Curvas no espaço

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva dif. ppca. O vetor $t_\alpha(s) = \alpha'(s)$ é chamado vetor tangente a α em $s \in I$. Observe que $|t_\alpha(s)| = 1 \ \forall s \in I$. Em particular

$$|t_\alpha(s)| = 1 \iff \langle t_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle = 1 \implies \langle t_\alpha'(s), t_\alpha(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I.$$

Caso $t_\alpha'(s) \doteq \alpha''(s)$ não se anule em $s_0 \in I$, definimos o vetor normal a α em s_0 por

$$\boxed{\eta_\alpha(s_0) = \frac{\alpha''(s_0)}{|\alpha''(s_0)|}}$$

e definimos a curvatura de α em s_0 por $\boxed{K_\alpha(s_0) = |\alpha''(s_0)|}$

Dessa forma $\boxed{t_\alpha'(s_0) = \alpha''(s_0)} = \boxed{K_\alpha(s_0) \cdot \eta_\alpha(s_0)}$

obs.: $t_\alpha(s_0) \perp \eta_\alpha(s_0)$ isto é $\langle t_\alpha(s_0), \eta_\alpha(s_0) \rangle = 0$ e além do mais $\|t_\alpha(s_0)\| = 1 = \|\eta_\alpha(s_0)\|$.

Def.: Definimos o vetor binormal $b_s(s_0)$ a curva α em s_0 (supondo $K_\alpha(s_0) \neq 0$) como o único vetor unitário ortogonal a $t_\alpha(s_0)$ e $\eta_\alpha(s_0)$ tal que

$\{t_\alpha(s_0), \eta_\alpha(s_0), b_\alpha(s_0)\}$ seja uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$

Dessa forma $\langle b_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle = 0, \ \forall s \in I \implies$

$$\langle b_\alpha'(s), t_\alpha(s)\rangle + \langle b_\alpha(s), t_\alpha'(s)\rangle = 0, \ \forall s \in I$$

Agora

$$b_\alpha'(s) = \langle b_\alpha'(s), t_\alpha(s)\rangle \cdot t_\alpha(s) + \langle b_\alpha'(s), \eta_\alpha(s)\rangle \cdot \eta_\alpha(s)$$

$$+ \langle b_\alpha'(s), b_\alpha(s)\rangle \cdot b_\alpha(s)$$

E como $\boxed{\langle b_\alpha'(s), t_\alpha(s)\rangle = 0 = \langle b_\alpha'(s), b_\alpha(s)\rangle}$ (✯)

temos $b_\alpha'(s) = \langle b_\alpha'(s), \eta_\alpha(s)\rangle \cdot \eta_\alpha(s)$

Def.: A função $\tau_\alpha(s) \doteq \langle b_\alpha'(s), \eta_\alpha(s)\rangle$ é chamada torção de α em s. Assim

$$\boxed{b_\alpha'(s) = \tau_\alpha(s) \cdot \eta_\alpha(s)}$$

Vamos justificar (✯)

Como $|b_\alpha(s)| = 1 \ \forall s \in I \Rightarrow \langle b_\alpha'(s), b_\alpha(s)\rangle = 0.$

Análogo início da aula.

Agora

$$\langle b_\alpha'(s), t_\alpha(s)\rangle = -\langle b_\alpha(s), t_\alpha'(s)\rangle$$

$$= -\langle b_\alpha(s), k_\alpha(s) \cdot \eta_\alpha(s)\rangle$$

$$= -k_\alpha(s) \cdot \underbrace{\langle b_\alpha(s), \eta_\alpha(s)\rangle}_{=0}$$

$$= 0.$$

Fórmