e cujos interiores não possuem pontos em comum. Se uma função f é analítica sobre todos estes contornos e também no domínio consistindo nos pontos pertencentes ao interior de C e ao exterior de cada C_k, então*

$$\int_C f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz = 0. \tag{6.4}$$

Deste teorema obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3 (Princípio da deformação de caminhos)**.** *Sejam C_1 e C_2 contornos simples e fechados orientados no sentido positivo, tais que $C_2 \subset int\, C_1$. Se uma função f é analítica sobre C_1 e C_2 e em todos os pontos entre estes contornos, então*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz. \tag{6.5}$$

6.1.1 Independência de caminhos

Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que a integral de f independe do arco se para quaisquer dois caminhos γ_1 e $\gamma_2 : [a, b] \longmapsto \Omega$ tais que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ temos que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Desta forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 21. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f independe do caminho se, e somente se, $\int_\gamma f(z) = 0$ para qualquer caminho fechado contido em Ω.*

Do Teorema anterior segue o resultado:

Corolário 4. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ uma função analítica, onde Ω é simplesmente conectado. Então, f independe do caminho.*

Exemplo 6.1.1. Seja $f(z) = z - 1$. Vamos calcular $\int_C f(z)\, dz$ sobre um arco C de $z = 0$ a $z = 2$.

Note que como a função f é inteira, podemos tomar qualquer arco de $z = 0$ a $z = 2$. Particularmente, tomamos o arco C dado por $z(\theta) = 1 + e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]$ e obtemos:

$$\int_C (z-1)\, dz = \int_\pi^{2\pi} [1 + e^{i\theta} - 1] ie^{i\theta}\, d\theta = \int_\pi^{2\pi} ie^{i2\theta}\, d\theta = \left.\frac{e^{2i\theta}}{2}\right|_\pi^{2\pi} = 0.$$

Da mesma forma, podemos calcular a mesma integral sobre o segmento de reta no eixo real dado por $z(t) = t, t \in [0, 2]$. Assim,

$$\int_C (z-1)\, dz = \int_0^2 (t-1)\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^2 - \left. t\right|_0^2 = 0.$$

6.2 Fórmula Integral de Cauchy

Enunciaremos nesta seção um resultado importante para o estudo de integração complexa em curvas, chamado Fórmula Integral de Cauchy.

Teorema 22 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Seja Ω um conjunto simplesmente conectado e $\gamma \subseteq \Omega$ um arco simples fechado orientado no sentido anti-horário. Se uma função f é analítica em Ω, então,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{6.6}$$

para todo z_0 no interior e sobre a curva.

Exemplo 6.2.1. Seja $\gamma = B(0,1)$. Utilizando o Teorema, podemos calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$. Note que a função $f(z) = 1$ é analítica em $\mathbb{C}$. Escolhendo $z_0 = 0$, temos

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - 0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz.$$

Desta forma,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Demonstração. Sejam f e $\gamma \subset \Omega$ como no Teorema. Como o interior de γ é aberto, podemos dizer que existe $r_0 > 0$ tal que $B(z_0, r_0) \subset int\, \gamma$.

Se tomarmos r de forma que $0 < r < r_0$ e $\gamma_r = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, obtemos outra bola centrada em z_0, com raio r tal que

$$\gamma_r \subset B(z_0, r_0) \subset int\, \gamma.$$

Desta forma, asseguramos que $\gamma_r \subset \gamma$.

Afirmação: $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$

Sejam A, B pontos de γ e γ_r, respectivamente. Como Ω é conectado, existe uma curva C que interliga os pontos A e B. Defina $\Gamma = \gamma \cup C \cup -\gamma_r \cup -C$. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat,

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \int_{-\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \int_{-C} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = -\int_{-\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz &= \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz \\
&= \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0}\,dz \\
&= \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)2\pi i.
\end{aligned}$$

Basta mostrarmos que é possível fazer $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$ tão pequeno quanto se queira. Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)2\pi i\right| &= \left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \\
&= \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})-f(z_0)}{z_0+re^{it}-z_0} ire^{it}\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})-f(z_0)\,dt\right| \\
&\le \int_0^{2\pi} \left|f(z_0+re^{it})-f(z_0)\right|\,dt
\end{aligned}$$

Como a função f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$r < \delta \Rightarrow |f(z_0+re^{it})-f(z_0)| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \int_0^{2\pi} \left|f(z_0+re^{it})-f(z_0)\right|\,dt \le \int_0^{2\pi} \varepsilon\,dt = 2\pi\varepsilon.$$

Tomando $r < min\{\delta, r_0\}$, temos

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Portanto,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

□

6.3 Derivadas de Funções Analíticas

Começamos esta seção com um resultado a respeito da derivada de uma função analítica sob as condições da Fórmula Integral de Cauchy. Em seguida, este resultado será generalizado para a n-ésima derivada de uma função analítica.

Proposição 1. *Sejam Ω, γ e f como no enunciado da Fórmula Integral de Cauchy. Então*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz. \tag{6.7}$$

Demonstração. Defina d como a distância mínima entre z_0 e γ. Seja $0 < |\Delta z| < d$. Vamos mostrar que

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz \right| \to 0$$

quando $\Delta z \to 0$.

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}[f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] \\
&= \frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right) \\
&= \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma f(z) \left(\frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz \right] \\
&= \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma f(z) \frac{\Delta z}{[z - (z_0 + \Delta z)][z - z_0]}\, dz \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{[z - (z_0 + \Delta z)][z - z_0]}\, dz.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| \\
= &\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{[z-(z_0+\Delta z)][z-z_0]}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| \\
= &\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(z)\left[\frac{1}{[z-(z_0+\Delta z)][z-z_0]}-\frac{1}{(z-z_0)^2}\right]\,dz\right| \\
= &\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(z)\frac{\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)][z-z_0]^2}\,dz\right| \\
\leq &\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|f(z)\frac{\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)][z-z_0]^2}\right|dz.
\end{aligned}$$

Observe que $\left|\dfrac{\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)][z-z_0]^2}\right| \leq \dfrac{|\Delta z|}{(d-|\Delta z|)d^2}$, pois

$$[z-z_0-\Delta z] \geq ||z-z_0|-|\Delta z|| \geq |d-|\Delta z|| = d-|\Delta z|,$$

e $|z-z_0|^2 \geq d^2$, ou seja,

$$\left|\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)}\frac{1}{(z-z_0)^2}\right| \leq \frac{1}{(d-|\Delta z|)d^2}.$$

Desta forma, temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|f(z)\frac{\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)][z-z_0]^2}\right|dz \leq ML\frac{|\Delta z|}{(d-|\Delta z|)d^2},$$

no qual $M = \sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)| < \infty$ e L é o comprimento de γ.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta encontrarmos $0 < \delta < d$ tal que

$$|\Delta z| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| < \varepsilon.$$

Vamos encontrar δ desenvolvendo a desigualdade:

$$ML\frac{|\Delta z|}{(d-|\Delta z|)d^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |\Delta z| < \left(\frac{\varepsilon d^2}{ML}\right)(d-|\Delta z|)$$

$$\Leftrightarrow \quad |\Delta z| < \left(\frac{\varepsilon d^3}{ML}\right)\left(\frac{\varepsilon d^2}{ML}+1\right)^{-1}.$$

Assim, tomamos $\delta < \left(\frac{\varepsilon d^3}{ML}\right)\left(\frac{\varepsilon d^2}{ML}+1\right)^{-1}$ e concluímos que

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

□

Agora, o resultado anterior será estendido para a n-ésima derivada da função f.

Proposição 2. *Se f é analítica em z_0, então suas derivadas de todas as ordens existem em z_0. Mais ainda, todas estas derivadas são analíticas neste ponto.*

Demonstração. Pela proposição anterior, temos uma expressão para a primeira derivada da função f no ponto z_0. Utilizando o Princípio da Indução Matemática, mostraremos que

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz, \qquad m = 1,2,3... \tag{6.8}$$

Para isso, suponha que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e defina $d = \inf_{z\in\gamma}\{|z-z_0|\}$. Vamos provar que para $m = n+1$, a igualdade em 6.8 permanece válida, ou seja, mostraremos que

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0+\Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\,dz\right| \to 0$$

quando $\Delta z \to 0$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n)}(z_0+\Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left[f^{(n)}(z_0+\Delta z) - f^{(n)}(z_0)\right] \\
= \quad & \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}}\,dz - \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right] \\
= \quad & \frac{n!}{2\pi i \Delta z}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}}\,dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\
= \quad & \frac{n!}{2\pi i \Delta z}\int_\gamma \frac{f(z)(z-z_0)^{n+1} - f(z)(z-z_0-\Delta z)^{n+1}}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\
= \quad & \frac{n!}{2\pi i \Delta z}\int_\gamma f(z)\left[\frac{(z-z_0)^{n+1} - (z-z_0-\Delta z)^{n+1}}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+1}}\right]\,dz.
\end{aligned}$$

Utilizaremos agora uma forma para reescrever o termo $(z-z_0)^{n+1} - (z-z_0-\Delta z)^{n+1}$. Lembrando que, para a, b quaisquer,

$$\begin{aligned}
& a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k-1}a^k \\
\Rightarrow \quad & a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k,
\end{aligned}$$

e logo,

$$(z-z_0)^{n+1} - (z-z_0-\Delta z)^{n+1} = \Delta z \sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^k(z-z_0-\Delta z)^{n-k}.$$

Após reescrever o termo, obtemos

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{\sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^k(z-z_0-\Delta z)^{n-k}}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Seja $h(z, z_0, \Delta z) \doteq \sum\limits_{k=0}^{n} (z - z_0)^k (z - z_0 - \Delta z)^{n-k}$. Então

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}}\, dz \right|$$

$$= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, h(z, z_0, \Delta z)}{(z - z_0 - \Delta z)^{n+1} (z - z_0)^{n+1}}\, dz - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}}\, dz \right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\gamma f(z) \left[\frac{h(z, z_0, \Delta z)}{(z - z_0 - \Delta z)^{n+1} (z - z_0)^{n+1}} - \frac{n+1}{(z - z_0)^{n+2}} \right] dz \right|.$$

Definimos $w \doteq z - z_0$. Observe que

$$\frac{h(z, z_0, \Delta z)}{(z - z_0 - \Delta z)^{n+1} (z - z_0)^{n+1}} - \frac{n+1}{(z - z_0)^{n+2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{w^k (w - \Delta z)^{n-k}}{(w - \Delta z)^{n+1} w^{n+1}} \right] - \frac{n+1}{w^{n+2}} = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{w^k (w - \Delta z)^{n-k}}{(w - \Delta z)^{n+1} w^{n+1}} - \frac{1}{w^{n+2}} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{(w - \Delta z)^{k+1} w^{n+1-k}} - \frac{1}{w^{n+2}} \right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^{k+1} - (w - \Delta z)^{k+1}}{(w - \Delta z)^{k+1} w^{n+2}}.$$

Note que

$$w^{k+1} - (w - \Delta z)^{k+1} = \Delta z \sum_{l=0}^{k} w^l (w - \Delta z)^{k-l},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^{k+1} - (w - \Delta z)^{k+1}}{(w - \Delta z)^{k+1} w^{n+2}} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Delta z w^l (w - \Delta z)^{k-l}}{(w - \Delta z)^{k+1} w^{n+2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \Delta z \frac{1}{(w - \Delta z)^{l+1}} \frac{1}{w^{n-l+2}} \end{aligned}$$

.

Observe que $1 + l > 0$ e $n - l + 2 > 0$, uma vez que $n \geq k \geq l$. Para d como definido anteriormente, temos que, $\forall z \in \gamma$,

$$d \leq |z - z_0| \Rightarrow \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{|w|} \leq \frac{1}{d}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|} \leq \frac{1}{||z-z_0|-|\Delta z||} = \frac{1}{||w|-|\Delta z||} \leq \frac{1}{d-|\Delta z|}.$$

Assim,

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} \Delta z \frac{1}{(w-\Delta z)^{l+1}} \frac{1}{w^{n-l+2}}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} |\Delta z| \frac{1}{(d-|\Delta z|)^{l+1}} \frac{1}{d^{n-l+2}}.$$

Sejam $M = \sup\limits_{z\in\gamma} |f(z)| < \infty$ e L o comprimento de γ. Segue do anterior que

$$\frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma f(z)\left[\frac{h(z,z_0,\Delta z)}{(z-z_0-\Delta z)^{n+1}(z-z_0)^{n+1}} - \frac{n+1}{(z-z_0)^{n+2}}\right] dz\right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} ML|\Delta z| \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(d-|\Delta z|)^{l+1}} \frac{1}{d^{n-l+2}}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta$ o qual $0 < \delta < d$ tal que

$$|\Delta z| < \delta \quad \Rightarrow \left|\frac{f^{(n)}(z_0+\Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\, dz\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{2\pi} ML|\Delta z| \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(d-|\Delta z|)^{l+1}} \frac{1}{d^{n-l+2}} < \varepsilon.$$

Note que para $\Delta z \to 0$,

$$\frac{n!}{2\pi} ML|\Delta z| \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(d-|\Delta z|)^{l+1}} \frac{1}{d^{n-l+2}} \to 0,$$

como queríamos provar.

Desta forma, concluímos que

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\, dz, \qquad m = 1, 2, 3...$$

□

Corolário 5. *Se uma função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em $z = z_0 = x_0 + iy_0$, então as funções componentes u, v são de classe C^∞ no ponto (x_0, y_0).*

Exemplo 6.3.1. Seja $\gamma = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $f(z) = e^z$. Então, através de 6.8 para $m = 3$,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^4}\, dz = f^{(3)}(0)\frac{2\pi i}{3!} = \frac{i\pi}{3}.$$

Em 1886, o italiano Giacinto Morera (1856–1909) demonstrou que a recíproca do Teorema de Cauchy-Goursat é válida. Este resultado é conhecido como *Teorema de Morera*, e será enunciado a seguir.

Corolário 6 (Teorema de Morera)**.** *Seja f uma função contínua em um domínio Ω. Se $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para cada contorno fechado $\gamma \subset \Omega$, então f é analítica em Ω.*

Demonstração. Como a função f é contínua em Ω e $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, então existe F tal que $F'(z) = f(z)$ e f é analítica em Ω para F também analítica em Ω.

Para isto, basta definir $F(z) = \int_{\overline{z_0 z}} f(s)\, ds$, no qual $z, z_0 \in D$ e $\overline{z_0 z}$ é qualquer contorno interligando z_0 a z. $\square$

Este resultado, porém, não tem como hipótese que o domínio no qual a curva está contida é simplesmente conectado. A recíproca do Teorema de Cauchy-Goursat é obtida no caso particular em que Ω é simplesmente conectado.

6.4 Aplicações dos Teoremas de Cauchy

Apresentamos nesta seção alguns resultados que seguem daqueles apresentados na seção anterior. Começamos por um Lema que segue como consequência imediata de 6.8.

Lema 3 (Desigualdade de Cauchy)**.** *Seja f uma função analítica no interior da curva γ_R dada por $z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Se M_R denota o valor máximo de $|f(z)|$ para $z \in \gamma_R$, então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} M_R, \quad n = 1, 2, ... \tag{6.9}$$

Demonstração. Utilizando o resultado 6.8, temos

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \right| \\
&= \frac{n!}{2\pi i} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_R(t)) R i e^{it}}{(z_0 + Re^{it} - z_0)^{n+1}}\, dt \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma_R(t))| R}{R^{n+1}}\, dt \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^n} 2\pi = \frac{n!}{R^n} M_R.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 23 (Teorema de Liouville)**.** *Se f é uma função inteira e limitada no plano complexo, então f é constante ao longo do plano.*

Demonstração. Seja f como no enunciado do Teorema. Como f é inteira, então para toda curva γ_R tal como no enunciado com z_0, R quaisquer, temos pela desigualdade 6.9 que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R}.$$

Mas como f é limitada no plano, então $\exists M$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e de tal forma que $M_R \leq M$. Logo,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R},$$

para um z_0 fixo e R arbitrariamente grande. Desta forma a desigualdade permanece válida para valores arbitrariamente grandes de R apenas se $f'(z) = 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$. Concluímos então que f será uma função constante. $\square$

Observe que enquanto as funções $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, são limitadas na reta, as funções $\operatorname{sen}(z), \cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$, não são limitadas no plano complexo, uma vez que estas são inteiras e não constantes.

Do Teorema de Liouville obtemos um resultado importante conhecido como *Teorema Fundamental da Álgebra*, apresentado a seguir.

Teorema 24 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \quad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$$

de grau $n \geq 1$ possui pelo menos um zero. Isto é, existe pelo menos um ponto z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

Demonstração. A demonstração será feita por contradição. Suponha que $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Então, a função $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ será uma função inteira. Vamos mostrar que f é limitada, e pelo Teorema de Liouville, concluímos que esta função é constante, atingindo assim uma contradição.

De fato, defina

$$w \doteq \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + ... + \frac{a_{n-1}}{z},$$

de forma que $P(z) = (a_n + w)z^n$. Considere agora $R > 0$ suficientemente grande e $|z| > R$, isto é, $\dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
|w| &= \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + ... + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \\
&\leq \left|\frac{a_0}{z^n}\right| + ... + \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| \\
&< \left|\frac{a_0}{R^n}\right| + ... + \left|\frac{a_{n-1}}{R}\right| \\
&\leq \max_{k=0,...,n-1}\{|a_k|\}\left(\frac{1}{R^n} + ... + \frac{1}{R}\right)n.
\end{aligned}$$

Note que, como $R >> 1$, $\alpha > \beta \Rightarrow R^\alpha > R^\beta$, e assim,

$$\begin{aligned}
& R^n > R^{n-1} > ... > R^2 > R \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{R^n} < \frac{1}{R^{n-1}} < ... < \frac{1}{R^2} < \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|w| < \max_{k=0,...,n-1}\{|a_k|\}\left(\frac{1}{R^n} + ... + \frac{1}{R}\right)n < \max_{k=0,...,n-1}\{|a_k|\}\frac{n^2}{R}.$$

Seja $c \doteq \max_{k=0,...,n-1}\{|a_k|\}$. Vamos escolher R de tal forma que

$$\begin{aligned}
& \frac{cn^2}{R} < \frac{|a_n|}{2n} \Leftrightarrow \frac{2cn^3}{|a_n|} < R \\
\Rightarrow\ & |w| < \frac{|a_n|}{2n} < |a_n|.
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$|a_n + w| \geq ||a_n| - |w|| \geq |a_n| - |w| > |a_n| - \frac{|a_n|}{2n} > \frac{|a_n|}{2}.$$

Portanto,

$$P(z) = |a_n + w||z^n| > \frac{a_n}{2}|z|^n > \frac{|a_n|}{2}R^n,$$

e assim,

$$\frac{1}{P(z)} < \frac{2}{|a_n|R^n}.$$

Concluímos que f é limitada na região exterior do disco $|z| \leq R$. Mas como f é contínua neste disco fechado, então também é limitada nesta região.

Aplicando agora o resultado do Teorema de Liouville, concluímos que $f(z)$, e consequentemente $P(z)$, é constante, e assim atingimos uma contradição. $\square$

Os próximos três resultados que serão enunciados a seguir fornecem informações importantes a respeito dos valores máximos do módulo de funções analíticas. Suas demonstrações não serão feitas aqui, mas podem ser encontradas na referência [C].

Lema 4. *Suponha que* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ *para cada* z *em uma vizinhança* $|z - z_0| < \varepsilon$ *na qual* f *é analítica. Então* $f(z)$ *assume o valor constante* $f(z_0)$ *naquela vizinhança.*

A partir deste Lema, obtemos um resultado importante conhecido como *Princípio do módulo máximo.*

Teorema 25 (Princípio do Módulo Máximo)**.** *Seja* Ω *um domínio. Se* f *é uma função não constante e analítica em* Ω*, então* f *não possui valor máximo em* Ω*.*

Do Teorema segue o resultado:

Corolário 7. *Seja* R *um compacto em* $\mathbb{C}$*, isto é, uma região fechada e limitada no plano. Suponha que uma função* f *seja contínua em* R *e que seja analítica e não constante em* $intR$*. Então* f *possui valor máximo em* R *e este é assumido em* ∂R*.*

Capítulo 7

Séries

Iniciamos este capítulo com um resultado obtido por Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), através do qual podemos encontrar uma representação em séries para uma função analítica de uma variável complexa $f(z)$. Em seguida, enunciaremos como consequência o Teorema de Taylor. Não apresentaremos aqui conceitos introdutórios no estudo de sequências e séries de números complexos. Estes, porém, podem ser encontrados em [C].

7.1 Séries de Laurent

Teorema 26 (Teorema de Laurent)**.** *Suponha que uma função f seja analítica em um anel $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ centrado em z_0, e considere um contorno C simples e fechado, orientado no sentido positivo tal que $C \subset A$. Então, para cada $z \in A$, $f(z)$ tem representação em séries dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2), \tag{7.1}$$

no qual

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{7.2}$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{7.3}$$

Demonstração. Começamos a demonstração considerando $z_0 = 0$, caso no qual o anel está centrado na origem. A demonstração para um z_0 arbitrário será feita em seguida.

Considere o anel $A_1(0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ tal que $A_1 \subset A$, $z \in intA_1$ e $C \subset intA_1$; e sejam os contornos positivamente orientados $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1\}$ e $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_2\}$. Note que a função f é analítica sobre C_1 e C_2, uma vez que é analítica no anel A. Em seguida, construímos um círculo γ positivamente orientado centrado em z e pequeno o bastante para estar completamente contido em A_1.

Desta forma, segue do Teorema 20 que

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw = \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw = 0.$$

Como f é analítica em $\partial\gamma \cup int\gamma$, pela Fórmula Integral de Cauchy, temos que

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw = 2\pi i f(z).$$

Assim,

$$2\pi i f(z) = \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{(z-w)}\,dw.$$

Observe que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{z}{w}\right)^n + \left(\frac{z}{w}\right)^N \left(\frac{1}{1-\left(\frac{z}{w}\right)}\right)\right],$$

uma vez que, para $m \neq 1$,

$$\frac{1}{1-m} = \sum_{n=0}^{N-1} m^n + \frac{m^N}{1-m}.$$

Logo,

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{w^{n+1}} z^n + \frac{z^N}{(w-z)w^N}. \tag{7.4}$$

De forma análoga, obtemos

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{w^{-n+1}} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^N} \frac{w^N}{z-w}. \tag{7.5}$$

Por (7.4) e (7.5),

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_{C_2} \frac{f(w)}{2\pi i} \frac{1}{(w-z)}\, dw + \int_{C_1} \frac{f(w)}{2\pi i} \frac{1}{(z-w)}\, dw \\
&= \int_{C_2} \frac{f(w)}{2\pi i} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{w^{n+1}} z^n + \frac{z^N}{(w-z)w^N} \right] dw + \\
&\int_{C_1} \frac{f(w)}{2\pi i} \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{w^{-n+1}} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^N} \frac{w^N}{z-w} \right] dw \\
&= \int_{C_2} \frac{f(w)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{w^{n+1}} z^n\, dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{2\pi i} \frac{z^N}{(w-z)w^N}\, dw + \\
&\int_{C_1} \frac{f(w)}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{w^{-n+1}} \frac{1}{z^n}\, dw + \int_{C_1} \frac{f(w)}{2\pi i} \frac{1}{z^N} \frac{w^N}{z-w}\, dw \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \right] z^n + \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)w^N}\, dw + \\
&\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w^{-n+1}}\, dw \right] \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2\pi i z^N} \int_{C_1} \frac{w^N f(w)}{z-w}\, dw \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \rho_N(z) + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{z^n} + \sigma_N(z),
\end{aligned}$$

nos quais

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w^{-n+1}}\, dw,$$

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)w^N}\, dw, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i z^N} \int_{C_1} \frac{w^N f(w)}{z-w}\, dw.$$

Vamos mostrar agora que $\rho_N(z) \to 0$ e $\sigma_N(z) \to 0$ quando $N \to \infty$.

Sejam $M = \sup_{w \in C_1, C_2} \{|f(w)|\}$ e $r = |z|$. Note que $r_1 < r < r_2$ e

$$\begin{cases} w \in C_2 \Rightarrow |w - z| \geq r_2 - r, \\ w \in C_1 \Rightarrow |z - w| \geq r - r_1. \end{cases}$$

Assim, como o comprimento de C_2 é $2\pi r_2$,

$$\begin{aligned} |\rho_N(z)| &= \left| \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)w^N} \, dw \right| \\ &\leq \left(\frac{r}{r_2} \right)^N \frac{M 2\pi r_2}{r_2 - r} \frac{1}{2\pi} \\ &= \left(\frac{r}{r_2} \right)^N \frac{M r_2}{r_2 - r}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$|\sigma_N(z)| \leq \frac{M r_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^N.$$

Note que $\dfrac{r}{r_2} < 1$ e $\dfrac{r_1}{r} < 1$, e portanto, $\rho_N(z) \to 0$ e $\sigma_N(z) \to 0$ quando $N \to \infty$. Desta forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \tag{7.6}$$

nos quais, pelo Corolário 3,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{-n+1}} \, dw.$$

Concluímos assim a demonstração para o caso que $z_0 = 0$.

Para o caso geral, definimos $g(z) \doteq f(z + z_0)$. Como f é analítica em $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ então $f(z + z_0)$ é analítica em $R_1 < |(z + z_0) - z_0| < R_2$, ou seja, $g(z)$ é analítica em $R_1 < |z| < R_2$, região centrada na origem.

Seja $z = z(t)$, no qual $t \in [p, q]$ uma representação paramétrica de C. Então para todo $t \in [p, q]$,

$$R_1 < |z(t) - z_0| < R_2.$$

Portanto, se um contorno Γ é dado por $z = z(t) - z_0$, $t \in [p, q]$, então este é um contorno simples e fechado contido no anel $R_1 < |z| < R_2$, no qual a função g é analítica. Como consequência, $g(z)$ possui representação em série de Laurent dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad (R_1 < |z| < R_2), \tag{7.7}$$

no qual

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{z^{-n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Reescrevendo $g(z)$ como $f(z + z_0)$ em (7.7), obtemos a representação (7.1). A expressão para os coeficientes a_n será a mesma do enunciado do teorema, uma vez que

$$\int_\Gamma \frac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz = \int_a^b \frac{f[z(t)]z'(t)}{[z(t) - z_0]^{n+1}}\, dt = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

De forma análoga, os coeficientes b_n serão os mesmo do enunciado do teorema.

□

Vamos apresentar agora um resultado que nos permite escrever uma função em uma variável complexa *analítica* como uma série de potências.

Teorema 27 (Teorema de Taylor)**.** *Seja f uma função analítica no disco aberto $D = \{|z - z_0| < R_0\}$. Então $f(z)$ possui série de potência, isto é*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \tag{7.8}$$

no qual $z \in D$, $n = 0, 1, 2, ...$

A demonstração é análoga à demonstração do Teorema de Laurent.

Observação 7.1.1. Quando fazemos $z_0 = 0$ na série de Taylor, esta então é chamada *série de MacLaurin.*

Exemplo 7.1.1. Seja $f(z) = \cos(z) \doteq \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Primeiramente, observe que e^z é inteira, e pelo Teorema anterior, possui série de Taylor. Vamos expandir e^z em série de MacLaurin:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^z)^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Voltando para a função f, obtemos

$$\begin{aligned}\cos(z) \doteq \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}] &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n z^n}{n!}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} + \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}(1 + (-1)^n)\right].\end{aligned}$$

Observe que a última expressão sempre se anula para n ímpar. Logo, para $n = 2k$, $k = 0, 1, 2, ...$, temos que a expansão em série de MacLaurin da função $\cos(z)$ é

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

Exemplo 7.1.2. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(2i - z)}$, definida em $\mathbb{C} - \{0, 2i\}$. Observe que, para calcular sua série de Laurent centrada no ponto 0 (isto é, $z_0 = 0$), encontramos dois anéis nos quais f é analítica, ou seja, temos duas *regiões de definição*, que são $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ e $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$. Para o ponto $z_0 = 2i$, temos as regiões de definição $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 2i| < 2\}$ e $A_4 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 2i| < \infty\}$.

Vamos encontrar a série de Laurent centrada em $z_0 = 2i$ nas regiões de definição citadas acima. Para o caso $z_0 = 0$, o procedimento é análogo e até mesmo mais simples.

Mas antes disso, precisamos enunciar um resultado que aqui será bastante útil.

Corolário 8. *A soma* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ *é uma função analítica no interior de seu círculo de convergência e, além do mais,*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} n(z - z_0)^{n-1}. \tag{7.9}$$

Não vamos nos aprofundar no conceito de convergência de séries, mas sua definição e propriedades podem ser encontradas na referência [C].

Voltando ao exemplo, considere primeiramente a região A_3 e note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{2i + z - 2i} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{1 + \left(\dfrac{z-2i}{2i}\right)} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{1 - \left(\dfrac{2i-z}{2i}\right)} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i-z}{2i}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(-1)^n(z-2i)^n.
\end{aligned}$$

Por 7.9, e como $\dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{z^2}$, temos

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(-1)^n n(z-2i)^{n-1}.$$

Agora, como $f(z) = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{(z-2i)}$, então

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(-1)^n n(z-2i)^{n-2}.$$

Definimos $k = n - 2$ e obtemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{k+3}(-1)^k(k+2)(z-2i)^k,$$

para $0 < |z - 2i| < 2$.

Considere agora a região A_4, isto é, $2 < |z - 2i|$, e observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{2i + z - 2i} \\
&= \frac{1}{z-2i}\frac{1}{1 + \left(\dfrac{2i}{z-2i}\right)} \\
&= \frac{1}{z-2i}\frac{1}{1 - \left(\dfrac{2i}{2i-z}\right)} \\
&= \frac{1}{z-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{2i-z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n\left(\frac{1}{2i-z}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Novamente por 7.9, temos

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(2i)^n(n+1)(-1)^n\left(\frac{1}{2i-z}\right)^n,$$

e portanto, fazendo $k = n+1$,

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(2i)^{k-1}k(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2i-z}\right)^k,$$

para $2 < |z - 2i|$.

Capítulo 8

Resíduos e Polos

Nos capítulos anteriores, apresentamos os conceitos de integração e expansão em série de potências de funções em uma variável complexa. Faremos aqui uma ponte entre ambos e apresentaremos resultados que podem auxiliar no cálculo da integral de algumas funções.

Definição 16. *Um ponto singular z_0 é chamado isolado se z_0 é um ponto singular e além disso existe $\varepsilon > 0$ tal que a função f é analítica em $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

Com esta definição, considere uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com singularidade em z_0. Se z_0 é isolado, então existe $R > 0$ tal que f é analítica em todo ponto z para o qual $0 < |z - z_0| < R$. Assim, do Teorema de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + ...$$

para $0 < |z - z_0| < R$, no qual a_n e b_n têm suas representações em 7.2 e 7.3, respectivamente, para um contorno simples e fechado C, orientado no sentido positivo em torno de z_0 e contido na região interna do disco $0 < |z - z_0| < R$.

Note que para $n = 1$ em 7.3, podemos escrever

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \Leftrightarrow \int_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1.$$

O coeficiente b_1 é chamado *resíduo* de f no ponto singular isolado z_0 e é denotado por

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Exemplo 8.0.3. Considere a função $f(z) = e^{1/z^2}$, definida em $\mathbb{C} - \{0\}$, no qual 0 é uma singularidade isolada. Do resultado obtido anteriormente, vamos calcular $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, para $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Sabemos que $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Logo

$$\begin{aligned} e^{1/z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}} \\ &= 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}} + ... \end{aligned}$$

Note que o coeficiente b_1 que acompanha o termo $\dfrac{1}{z - z_0}$ é nulo, isto é,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Portanto,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Teorema 28. *Seja γ um contorno simples e fechado, orientado no sentido positivo. Se uma função f é analítica no interior de γ, exceto por um número finito de singularidades isoladas $\{z_k\}$, $k = 1, ..., n$ no interior de γ, então*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{8.1}$$

Demonstração. Sejam γ_k, $k = 1, .., n$ círculos positivamente orientados contidos no interior de γ e centrados em z_k, $k = 1, .., n$, tais que seus raios sejam pequenos o bastante para que estes círculos não possuam pontos em comum. Os círculos γ_k, com o contorno γ, formam a fronteira de uma região fechada na qual f é analítica e cujo interior é um domínio conectado. Assim, utilizando o teorema 20, temos

$$\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

Mas como

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

então o teorema está provado.

$\square$

8.1 Tipos de Singularidades Isoladas

Considere uma função f e z_0 ponto singular de f. Então pelo Teorema de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_3}{(z - z_0)^3} + ...$$

em $0 < |z - z_0| < R$. O termo

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_3}{(z - z_0)^3} + ... + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + ...$$

é chamado *parte principal de* f em z_0. Veremos agora que a singularidade z_0 pode ser classificada de acordo com a parte principal de f.

1. Se a parte principal de f é finita e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \neq 0$ e $b_{k+1} = b_{k+2} = ... = 0$, isto é,

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{b_k}{(z - z_0)^k},$$

   $0 < |z - z_0| < R$, então dizemos que z_0 é um *polo de ordem* k.

   Quando $k = 1$, então z_0 é chamado *polo de ordem 1* ou *polo simples*.

2. Se a parte principal de f é nula, isto é, $b_n = 0, \forall\, n = 1, 2, 3...$, então

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ para } 0 < |z - z_0| < R$$

   e dizemos que z_0 é uma *singularidade removível*. Note que neste caso $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

3. Se a parte principal possui infinitos termos, isto é, existem infinitos $b_n \neq 0$, então z_0 é chamada *singularidade essencial*.

Teorema 29. *Um ponto singular isolado de uma função f é um polo de ordem m se, e somente se, $f(z)$ pode ser escrita como*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \tag{8.2}$$

no qual $\phi(z)$ é analítica e não nula em z_0. Mais ainda,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0), \quad \textit{se } m = 1 \tag{8.3}$$

e

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, \quad \textit{se } m \geq 2. \tag{8.4}$$

Demonstração. Suponhamos que z_0 seja um polo de ordem m da f. Então f tem representação em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

válida em um disco $0 < |z - z_0| < R$. Defina agora a seguinte função

$$\phi(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & \text{para } z \neq z_0, \\ b_m & \text{para } z = z_0. \end{cases}$$

Da representação de f em série de Laurent, obtemos a seguinte representação de $\phi(z)$ em série de potências

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + ... + b_{m-1}(z-z_0) + b_m,$$

válida na bola aberta $|z - z_0| < R$, de forma que $\phi(z)$ é analítica nesta bola. Uma vez que $\phi(z_0) = b_m \neq 0$, então podemos concluir que a expressão 8.2 é verdadeira.

Considere agora que $f(z)$ pode ser escrita como em 8.2. Como $\phi(z)$ é analítica em z_0, possui representação em série de Taylor em uma vizinhança $|z - z_0| < \varepsilon$, dada por

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \phi'(z_0)(z-z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + ... + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1}$$
$$+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Do anterior, e de 8.2, temos que

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z-z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)/1!}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z-z_0}$$
$$+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}.$$

A representação acima, com o fato de que $\phi(z_0) \neq 0$, nos permite concluir que z_0 é de fato um polo de ordem m de $f(z)$. O coeficiente de $1/(z - z_0)$ deixa claro que o resíduo de f em z_0 é como em 8.3 e 8.4. Entretanto, estas igualdades também podem ser facilmente obtidas sem a expansão da série de Laurent, utilizando apenas a Fórmula Integral de Cauchy para a n-ésima derivada, vista em 6.8. □

Exemplo 8.1.1. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z+4)}$, singular nos pontos 0 e -4. Utilizando os resultados vistos nesta seção, vamos calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, no qual $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. Observe que $-4 \notin int\,\gamma$, enquanto $0 \in int\,\gamma$. Para calcular o resíduo da f no ponto 0, vamos utilizar o fato de que $f(z)$ pode ser escrita como

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z+4)} = \frac{1}{z+4}\frac{1}{(z-0)^3},$$

de forma que tomamos $\phi(z) = \dfrac{1}{z+4}$. Note que $\phi(z)$ é analítica em 0 e $\phi(0) \neq 0$. Assim,

$$\phi(z) = \frac{1}{z+4} \Rightarrow \phi''(z) = \frac{2}{(z+4)^3} \Rightarrow \phi''(0) = \frac{1}{32}.$$

Do Teorema anterior,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\phi''(0)}{2!} = \frac{1}{64},$$

e portanto,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\pi i}{32}.$$

Capítulo 9

Integração Complexa e os Teoremas de Cauchy

O que faremos neste capítulo é explorar o conceito de integração complexa apresentado anteriormente, desde a definição mais formal de integral de linha até os famosos teoremas de Cauchy, porém sob um ponto de vista um pouco mais avançado e analítico.

9.1 Integração sobre curvas

Definição 17. *Uma função $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é dita ser de variação limitada se existe $M > 0$ constante tal que, para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b\}$ de $[a,b]$,*

$$v(\gamma, P) \doteq \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M. \tag{9.1}$$

A variação total de γ é denotada por $V(\gamma)$ e definida por

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma, P) : P \in \mathcal{P}\}, \tag{9.2}$$

no qual $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as possíveis partições de $[a,b]$.

Da definição anterior, fica claro que $V(\gamma) \leq M \leq \infty$. Além do mais, γ é de variação limitada se, e somente se, $\operatorname{Re}\gamma$ e $\operatorname{Im}\gamma$ são de variação limitada. Mostraremos agora que se γ toma apenas valores reais e é não decrescente, então γ é de variação limitada e $V(\gamma) = \gamma(b) - \gamma(a)$.

Considere a função $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, a qual $\gamma(a) \leq \gamma(t_1) \leq ... \leq \gamma(t_{m-1}) \leq \gamma(b)$.

Afirmação 1: γ é de variação limitada.
De fato, note que

$$\begin{aligned} v(\gamma,P) &= \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| \\ &= |\gamma(t_1)-\gamma(a)| + |\gamma(t_2)-\gamma(t_1)| + ... + |\gamma(b)-\gamma(t_{m-1})|. \end{aligned}$$

Por hipótese, como γ é não decrescente, $|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| \geq 0$, $k = 1, ..., m$. Logo,

$$\begin{aligned} v(\gamma,P) &= \gamma(t_1)-\gamma(a) + \gamma(t_2)-\gamma(t_1) + ... + \gamma(b)-\gamma(t_{m-1}) \\ &= \gamma(b)-\gamma(a). \end{aligned}$$

Tomando $M = \gamma(b)-\gamma(a)$, temos $v(\gamma,P) \leq M$.

Afirmação 2: $V(\gamma) = \gamma(b)-\gamma(a)$.
Como $v(\gamma,P) = \gamma(b)-\gamma(a)$, $\forall P \in \mathcal{P}$, então

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma,P) : P \in \mathcal{P}\} = \gamma(b)-\gamma(a).$$

Proposição 3. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de variação limitada. Então*

1. *Se P e Q são partições de $[a,b]$ e $P \subset Q$ então $v(\gamma,P) \leq v(\gamma,Q)$.*
2. *Se $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é de variação limitada e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então $\alpha\gamma + \beta\sigma$ é de variação limitada e $V(\alpha\gamma+\beta\sigma) \leq |\alpha|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma)$.*

Demonstração. 1. Considere $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ e $Q = \{t_0, ..., t_{j-1}, x, t_j, ..., t_m\}$ de forma que $P \subset Q$. Observe que

$$\begin{aligned} & v(\gamma,Q) = \sum_{k=1}^{j-1} |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| + |\gamma(x)-\gamma(t_{j-1})| + |\gamma(t_j)-\gamma(x)| \\ & + \sum_{k=j+1}^{m} |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| \\ & \geq |\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})| + \sum_{k=1}^{j-1} |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| + \sum_{k=j+1}^{m} |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| \\ & = \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| \\ & = v(\gamma,P). \end{aligned}$$

Para o item *2.* vamos mostrar primeiramente que $\alpha\gamma + \beta\sigma$ é de variação limitada. Considere $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_m = b\}$. Como γ e σ são de variação limitada,

$$\sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M,$$
$$\sum_{k=1}^{m} |\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| \leq N,$$

para $M, N > 0$ constantes. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ constantes. Então

$$\begin{aligned}
v(\alpha\gamma + \beta\sigma, P) &= \sum_{k=1}^{m} |(\alpha\gamma + \beta\sigma)(t_k) - (\alpha\gamma + \beta\sigma)(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^{m} |\alpha\gamma(t_k) + \beta\sigma(t_k) - \alpha\gamma(t_{k-1}) - \beta\sigma(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^{m} |\alpha[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] + \beta[\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})]| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} |\alpha||\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\beta||\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| \\
&= |\alpha| \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\beta| \sum_{k=1}^{m} |\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| \\
&\leq |\alpha|M + |\beta|N.
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha\gamma + \beta\sigma$ é de variação limitada.

Agora, vamos mostrar que $V(\alpha\gamma + \beta\sigma) \leq |\alpha|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma)$. Sejam

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma, P) : P \in \mathcal{P}\},$$
$$V(\sigma) = \sup\{v(\sigma, P) : P \in \mathcal{P}\},$$
$$V(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \sup\{v(\alpha\gamma + \beta\sigma, P) : P \in \mathcal{P}\},$$

nos quais $V(\gamma) \leq M$ e $V(\sigma) \leq N$. Do anterior, sabemos que

$$\begin{aligned}
v(\alpha\gamma + \beta\sigma) &\leq |\alpha| v(\gamma, P) + |\beta| v(\sigma, P), \forall P \in \mathcal{P} \\
&\leq |\alpha| \sup\{v(\gamma, P) : P \in \mathcal{P}\} + |\beta| \sup\{v(\sigma, P) : P \in \mathcal{P}\} \\
&= |\alpha| V(\gamma) + |\beta| V(\sigma).
\end{aligned}$$

Como a expressão anterior é cota superior para $v(\alpha\gamma + \beta\sigma, P)$, então

$$|\alpha| V(\gamma) + |\beta| V(\sigma) \geq \sup\{v(\alpha\gamma + \beta\sigma, P) : P \in \mathcal{P}\} = V(\alpha\gamma + \beta\sigma),$$

isto é,

$$V(\alpha\gamma + \beta\sigma) \leq |\alpha| V(\gamma) + |\beta| V(\sigma).$$

□

Proposição 4. *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é suave por partes, então γ é de variação limitada e*

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt. \tag{9.3}$$

Demonstração. Vamos assumir que γ é suave, de forma que γ' é uma função contínua, e daí se deduz o resultado para o caso suave por partes. Considere $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = b\}$ partição de $[a, b]$. Por definição e pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
v(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) \, dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.
\end{aligned}$$

Logo, $V(\gamma) \leq \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$ e γ é de variação limitada.

Do teorema 4.19 da referência [R], como γ' é contínua no compacto $[a,b]$, então é também uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |s-t| < \delta_1 \Rightarrow |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon, \quad \forall s,t \in P.$$

Agora, escolhemos $\delta_2 > 0$ tal que, se $P = \{a < t_1 < ... < t_{m-1} < b\}$ e $\|P\| = \max \{(t_k - t_{k-1}) : 1 \leq k \leq m\} < \delta_2$, então

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

no qual τ_k é qualquer ponto em $[t_{k-1}, t_k]$. Logo,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \right| - \left| \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \right| \\
\leq \quad & \left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \\
= \quad & \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k)\, dt \right| \\
\leq \quad & \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)]\, dt \right| + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\, dt \right|.
\end{aligned}$$

Se $\|P\| < \delta = \min\, (\delta_1, \delta_2)$, então $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \varepsilon$, para $t \in [t_{k-1}, t_k]$, e

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \quad & \leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\
& = \varepsilon[1 + (b-a)] + v(\gamma, P) \\
& \leq \varepsilon[1 + (b-a)] + V(\gamma).
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$,

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq V(\gamma),$$

e daí segue a igualdade.

□

Teorema 30. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de variação limitada e suponha $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Então, existe $I \in \mathbb{C}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $\|P\| = max\,\{(t_k - t_{k-1}) : 1 \leq k \leq m\} \leq \delta$ então*

$$\left| I - \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \varepsilon, \tag{9.4}$$

quaisquer que sejam $\tau_k, t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$.

O número I é chamado integral da f em relação a γ sobre $[a,b]$ e é designado por

$$I = \int_a^b f\, d\gamma = \int_a^b f(t)\, d\gamma(t).$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada nas páginas 60 e 61 da referência [F]. Agora, apresentaremos brevemente três resultados referentes à integração em relação a uma curva sobre um intervalo, para enfim introduzirmos a definição de integral de linha.

Proposição 5. *Sejam f, g contínuas em $[a,b]$ e sejam γ, σ funções de variação limitada em $[a,b]$. Então, para quaisquer α, β escalares,*

1. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, d\gamma = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b g\, d\gamma;$
2. $\displaystyle\int_a^b f\, d(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b f\, d\sigma.$

Proposição 6. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de variação limitada e seja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Se $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, então*

$$\int_a^b f\, d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\, d\gamma.$$

Teorema 31. *Sejam γ suave por partes e $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Então*

$$\int_a^b f\, d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)\, dt.$$

Faremos agora algumas definições que serão utilizadas nos resultados seguintes.

Definimos um *caminho* por uma função contínua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Se γ é um caminho, então dizemos que $\{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ é o *traço* de γ e é denotado por $\{\gamma\}$. Note que, pelo teorema 4.14 da referência [R], o traço de γ é sempre um conjunto compacto, uma vez que γ é contínua.

Dizemos que γ é um caminho *retificável* se γ é de variação limitada. Isto é equivalente a dizer que γ tem comprimento finito e este é dado por $V(\gamma)$. Em particular, se γ é suave por partes, então γ é retificável e seu comprimento é $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$. Mais ainda, se γ é retificável com $\{\gamma\} \subset E \subset \mathbb{C}$ e $f : E \to \mathbb{C}$ é contínua, então $f \circ \gamma$ é contínua em $[a, b]$.

Definição 18 (Integral de Linha)**.** *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ retificável e f uma função definida e contínua em $\{\gamma\}$. Então a integral de linha da f ao longo de γ é dada por*

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, d\gamma(t),$$

sendo também denotada por $\displaystyle\int_\gamma f$, ou ainda mais usualmente por $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$.

Exemplo 9.1.1. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \gamma = e^{it}$, cujo traço define um círculo de centro 0 e raio 1 no plano, e defina $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$. Note que a integral de linha da f ao longo de γ é dada por

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} (e^{it})'\, dt = 2\pi i.$$

Considere as funções $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ retificável e $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ contínua, não decrescente e cuja imagem é $[a, b]$, com $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então a composição $\gamma \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{C}$ tem o mesmo traço de γ. Isto será importante para o resultado e para as definições que enunciaremos a seguir.

Proposição 7. *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ retificável e $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ contínua e não decrescente, com $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então, para qualquer função f contínua em $\{\gamma\}$,*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\varphi} f.$$

Definição 19. *Sejam $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ retificáveis. Dizemos que σ é equivalente a γ se existe uma função $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ contínua e estritamente crescente com $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$, e tal que $\sigma = \gamma \circ \varphi$. A função φ é chamada mudança de parâmetro.*

Definição 20. *Definimos uma curva por uma classe de equivalência de caminhos, de tal forma que o traço de uma curva é o traço de qualquer caminho desta classe.*

Mais ainda, para f contínua no traço da curva, a integral da f sobre a curva será a integral da f sobre qualquer membro da curva, isto é, sobre qualquer caminho da mesma classe de equivalência.

Antes de seguirmos para o próximo resultado, consideremos agora uma função $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ retificável, e para $a \leq t \leq b$, seja $|\gamma|(t) = V(\gamma, [a,t])$, isto é,

$$|\gamma|(t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| : \{t_0, ..., t_n\} \text{ é partição de } [a,t] \right\}.$$

Se f é contínua em $\{\gamma\}$, definimos

$$\int_\gamma f\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,d|\gamma|(t).$$

Se γ é retificável, denotamos por $-\gamma$ a curva definida por $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$, para $-b \leq t \leq -a$.

Vamos apresentar agora um resultado conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha.

Teorema 32. *Sejam G um aberto em $\mathbb{C}$ e γ um caminho retificável em G com início em α e fim em β. Se $f : G \to \mathbb{C}$ é uma função contínua com uma primitiva $F : G \to \mathbb{C}$, então*

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha). \tag{9.5}$$

Para fazermos a demonstração do teorema, precisamos antes apresentar outro resultado. A demonstração deste pode ser encontrada na página 65 da referência [F].

Lema 5. *Sejam G aberto, $\gamma : [a,b] \to G$ retificável e $f : G \to \mathbb{C}$ contínua. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um caminho por poligonal Γ em G tal que $\Gamma(a) = \gamma(a)$, $\Gamma(b) = \gamma(b)$ e $|\int_\gamma f - \int_\Gamma f| < \varepsilon$.*

Voltemos agora à demonstração do teorema.

Demonstração. A demonstração será dividida em dois casos. Primeiramente, faremos para o caso em que γ é um caminho suave por partes, para depois fazermos o caso geral.

Caso I: Considere $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho suave por partes. Então,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b [F(\gamma(t))]'\,dt \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
&= F(\beta) - F(\alpha).
\end{aligned}$$

Caso II: Veremos agora o caso geral. Considere $\varepsilon > 0$ arbitrário; pelo lema 5, existe Γ poligonal de α a β tal que $\left| \int_\gamma f - \int_\Gamma f \right| < \varepsilon$. Mas como Γ é suave por partes, e pelo primeiro caso,

$$\int_\Gamma f = F(\beta) - F(\alpha).$$

Logo,

$$\left| \int_\gamma f - \int_\Gamma f \right| = \left| \int_\gamma f - (F(\beta) - F(\alpha)) \right| < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, então concluímos que

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha).$$

$\square$

Definição 21. *Dizemos que uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Corolário 9. *Sejam G, γ e f como no enunciado do Teorema 32. Então, se γ é uma curva fechada, isto é, $\alpha = \beta$, temos que*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Observação 9.1.1. Note que o enunciado do Teorema nos garante que f é uma função contínua e que esta possui primitiva F.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui primitiva. Entretanto, isto nem sempre é verdade para funções de uma variável complexa.

Exemplo 9.1.2. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, contínua. Suponha que existe F primitiva de f, isto é, $F'(z) = f(z) = x^2 + y^2$. Mas se F é primitiva de f, então F é analítica. Assim, para $F = U(x, y) + iV(x, y)$, $z = x + iy$,

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = f(z) = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Pelas condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Porém, como $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 0$, então a função U pode ser escrita como $U(x, y) = u(x)$, e daí

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = u'(x) = x^2 + y^2,$$

o que é uma contradição.

Portanto, a função f não possui primitiva.

9.2 Zeros de funções analíticas

Se $p(z), q(z)$ são polinômios, então sabemos que

$$p(z) = s(z)q(z) + r(z),$$

para os quais a ordem do polinômio $r(z)$ é menor que a do polinômio $q(z)$.

Supondo $p(a) = 0$, fazemos $q(z) = (z - a)$, isto é

$$p(z) = s(z)(z - a) + r(z),$$

e obtemos que $r(z)$ deve ser um polinômio constante. Mas para $z = a$, temos $p(a) = r(a) = 0$ e então $p(z) = (z - a)s(z)$. Se além disso tivermos que

$s(a) = 0$, fatoramos $(z - a)$ de $s(z)$. Continuando este processo, vamos obter que

$$p(z) = (z - a)^m t(z),$$

no qual $1 \leq m \leq$ grau de $p(z)$, e $t(a) \neq 0$. Além do mais, grau de $t(z) =$ grau de $p(z) - m$.

Definição 22. *Sejam $f : G \to \mathbb{C}$ analítica e $a \in G$ tal que $f(a) = 0$. Então a é um zero de multiplicidade $m \geq 1$ se existe uma função analítica $g : G \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $g(a) \neq 0$.*

Considere agora $p(z)$ um polinômio de grau n e $a_1, ..., a_k$ todos os zeros distintos de $p(z)$. Então, podemos escrever $p(z) = (z-a_1)^{m_1}...(z-a_k)^{m_k} s(z)$, onde $s(z)$ é um polinômio sem zeros. Entretanto, pelo Teorema Fundamental da Álgebra visto anteriormente, um polinômio que não possui zeros deve ser constante. Desta forma, mostramos que $p(z)$ pode ser fatorado como o produto de polinômios de primeiro grau.

Corolário 10. *Se $p(z)$ é um polinômio e $a_1, ..., a_m$ são os zeros de $p(z)$ tais que a_j tem multiplicidade k_j, então $p(z) = c(z - a_1)^{k_1}...(z - a_m)^{k_m}$, para alguma constante c, e o grau de p é a soma $k_1 + ... + k_m$.*

Teorema 33. *Sejam G um aberto conectado e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. São equivalentes:*

(a) $f \equiv 0$;

(b) Existe $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$;

(c) O conjunto $\{z \in G : f(z) = 0\}$ tem um ponto de acumulação em G.

Demonstração. O item (a) implica nos itens (b) e (c).

Vamos começar mostrando que (c) implica em (b).

Seja $a \in G$ ponto de acumulação do conjunto $Z = \{z \in G : f(z) = 0\}$, e seja $R > 0$ tal que $B(a, R) \in G$. Note que Z é um conjunto fechado.

Como f é contínua e a é ponto de acumulação de Z, então existe uma sequência de pontos distintos em Z que converge para a. Mas como $f(z) = 0$ para todo $z \in Z$, segue que $f(a) = 0$.

Suponha agora que exista um inteiro $n \geq 1$ tal que

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$$

e $f^{(n)}(a) \neq 0$. Expandindo f em série de potências em torno de a, temos

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k, \quad |z-a| < R,$$

no qual $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Defina $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n}$, analítica em $B(a, R)$. Note que podemos escrever

$$f(z) = g(z)(z-a)^n,$$

e que $g(a) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k . 0^{k-n} = a_n \neq 0$. Como g é analítica (e portanto contínua) em $B(a, R)$, existe $r \in]0, R[$ tal que $g(z) \neq 0$ para $|z-a| < r$.

Mas como a é ponto de acumulação de Z, existe b tal que $f(b) = 0$, $0 < |b-a| < r$. Porém,

$$f(b) = 0 = g(b)(b-a)^n \Rightarrow g(b) = 0,$$

e então atingimos uma contradição.

Finalmente, mostraremos que (b) implica em (a).

Seja $A = \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0,\ n \geq 0\}$, não vazio por hipótese. Vamos mostrar que A é aberto e fechado em G. Daí, como G é conectado, concluímos que $A = G$, isto é, $f^{(n)}(z) = 0$, $n \geq 0$, $\forall z \in G$, e portanto $f \equiv 0$.

Afirmação 1: A é fechado.

Seja z ponto de aderência de A e z_k uma sequência em A tal que $z = \lim z_k$. Vamos mostrar que o ponto $z \in \overline{A}$ também pertence a A, i.e., $A = \overline{A}$.

Como f é analítica, $f^{(n)}$ é contínua e logo

$$f^{(n)}(z) = \lim f^{(n)}(z_k) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in A.$$

Afirmação 2: A é aberto.

Seja $a \in A$, $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Então

$$f(z) = \sum a_n (z-a)^n, \quad |z-a| < R,$$

onde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$, para todo $n \geq 0$.

Portanto, $\forall z \in B(a, R)$,

$$f(z) = 0 \Rightarrow B(a, R) \subset A.$$

Logo, A é aberto.

$\square$

Corolário 11. *Seja f analítica e não identicamente nula em uma aberto G. Então para cada $a \in G$ tal que $f(a) = 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, e uma função analítica $g : G \to \mathbb{C}$, $g(a) \neq 0$, e*

$$f(z) = (z - a)^n g(z), \quad \forall z \in G,$$

isto é, cada zero da f tem multiplicidade finita.

Corolário 12. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ analítica e não constante, $a \in G$ tal que $f(a) = 0$. Então existe $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$ e $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - a| < R$.*

Note que do Teorema anterior, podemos concluir que os zeros de uma função analítica não constante são pontos isolados.

Estudaremos agora um resultado já visto anteriormente, porém de forma muito breve, e apresentaremos sua demonstração.

Teorema 34 (Teorema do Módulo Máximo)**.** *Se G é uma região e $f : G \to \mathbb{C}$ é uma função analítica tal que existe um ponto $a \in G$ com $|f(a)| \geq |f(z)|$, $\forall z \in G$, então f é uma função constante.*

Demonstração. Seja $B[a, r] \subset G$, $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) rie^{it}}{(a + re^{it}) - a}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt. \end{aligned}$$

Note que
$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt \leq |f(a)|,$$
pois como $|f(a+re^{it})| \leq |f(a)|$, então
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a)|\,dt = |f(a)|.$$
Do anterior,
$$\begin{aligned} & |f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt \\ \Leftrightarrow\quad & \int_0^{2\pi} |f(a)| - |f(a+re^{it})|\,dt = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & |f(a)| - |f(a+re^{it})| = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & |f(a)| = |f(a+re^{it})|, \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$
Como r é arbitrário, f mapeia qualquer disco $B(a,R) \subset G$ em $|z| = |f(a)|$, $\forall z \in B(a,R)$. Logo, f é constante em $B(a,R)$.

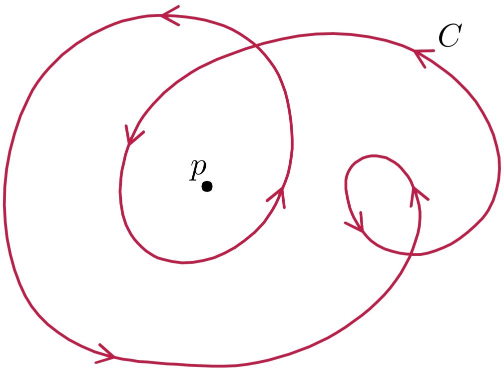
□

Observe que do Teorema anterior podemos obter o resultado 7. De fato, se f é uma função não constante analítica em $int\, G$ e contínua em ∂G, que é um compacto, então existe $\max |f|$ em $\overline{G}$. Mas do Teorema anterior, não existe $\max |f|$ em $int\, G$. Logo, $\max |f|$ é atingida em ∂G.

9.3 Índice de uma curva fechada

Definição 23. *Seja γ uma curva fechada e retificável em $\mathbb{C}$. Então para $w \notin \{\gamma\}$,*
$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-w)^{-1}\,dz \tag{9.6}$$
é chamado índice de γ em relação a w.

O índice, também chamado número de circulação, é sempre um número inteiro, como pode ser visto na página 81 da referência [F]. Além do mais, o valor do índice de γ em relação w no diz o número de voltas no sentido anti-horário da curva γ em torno do ponto w.



Na figura anterior, a curva C faz duas voltas no sentido anti-horário em torno do ponto p, logo $n(C, p) = 2$.

O que faremos mais adiante será utilizar a definição de índice apresentada para desenvolver os teoremas de Cauchy estudados no Capítulo 6, porém sob um ponto de vista um pouco mais avançado. Mas primeiramente, vamos apresentar dois resultados.

Teorema 35. *Seja γ fechada e retificável em $\mathbb{C}$. Então $n(\gamma, a)$ é constante para a pertencente a uma componente de $G = \mathbb{C} - \{\gamma\}$. Além disso, $n(\gamma, a) = 0$ para a pertencente à componente ilimitada de G.*

Lema 6. *Seja γ uma curva retificável e suponha φ uma função definida e contínua em $\{\gamma\}$. Para cada $m \geq 1$, seja $F_m = \displaystyle\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^m}\,dw$, $z \notin \{\gamma\}$. Então, cada F_m é analítica em $\mathbb{C} - \{\gamma\}$ e $F'_m(z) = mF_{m+1}(z)$.*

Teorema 36 (Fórmula Integral de Cauchy - 1ª versão)**.** *Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Se γ é uma curva fechada e retificável em G tal que $n(\gamma, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$, então para $a \in G - \{\gamma\}$,*

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \tag{9.7}$$

Teorema 37 (Fórmula Integral de Cauchy - 2ª versão)**.** *Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Se $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ são curvas fechadas e retificáveis em G tais que $n(\gamma_1, w) + ... + n(\gamma_m, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$, então para $a \in G - \{\gamma\}$,*

$$f(a)\sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \tag{9.8}$$

Faremos apenas a demonstração para a segunda versão, uma vez que a primeira se resume em um caso particular para $m = 1$.

Demonstração. Defina a função $\varphi : G \times G \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w, \\ \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Note que φ é uma função contínua, e para cada $w \in G$, $z \to \varphi(z,w)$ é analítica.

Considere o conjunto $H = \{w \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, w) = 0\}$, fechado e aberto em $\mathbb{C}$. Por hipótese, $H \cup G = \mathbb{C}$.

Defina agora $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \varphi(z,w)\, dw, & z \in G \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, & z \in H. \end{cases}$$

Note que para $z \in G \cap H$, $n(\gamma_k, z) = 0$ e então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \varphi(z,w)\, dw &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(z)}{w - z}\, dw \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z) \int_{\gamma_k} \frac{1}{w - z}\, dw \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z) 2\pi i n(\gamma_k, z) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \end{aligned}$$

Portanto a função g está bem definida.

Pelo lema 6, para cada γ_k, $\displaystyle\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ é analítica em $\mathbb{C}$. Logo, $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ é inteira. Vamos mostrar que g é também uma função limitada.

Como f é analítica em cada $\{\gamma_k\}$, então é contínua no compacto $\{\gamma_k\}$. Consequentemente, f é uma função limitada neste compacto e $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{1}{w-z} = 0$ uniformemente para $w \in \{\gamma_k\}$. Assim,

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k=1}^{m} \lim_{z\to\infty} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ é equivalente a dizer que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R \in \mathbb{N}$ tal que para $|z| > R$, então $|g(z)| < \varepsilon$.

Particularmente, para $\varepsilon = 1$, sabemos que existe $R > 0$ tal que $|g(z)| < 1$ para $|z| \geq R$.

Como g também é limitada em $B[0,R]$, então g é limitada em $\mathbb{C}$. Mas pelo Teorema de Liouville, como g é inteira e limitada, então g é constante. Mais ainda, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ implica que $g \equiv 0$.

Assim, para $a \in G - \{\gamma_k\}$,

$$\begin{aligned}
g = 0 \quad &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a) \int_{\gamma_k} \frac{1}{z-a}\,dz \right] \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a) n(\gamma_k, a) 2\pi i \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) 2\pi i \\
\Leftrightarrow \quad & f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.
\end{aligned}$$

$\square$

O próximo resultado será uma consequência do anterior.

Teorema 38 (Teorema de Cauchy - 1ª versão)**.** *Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ analítica. Se $\gamma_1, ..., \gamma_m$ são curvas fechadas e retificáveis em G tais que $n(\gamma_1, w) + ... + n(\gamma_m, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$, então*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 0. \tag{9.9}$$

Demonstração. Da Fórmula Integral de Cauchy, sabemos que para $a \in G - \{\gamma_k\}$,

$$f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Defina a função $g(z) \doteq \dfrac{f(z)}{z-a} \Leftrightarrow f(z) = g(z)(z-a)$. Então

$$g(a)(a-a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} g(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} g(z)\, dz = 0.$$

$\square$

Considere o anel $G = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ e defina as curvas γ_1 e γ_2 em G por $\gamma_1(t) = r_1 e^{it}$, $\gamma_2(t) = r_2 e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Note que γ_1 está orientada no sentido negativo, enquanto γ_2 está orientada no sentido positivo. Se $|w| \leq R_1$, então $n(\gamma_1, w) = 1 = -n(\gamma_2, w)$; se $|w| \geq R_2$, então $n(\gamma_1, w) = n(\gamma_2, w) = 0$. Ou seja, $n(\gamma_1, w) + n(\gamma_2, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$.

Teorema 39. *Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ analítica. Se $\gamma_1, ..., \gamma_m$ são curvas fechadas e retificáveis em G tais que $n(\gamma_1, w) + ... + n(\gamma_m, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$, então para $a \in G - \{\gamma\}$ e $k \geq 1$,*

$$f^{(k)}(a) \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, a) = \frac{k!}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz.$$

Corolário 13. *Seja G um aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ analítica. Se γ é uma curva fechada e retificável em G tal que $n(\gamma, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$ então para $a \in G - \{\gamma\}$,*

$$f^{(k)}(a)n(\gamma, a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz.$$

Definição 24. *Um caminho fechado T é chamado triangular se for uma poligonal e possuir três lados.*

Teorema 40 (Teorema de Morera)**.** *Seja G uma região e seja $f : G \to \mathbb{C}$ contínua tal que $\int_T f = 0$ para cada caminho triangular $T \subset G$. Então, f é analítica em G.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos assumir $G = B(a, R)$, $R > 0$, pois queremos provar que f é analítica em cada disco aberto em G. Usamos a hipótese para provar que f tem primitiva.

Para cada $z \in G$, defina $F(z) = \displaystyle\int_{[a,z]} f$.

Fixe z_0 em G. Então para qualquer ponto $z \in G$, temos da hipótese que

$$F(z) = \int_{[a,z_0]} f + \int_{z_0,z]} f.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0}\left[\int_{[a,z_0]} f + \int_{[z_0,z]} f - \int_{[a,z_0]} f\right] \\
&= \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) &= \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f - f(z_0) \\
&= \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} [f - f(z_0)]\, dw.
\end{aligned}$$

Tomando o módulo, obtemos

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| \leq |f(z) - f(z_0)|,$$

e portanto,

$$\lim_{z \to 0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0).$$

□

9.4 Versão homotópica do Teorema de Cauchy

Apresentamos nesta seção uma condição sobre uma curva fechada γ tal que $\int_\gamma f = 0$ para uma função f analítica. Esta condição é menos geral, porém mais geométrica que a condição do número de circulação. Utilizaremos também esta condição para introduzir o conceito de região simplesmente conectada. Em uma região simplesmente conectada, o Teorema de Cauchy é válido para toda função analítica e toda curva fechada retificável. Vamos ilustrar esta condição considerando uma curva fechada em um disco.

Seja $G = B(a, R)$ e $\gamma : [0, 1] \to G$ uma curva fechada e retificável. Se $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq s \leq 1$, tome

$$z = at + (1 - t)\gamma(s).$$

Note que z pertence ao segmento de reta de a até $\gamma(s)$, e portanto $z \in G$, uma vez que G é convexo. O conceito de convexidade será melhor definido mais adiante.

Seja $\gamma_t(s) = at + (1 - t)\gamma(s)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$. Então $\gamma_0(s) = \gamma(s)$ e $\gamma_1 = a$ (curva constante igual ao ponto a). As demais curvas γ_t estarão entre γ_1 e $\gamma(s)$.

Definição 25. *Sejam $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to G$ curvas fechadas e retificáveis em G, aberto em $\mathbb{C}$; então γ_0 é dita homotópica a γ_1 em G se existe uma função contínua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ tal que*

$$\begin{cases} \Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) \;\; e \;\; \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s), \;\; (0 \leq s \leq 1), \\ \Gamma(0, t) = \Gamma(1, t), \;\; (0 \leq t \leq 1), \end{cases} \tag{9.10}$$

e escrevemos que $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Observação 9.4.1. Dizemos que $\gamma \sim 0$ quando γ é homotópica a uma curva constante.

De maneira mais informal, podemos dizer que uma curva γ_1 é homotópica a γ_2 se uma pode ser continuamente deformada na outra.

Se definirmos $\gamma_t : [0, 1] \to G$ por $\gamma_t(s) = \Gamma(s, t)$, então cada γ_t é uma curva fechada e elas formam uma família contínua de curvas que começam em γ_0 e terminam em γ_1.

Vamos mostrar agora que a relação $\sim$ de homotopia é uma relação de equivalência. Sejam $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ curvas fechadas e retificáveis. Então valem as seguintes propriedades:

1. Reflexiva: Toda curva é homotópica a ela mesma.

2. Simétrica: $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Leftrightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

   De fato, Se $\gamma_0 \sim \gamma_1$ e $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ satisfaz 9.10, então defina $\Lambda(s,t) = \Gamma(s, 1-t)$. Assim,

$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = \gamma_1(s) \Rightarrow \begin{cases} \Lambda(s,0) = \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), \\ \Lambda(s,1) = \Gamma(s,0) = \gamma_0(s). \end{cases}$$

$$\Gamma(0,t) = \Gamma(1,t) \Rightarrow \begin{cases} \Lambda(0,t) = \Gamma(0,1-t) = \Gamma(1,1-t), \\ \Lambda(1,t) = \Gamma(1,1-t). \end{cases}$$

3. Transitiva: Se $\gamma_0 \sim \gamma_1$ e $\gamma_1 \sim \gamma_2$, então $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

   De fato, considere as funções $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$, definindo a relação $\gamma_0 \sim \gamma_1$, e $\Lambda[0,1] \times [0,1] \to G$, definindo a relação $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Assim,

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s), \\ \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), \end{cases}$$

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \begin{cases} \Lambda(s,0) = \gamma_1(s), \\ \Lambda(s,1) = \gamma_2(s), \\ \Lambda(0,t) = \Lambda(1,t). \end{cases}$$

   Queremos mostrar que existe $\Phi(s,t) : [0,1] \times [0,1] \to G$ contínua tal que, para $0 \leq s,t \leq 1$,

   I. $\Phi(s,0) = \gamma_0(s)$,

   II. $\Phi(s,1) = \gamma_2(s)$,

   III. $\Phi(0,t) = \Phi(1,t)$.

   Defina $\Phi(s,t) = \begin{cases} \Gamma(s,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ \Lambda(s,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

   Logo, para o item I, temos $\Phi(s,0) = \Gamma(s,0) = \gamma_0(s)$.

   Para o item II, temos $\Phi(s,1) = \Lambda(s,0) = \gamma_1(s)$.

   Para o item III, observe que

$$\Phi(0,t) = \begin{cases} \Gamma(0,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \\ \Lambda(0,2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

$$\Phi(1,t) = \begin{cases} \Gamma(1,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \\ \Lambda(1,2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Para $t \in [0, \frac{1}{2}]$, defina $r = 2t$, e note que $r \in [0,1]$. Então,

$$\Gamma(0,2t) = \Gamma(1,2t) \Rightarrow \Phi(0,2t) = \Phi(1,2t) \Rightarrow \Phi(0,r) = \Phi(1,r).$$

Analogamente para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, defina $u = 2t-1$, $u \in [0,1]$. Então,

$$\Lambda(0,2t-1) = \Lambda(1,2t-1) \Rightarrow \Phi(0,u) = \Phi(1,u).$$

Definição 26. *Um conjunto G é convexo se dados dois pontos $a, b \in G$ então $\overline{ab} \subset G$.*

Definição 27. *Dizemos que um conjunto G é estrelado se existe um ponto $a \in G$ tal que para cada $z \in G$, $\overline{az} \subset G$. Para um ponto a satisfazendo esta condição, dizemos que G é $a-$estrelado.*

Observe que todo conjunto convexo será também estrelado, mas o contrário nem sempre é válido.

Proposição 8. *Seja G um aberto $a-$estrelado. Se γ_0 é a curva constante e igual a a, então toda curva fechada retificável em G é homotópica a γ_0.*

Em outras palavras, em um aberto $a-$estrelado, toda curva fechada e retificável pode ser continuamente deformada em um ponto.

Teorema 41 (Teorema de Cauchy - 2ª versão)**.** *Se $f : G \to \mathbb{C}$ é uma função analítica e γ uma curva fechada retificável em G tal que $\gamma \sim 0$, então*

$$\int_\gamma f = 0. \tag{9.11}$$

Teorema 42 (Teorema de Cauchy - 3ª versão)**.** *Se γ_0 e γ_1 são curvas fechadas retificáveis em um aberto G e $\gamma_0 \sim \gamma_1$, então para f função analítica em G,*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f. \tag{9.12}$$

A segunda versão do Teorema de Cauchy seguirá diretamente da primeira caso provado que $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - G$ sempre que $\gamma \sim 0$. Para isto, considere $\gamma_1 = \gamma$ e γ_0 uma curva constante tal que $\gamma_1 \sim \gamma_0$. Seja Γ uma função que satisfaz 9.10, e defina $h(t) = n(\gamma_t, w)$, onde $\gamma_t(s) = \Gamma(s,t)$, para $0 \leq s, t \leq 1$, $w \in \mathbb{C} - G$ fixado. Como h é uma função de valores inteiros e $h(0) = n(\gamma_0, w) = 0$, então $h \equiv 0$. Em particular, $n(\gamma, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$.

Entretanto, não podemos garantir que, para $0 < t < 1$, γ_t é retificável. Uma demonstração mais geral e mais elaborada para a segunda e terceira versões do Teorema de Cauchy pode ser encontrada na página 91 da referência [F].

Corolário 14. *Se γ é uma curva fechada retificável em G tal que $\gamma \sim 0$, então $n(\gamma, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$.*

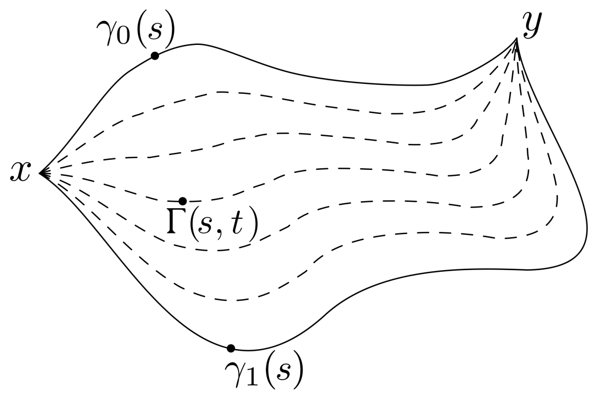
Demonstração. O resultado segue diretamente da terceira versão do Teorema de Cauchy. Seja $\gamma_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva constante tal que $\gamma \sim \gamma_0$. Logo,

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{1}{z - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - w}\, dt = 0.$$

□

Definição 28. *Se $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ são duas curvas retificáveis em G tais que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$, então γ_0 e γ_1 são homotópicas de extremos fixados se existe uma função contínua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ tal que*

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s), \quad \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), \quad (0 \leq s \leq 1), \\ \Gamma(0,t) = a, \quad \Gamma(1,t) = b, \quad (0 \leq t \leq 1). \end{cases} \tag{9.13}$$



A relação de homotopia de extremos fixados, assim como a relação de homotopia para curvas fechadas, será uma relação de equivalência. Observe que se γ_0, γ_1 são curvas retificáveis de a até b, então $\gamma_0 - \gamma_1$ é uma curva fechada retificável. Este fato, juntamente com a terceira versão do Teorema de Cauchy, resulta no seguinte teorema.

Teorema 43 (Teorema da Independência de Caminhos)**.** *Se γ_0, γ_1 são curvas retificáveis em G de a até b e γ_0 e γ_1 são homotópicas de extremos fixados, então*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f,$$

para qualquer função analítica em G.

Definição 29. *Um aberto G é simplesmente conectado se G é conectado e toda curva fechada em G é homotópica a zero.*

Apresentamos agora a quarta versão do Teorema de Cauchy, encontrada em grande parte dos livros de funções em uma variável complexa, e apresentada em capítulos anteriores. Note que antes de apresentarmos este resultado, fizemos uso de conceitos mais elaborados, construindo versões intermediárias até finalmente termos o ferramental necessário para esta versão, apresentada a seguir.

Teorema 44 (Teorema de Cauchy - 4ª versão)**.** *Se G é simplesmente conectado, então*

$$\int_{\gamma} f = 0, \tag{9.14}$$

para toda curva fechada retificável e toda função f analítica em G.

A demonstração segue direto da segunda versão do Teorema de Cauchy, uma vez que para G simplesmente conectado, $\gamma \sim 0$ para toda curva γ fechada e retificável em G.

Corolário 15. *Se G é simplesmente conectado e $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica em G, então f tem uma primitiva em G.*

Corolário 16. *Seja G simplesmente conectado e $f : G \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Então existe uma função analítica $g : G \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

Se $z_0 \in G$ e $e^{w_0} = f(z_0)$, devemos escolher g tal que $g(z_0) = w_0$.

Demonstração. Considere a função $\dfrac{f'}{f}$, bem definida pela hipótese de que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Note que $\dfrac{f'}{f}$ é uma função analítica, uma vez que a analiticidade da função f implica na analiticidade de suas derivadas.

Como G é simplesmente conectado e $\dfrac{f'}{f}$ é analítica em G, existe g_1 primitiva de $\dfrac{f'}{f}$. Se $h(z) = e^{g_1(z)}$, então h é analítica e $h(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Assim, a função $\dfrac{f}{h}$ é analítica, não nula, e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\frac{f}{h}(z)\right] &= \frac{f'(z)h(z) - f(z)h'(z)}{h^2(z)} \\
&= \frac{f'(z)e^{g_1(z)} - f(z)g_1'(z)e^{g_1(z)}}{h^2(z)} \\
&= \frac{f'(z)h(z) - f(z)\dfrac{f'}{f}(z)h(z)}{h^2(z)} \\
&= \frac{1}{h}[f' - f'] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{f}{h}(z) = c$, no qual c é uma constante. Assim, escrevendo $c = e^m$, para uma constante m, temos

$$f(z) = ch(z) = ce^{g_1(z)} = e^{g_1(z)+m}.$$

Logo, para $g(z) = g_1(z) + m + 2k\pi i$,

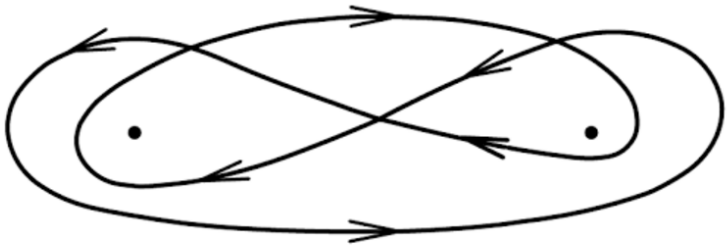
$$g(z_0) = w_0$$

e o teorema está provado. □

Para finalizar esta seção, apresentamos uma definição que será utilizada mais adiante.

Definição 30. *Seja G é um aberto; dizemos que γ é homóloga a zero ($\gamma \approx 0$) se, para todo $w \in \mathbb{C} - G$, $n(\gamma, w) = 0$.*

Note que do Corolário 14, $\gamma \sim 0$ implica que $\gamma \approx 0$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. A figura a seguir mostra uma curva γ no aberto $G = \mathbb{C} - \{0, 1\}$ que é homóloga a zero, porém não homotópica a zero.



Observe que a curva γ realiza uma volta no sentido positivo em torno de 0 e de 1, e também realiza uma volta no sentido negativo em torno de 0 e de 1. Claramente, para $\{0, 1\} = \mathbb{C} - G$, temos que

$$n(\gamma, 0) = n(\gamma, 1) = 0,$$

de modo que $\gamma \approx 0$. No entanto, é possível observar que γ não é homotópica a zero.

9.5 Contando Zeros

Considere uma função $f : G \to \mathbb{C}$ analítica e $a \in G$ zero de f, isto é, $f(a) = 0$. Do Corolário 11, $f(z) = (z - a)^m g(z)$, para g analítica e $g(a) \neq 0$.

Suponha que $a_1, ..., a_m$ são zeros da f (alguns podendo ser repetidos, de acordo com a multiplicidade). Então escrevemos

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)...(z - a_m)g(z),$$

para g analítica e não nula em G.

Note que podemos escrever

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + ... + \frac{1}{z - a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \tag{9.15}$$

pois como

$$\begin{aligned} f'(z) = \; & (z - a_2)...(z - a_m)g(z) + (z - a_1)(z - a_3)...(z - a_m)g(z) \\ & +... + (z - a_1)...(z - a_m)g'(z), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{(z - a_2)...(z - a_m)g(z)}{(z - a_1)...(z - a_m)g(z)} + ... + \frac{(z - a_1)...(z - a_m)g'(z)}{(z - a_1)...(z - a_m)g(z)} \\ &= \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + ... + \frac{1}{z - a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Teorema 45. *Seja G uma região e f uma função analítica em G com zeros $a_1, ..., a_m$ (repetidos de acordo com a multiplicidade). Se γ é uma curva fechada e retificável em G que não passa sobre nenhum ponto a_k e se $\gamma \approx 0$, então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k).$$

Demonstração. Se $g(z) \neq 0$, $\forall z \in G$, então $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ é analítica em G. Como $\gamma \approx 0$, do Teorema 38, então $\displaystyle\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} = 0$. Logo, de 9.15 e da definição de índice,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\frac{1}{z - a_1} + ... + \frac{1}{z - a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right] dz \\ &= \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k).\end{aligned}$$

□

Do anterior, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 17. *Sejam f, G, γ como anteriormente, exceto que $a_1, ..., a_m$ são pontos em G que satisfazem a equação $f(z) = \alpha$, para um $\alpha \in \mathbb{C}$. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\, dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k).$$

Demonstração. Se considerarmos a função $h(z) = f(z) - \alpha$, então $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ também é analítica e $\dfrac{h'(z)}{h(z)} = \dfrac{f'(z)}{f(z) - \alpha}$, e o resultado segue direto do teorema anterior. Note que $a_1, ..., a_m$ são zeros de h. □

Exemplo 9.5.1. Utilizando os resultados anteriores, vamos calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z + 1}{z^2 + z + 1}\, dz$, no qual γ é o círculo $|z| = 2$.

Primeiramente, observe que $\dfrac{d}{dz}[z^2 + z + 1] = 2z + 1$; além disso, note que $z^2 + z + 1 = \dfrac{1 - z^3}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$, $z \neq 1$. Logo, o denominador fatora em $(z-w_1)(z-w_2)$, onde w_1, w_2 são as raízes cúbicas não reais de 1 e $w_1, w_2 \in int\gamma$.

Do Teorema 45,

$$\int_\gamma \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz = 2\pi i[n(\gamma, w_1) + n(\gamma, w_2)] = 4\pi i.$$

Exemplo 9.5.2. Seja $\gamma : [0,1] \to G$ fechada e retificável em $\mathbb{C}$ tal que $\gamma \approx 0$ e suponha f uma função analítica em G. Então, $f \circ \gamma = \sigma$ é uma curva fechada e retificável em $\mathbb{C}$. Suponha que α é um número complexo com $\alpha \notin \{\sigma\} = f(\{\gamma\})$. Vamos calcular $n(\sigma, \alpha)$.

Se $a_1, ..., a_m$ são pontos em G tais que $f(a_k) = \alpha$, do Corolário 17 temos

$$\begin{aligned} n(\sigma,\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{1}{w-\alpha}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz \\ &= \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k). \end{aligned} \tag{9.16}$$

Mostraremos agora a segunda igualdade para γ suave. Note que

$$\begin{aligned} \int_\sigma \frac{1}{w-\alpha}\,dw &= \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w-\alpha}\,dw \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(f\circ\gamma)(t)-\alpha}(f\circ\gamma)'(t)\,dt \\ &= \log((f\circ\gamma)(t)-\alpha)\Big|_0^1. \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz &= \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))-\alpha}\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{[(f\circ\gamma)(t)]'}{(f\circ\gamma)(t)-\alpha}\,dt \\ &= \log((f\circ\gamma)(t)-\alpha)\Big|_0^1, \end{aligned}$$

o que mostra a segunda igualdade.

Observe que é possível que exista uma quantidade infinita de pontos em G que satisfaça $f(z) = \alpha$. Entretanto, esta sequência deve convergir para a fronteira de G. Segue que $n(\gamma, z) \neq 0$ para no máximo um número finito de soluções de $f(z) = \alpha$.

Agora, se $\beta \in \mathbb{C} - \{\sigma\}$ pertence à mesma componente de $\mathbb{C} - \{\sigma\}$ assim como α, então $n(\sigma, \alpha) = n(\sigma, \beta)$, ou

$$\sum_k n(\gamma, z_k(\alpha)) = \sum_j n(\gamma, z_j(\beta)),$$

onde $z_k(\alpha)$ e $z_j(\beta)$ são pontos em G que satisfazem $f(z) = \alpha$ e $f(z) = \beta$, respectivamente. Se escolhermos γ tal que $n(\gamma, z_k(\alpha)) = 1$ para cada k, teríamos que $f(G)$ contém a componente de $\mathbb{C} - f(\{\gamma\})$ que contém α. Mais ainda, teríamos alguma informação sobre o número de soluções de $f(z) = \beta$.

Teorema 46. *Suponha f analítica em $B(a, R)$ e seja $\alpha = f(a)$. Se $f(z) - \alpha$ tem um zero de ordem m em $z = a$, então existe $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que para $|\xi - \alpha| < \delta$, a equação $f(z) = \xi$ tem exatamente m raízes simples em $B(a, c)$.*

Uma raiz simples de $f(z) = \xi$ é um zero de $f(z) - \xi$ de multiplicidade 1. Note que o Teorema nos diz que $B(\alpha, \delta) \subset f(B(a, c))$, pois para $w \in B(\alpha, \delta)$ e $a_1, a_2, ..., a_m$ tais que $f(a_k) = w$, então $a_k \in B(a, c)$. Além disso, a condição de que $f(z) - \alpha$ tem um zero de multiplicidade finita garante que f é não constante.

Demonstração. Como os zeros de uma função analítica são isolados, podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que para $\varepsilon < \frac{1}{2}R$, $f(z) = \alpha$ não tem solução com $0 < |z - a| < 2\varepsilon$ e $f'(z) \neq 0$ se $0 < |z - a| < 2\varepsilon$.

Seja $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$, e seja $\sigma = f \circ \gamma$.

Observe que $\alpha \notin \{\sigma\}$, uma vez que, da construção de γ, $f(\gamma(t)) \neq \alpha$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $B(\alpha, \delta) \cap \{\sigma\} = \emptyset$.

Logo, $B(\alpha, \sigma)$ está contida na mesma componente de $\mathbb{C} - \{\sigma\}$, isto é, para $\xi \in B(\alpha, \sigma)$,

$$n(\sigma, \alpha) = n(\sigma, \xi) = \sum_{k=1}^{p} n(\gamma, z_k(\xi)), \tag{9.17}$$

no qual $z_k(\xi)$ são os pontos que satisfazem $f(z) = \xi$.

Mas como γ é a curva que define o círculo de centro a e raio ε, $n(\gamma, z)$ assume apenas os valores 0 ou 1, e então temos exatamente m soluções para a equação $f(z) = \xi$ em $B(a, \varepsilon)$. De fato, para $f(z) - \alpha = (z - a)^m h(z)$, $h(a) \neq 0$, obtemos de 9.16 e 9.17 que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m(z-a)^{m-1}h(z)+(z-a)^m h'(z)}{(z-a)^m h(z)}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma m\frac{1}{z-a}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz \\
&= mn(\gamma, a) = m.
\end{aligned}$$

Como $f'(z) \neq 0$ para $0 < |z-a| < \varepsilon$, cada uma dessas raízes (para $\xi \neq \alpha$) deve ser simples.

□

Teorema 47 (Teorema do Mapeamento Aberto)**.** *Seja G uma região e suponha que f é uma função analítica e não constante em G. Então para qualquer conjunto aberto U, $f(U)$ é aberto.*

Demonstração. Se $U \subset G$ é aberto, então teremos mostrado que $f(U)$ é aberto se mostrarmos que para cada $a \in U$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B(\alpha, \delta) \subset f(U),$$

onde $\alpha = f(a)$. Usando o teorema anterior, encontramos $\varepsilon > 0, \delta > 0$ tais que $B(a, \varepsilon) \subset U$ e $f(B(a, \varepsilon)) \supset B(\alpha, \delta)$.

□

Capítulo 10

Singularidades

Iniciamos este capítulo com algumas definições e resultados a respeito de singularidades isoladas de funções $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Em seguida, mostraremos como a teoria de funções em uma variável complexa estudada até o momento será de grande auxílio no cálculo de integrais de funções em uma variável real.

10.1 Classificação de Singularidades

Nesta seção retomamos brevemente o estudo de singularidades isoladas, bem como suas classificações, e utilizando o Teorema de Laurent enunciaremos um resultado conhecido como Teorema de Casorati-Weierstrass.

Definição 31. *Seja a uma singularidade isolada da função f, como na definição 16. O ponto a é chamado singularidade removível se existe uma função analítica $g : B(a, R) \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para $0 < |z - a| < R$.*

Veremos mais adiante que esta definição é equivalente àquela apresentada na seção 8.1.

Teorema 48. *Se f possui uma singularidade isolada em a, então o ponto $z = a$ é uma singularidade removível se, e somente se,*

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0. \tag{10.1}$$

Definição 32. *Se $z = a$ é uma singularidade isolada de f, então a é um polo de f se $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$.*

Se a é uma singularidade isolada que não é polo nem singularidade removível, então a é chamada singularidade essencial.

Suponha que f tem um polo em $z = a$. Da definição 32 e do teorema 48, segue que $[f(z)]^{-1}$ tem uma singularidade removível em $z = a$. Logo, a função $h(z) = [f(z)]^{-1}$, para $z \neq a$ e $h(a) = 0$, é analítica em $B(a, R)$ para algum $R > 0$. No entanto, como $h(a) = 0$, segue do corolário 11 que $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ para alguma função analítica h_1 com $h_1(a) \neq 0$ e algum inteiro $m \geq 1$. Mas daí obtemos que $(z-a)^m f(z) = [h_1(z)]^{-1}$ tem uma singularidade removível em $z = a$.

Proposição 9. *Se G é uma região com $a \in G$ e se f é analítica em $G - \{a\}$ com um polo em $z = a$, então existe um inteiro positivo m e uma função analítica $g : G \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}. \tag{10.2}$$

Definição 33. *Se f tem um polo em $z = a$ e m é o menor inteiro positivo positivo tal que $f(z)(z-a)^m$ tem uma singularidade removível em $z = a$, então f tem um polo de ordem m em $z = a$.*

Exemplo 10.1.1. Considere $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, em que p, q são polinômios sem zeros em comum. Os polos de $r(z)$ são os zeros de $q(z)$. Mais ainda, a ordem de cada polo de $r(z)$ é a ordem do zero de $q(z)$.

Suponha $q(a) = 0$ e seja $S(z)$ a parte singular de $r(z)$ em a. Então, $r(z) - S(z) = r_1(z)$ e $r_1(z)$ é uma função racional cujos polos são também polos de $r(z)$.

Das definições acima e do Teorema 26 (Teorema de Laurent), recuperamos as classificações para singularidades isoladas da seção 8.1. Esta equivalência é resumida no Corolário 1.18, encontrado na página 109 da referência [F].

Teorema 49 (Teorema de Casorati-Weierstrass)**.** *Se f possui uma singularidade essencial em $z = a$, então para todo $\delta > 0$,*

$$\overline{f(A(a, 0, \delta))} = \mathbb{C},$$

no qual $A(a, 0, \delta) = \{z : 0 < |z - a| < \delta\}$.

Demonstração. Suponha f analítica em $A(a, 0, R)$. Vamos mostrar que se c e $\varepsilon > 0$ são dados, então para cada $\delta > 0$ podemos encontrar z tal que $|z - a| < \delta$ e $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Assuma por absurso que existam $c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ tais que $|f(z) - c| \geq \varepsilon$, $\forall z \in A(a, 0, \delta)$. Logo,

$$\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - c|}{|z - a|} = \infty,$$

e da definição 32, $\dfrac{f(z)-c}{z-a}$ tem um polo em $z=a$. Se m é a ordem desse polo, então da definição 33 e do teorema 48,

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{m+1}|f(z)-c|=0.$$

Portanto, como $m \geq 1$,

$$|z-a|^{m+1}|f(z)| \leq |z-a|^{m+1}|f(z)-c| + |z-a|^{m+1}|c|$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to a}|z-a|^{m+1}|f(z)|=0.$$

Mas do teorema 48, $f(z)(z-a)^m$ tem uma singularidade removível em $z=a$, o que contraria a hipótese. □

10.2 Resíduos

Nossa motivação agora é analisar os possíveis valores de $\int_\gamma f$ quando f tem uma singularidade isolada no ponto $z=a$ e γ é uma curva fechada tal que $\gamma \approx 0$ e que não passa por a.

Munidos da definição de resíduo fornecida no capítulo 8, apresentamos agora um caso mais geral para o Teorema 28, conhecido com Teorema dos Resíduos.

Teorema 50 (Teorema dos Resíduos)**.** *Seja f analítica na região G exceto pelas singularidades isoladas $a_1, ..., a_n$. Se γ é uma curva fechada e retificável em G que não passa sobre nenhum a_k e se $\gamma \approx 0$ em G, então*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, a_k) \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{10.3}$$

Observe que o Teorema acima equivale ao Teorema 28 se γ é uma curva simples e se cada $a_k \in int\gamma$, uma vez que neste caso teríamos $n(\gamma, a_k) = 1$, $k = 1, ..., n$.

Demonstração. Seja $m_k = n(\gamma, a_k)$ para $1 \leq k \leq m$, e escolha números positivos $r_1, ..., r_m$ tais que dois discos $B[a_k, r_k]$ não se cruzam, nenhum deles cruza $\{\gamma\}$, e cada disco está contido em G.

Seja $\gamma_k(t) = a_k + r_k e^{-2\pi i m_k t}$, $0 \leq t \leq 1$, com orientação oposta à de γ. Note que consideramos apenas as m curvas tais que $\gamma_k(t) \in int\gamma$, $1 \leq k \leq m$.

Então, para $1 \leq j \leq m$,

$$n(\gamma, a_j) + \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a_j) = 0$$

Como $\gamma \approx 0$ em G e $B[a_k, r_k] \subset G$,

$$n(\gamma, a) + \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = 0,$$

para todo $a \notin G - \{a_1, ..., a_m\}$. Como f é analítica em $G - \{a_1, ..., a_m\}$, obtemos do Teorema 38 que

$$\int_\gamma f + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f = 0. \tag{10.4}$$

Se $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n(z - a_k)^n$ é a expansão de Laurent em torno de $z = a_k$, então esta série converge uniformemente em $B[a_k, r_k]$.

Logo, $\int_{\gamma_k} f = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \int_{\gamma_k} (z - a_k)^n$. Porém, $\int_{\gamma_k} (z - a_k)^n = 0$ se $n \neq -1$, desde que $(z - a_k)^n$ tenha uma primitiva.

Além disso,

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z - a_k} = 2\pi i n(\gamma_k, a_k) \operatorname*{Res}_{z=a_k} f,$$

e portanto, de 10.4, obtermos o resultado desejado.

$\square$

Suponha agora que f tenha um polo de ordem $m \geq 1$ em $z = a$. Então $g(z) = (z - a)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em $z = a$ e $g(a) \neq 0$. Seja $g(z) = b_0 + b_1(z - a) + ...$ a expansão em série de potências de g em torno de $z = a$. Segue que para z próximo de a, porém não igual,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - a)^m} + ... + \frac{b_{m-1}}{(z - a)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k}(z - a)^k.$$

Esta equação nos dá a expansão em série de Laurent de f em um disco furado em torno de $z = a$.

Mas então, $\operatorname*{Res}_{z=a} f = b_{m-1}$. Em particular, se $z = a$ é um polo simples,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f = g(a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z),$$

o que é resumido a seguir.

Proposição 10. *Suponha que f tenha um polo de ordem m em $z = a$ e considere $g(z) = (z - a)^m f(z)$. Então*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m - 1)!} g^{(m-1)}(a). \tag{10.5}$$

Observe que das Proposições 9 e 10, recuperamos o Teorema 29.

10.2.1 Aplicações

Para finalizar este capítulo, mostraremos como a teoria de resíduos de funções em uma variável complexa pode ser utilizada como uma ferramenta para o cálculo de integrais de funções da forma $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veremos que o Teorema dos Resíduos pode tornar-se um método viável para o auxílio de tais cálculos, dada a complexidade que estes podem apresentar por solução via métodos estudados no Cálculo.

Exemplo 10.2.1. Mostraremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Solução. Se $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$, então seus polos são os pontos nos quais $1+z^4 = 0$.

Resolvendo a equação $z^4 = -1$, $z = re^{i\theta}$, obtemos $r = 1$ e $\theta = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$. Logo, as raízes são

$$a_1 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_2 = e^{i3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_3 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_4 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

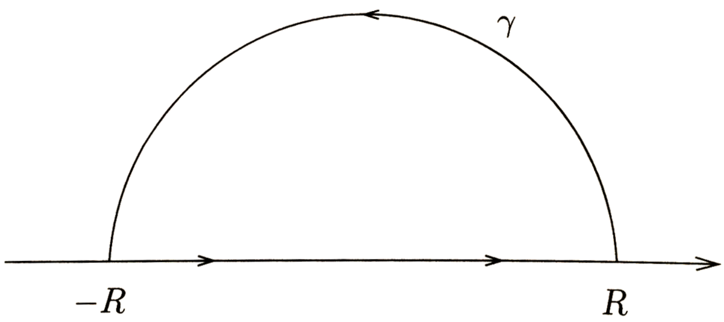
As singularidades de $f(z)$ são a_1, a_2, a_3 e a_4.

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) &= \lim_{z\to a_1}(z-a_1)f(z)\\
&= \lim_{z\to a_1}(z-a_1)\frac{z^2}{1+z^4}\\
&= \lim_{z\to a_1}(z-a_1)\frac{z^2}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}\\
&= \lim_{z\to a_1}\frac{z^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}\\
&= \frac{{a_1}^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{4}e^{-i\pi/4}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $\operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z) = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}$.

Agora considere $R > 1$ e seja γ o caminho fechado definido pela fronteira da metade superior do disco de centro 0 e raio R, orientado no sentido anti-horário.



Pelo Teorema dos Resíduos, como $a_1, a_2 \in int\gamma$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f &= n(\gamma,a_1)\operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) + n(\gamma,a_2)\operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z)\\
&= \operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z)\\
&= \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} + \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}\\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Considere $\gamma_1 = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ e $\gamma_2 = x$, $x \in [-R,R]$, e note que $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$. Da definição de integral de linha, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^\pi \frac{(Re^{it})^2}{1+(Re^{it})^4}(Re^{it})'\,dt + \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4}\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{R^3e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.
\end{aligned}
$$

Do anterior,

$$
\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4}\,dx &= 2\pi i\left[-\frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{R^3e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}}\,dt\right]\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - iR^3\int_0^\pi \frac{e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}}\,dt.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
|1+R^4e^{i4t}| = |R^4e^{i4t} - (-1)| \geq |R^4e^{i4t}| - |1| = R^4 - 1.
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left| iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}}\,dt \right| &\leq R^3 \int_0^\pi \left| \frac{e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}} \right| dt \\
&\leq R^3 \int_0^\pi \frac{1}{R^4-1}\,dt \\
&= \frac{R^3}{R^4-1}\pi.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{x^2}{1+x^4} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} - iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}}\,dt.
\end{aligned}$$

Além do mais, $\left| iR^3 \displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{i3t}}{1+R^4e^{i4t}}\,dt \right| \leq \dfrac{R^3}{R^4-1}\pi$ e $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{R^3}{R^4-1}\pi = 0$.

Logo, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

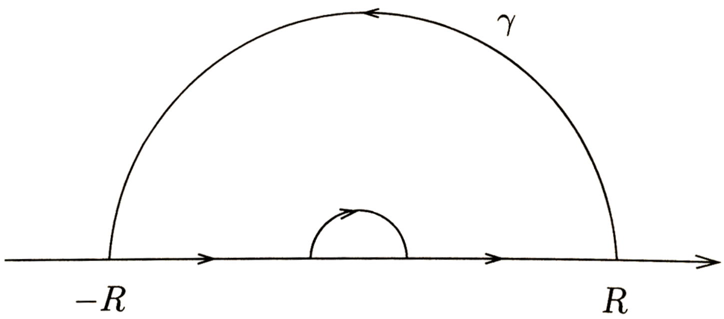
$\square$

Exemplo 10.2.2. Vamos mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solução. A função $\dfrac{e^{iz}}{z}$ tem polo simples em $z=0$. Para $0<r<R$, considere a curva γ fechada dada por $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3 \circ \gamma_4$, em que

$$\begin{array}{ll}
\gamma_1 = Re^{it} & (0 \leq t \leq \pi); \\
\gamma_2 = t, & (-R \leq t \leq -r); \\
\gamma_3 = re^{i(\pi-t)} & (0 \leq t \leq \pi); \\
\gamma_4 = t & (r \leq t \leq R).
\end{array}$$



Do Teorema de Cauchy, $\int_\gamma f = 0$. Da decomposição de γ, temos que

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f = 0$$

e portanto,

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\, dt + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{it}}{t}\, dt = 0. \tag{10.6}$$

Porém, observe que

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx &= \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix}\, dx \qquad (10.7) \\ &= \frac{1}{2i} \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{2i} \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \frac{1}{2i} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx. \end{aligned}$$

Mais ainda, como $\gamma_1 = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{exp\{iRe^{it}\}}{Re^{it}} iRe^{it}\, dt\right| \\
&= \left| i\int_0^{\pi} exp\{iRe^{it}\}\, dt\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \left|exp\{iRe^{it}\}\right|\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \left|exp\{iR(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}\right|\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \left|e^{iR\cos t - R\operatorname{sen} t)}\right|\, dt \\
&= \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt.
\end{aligned}
$$

É possível ver que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o maior valor possível para $e^{-R\operatorname{sen} t}$, $\delta \leq t \leq \pi - \delta$ é $e^{-R\operatorname{sen}\delta}$. Note que δ não depende de R se $R > 1$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| &\leq \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \\
&\leq \int_0^{\delta} e^{-R\operatorname{sen}\delta}\,dt + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt + \int_{\pi-\delta}^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}\delta}\,dt \\
&= e^{-R\operatorname{sen}\delta}\left(\int_0^{\delta} dt + \int_{\pi-\delta}^{\pi} dt\right) + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \\
&= e^{-R\operatorname{sen}\delta} 2\delta + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \\
&\leq 2\delta + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \\
&\leq 2\delta + e^{-R\operatorname{sen}\delta}\int_{\delta}^{\pi-\delta} dt \\
&= 2\delta + e^{-R\operatorname{sen}\delta}(\pi - 2\delta) \\
&= 2\delta + \pi e^{-R\operatorname{sen}\delta} - 2\delta e^{-R\operatorname{sen}\delta} \\
&< 2\delta + \pi e^{-R\operatorname{sen}\delta}.
\end{aligned}$$

Se $\varepsilon > 0$ é dado, escolhendo $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$, existe R_0 tal que $e^{-R\operatorname{sen}\delta} < \dfrac{\varepsilon}{3\pi}$, $\forall R > R_0$.

Portanto,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

Como $\dfrac{e^{iz}-1}{z}$ tem uma singularidade removível em $z = 0$, uma vez que $\lim\limits_{z\to 0} z\left(\dfrac{e^{iz}-1}{z}\right) = 0$, existe uma constante $M > 0$ tal que $\left|\dfrac{e^{iz}-1}{z}\right| < M$ para $|z| \leq 1$.

Logo, para $\gamma_3 = re^{i(\pi - t)}$, $t \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz\right| &\leq \int_{\gamma_3} \left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right| dz \\
&\leq M \int_0^{\pi} |\gamma_3'(t)|\,dt \\
&\leq Mr\pi,
\end{aligned}$$

isto é, $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}-1}{z} = 0$.

Porém,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\,dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{re^{i(\pi-t)}} \left[re^{i(\pi-t)}\right]'\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} e^{-i(\pi-t)} \left[-ie^{-it}\right]\,dt \\
&= i\int_0^{\pi} e^{-i\pi}e^{it}e^{-it}\,dt \\
&= -\pi i.
\end{aligned}$$

Assim, como

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\,dz,$$

então

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\pi i.$$

Logo, para $r \to 0$, $R \to \infty$, de 10.6 e 10.7 concluímos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

Referências Bibliográficas

[C] Brown, J.W. e Churchill, R.V., "Complex Variables and Applications", editora McGraw-Hill, 7ª edição, 2004. 3.6, 3.10, 6.4, 7, 7.1.2

[I] Nahin, Paul J., "An Imaginary Tale : The Story of [the square root of minus one]", Princeton University Press, 1998.

[R] Rudin, W., "Princípios de Análise Matemática", Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1971. 6.1, 9.1, 9.1

[F] Conway, J.B., "Functions of One Complex Variable", editora Springer-Verlag, 2ª edição, 1978. 9.1, 9.1, 9.3, 9.4, 10.1

[E] Lima, Elon Lages, "Álgebra Linear", 7ª edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2004. 2, 2, 2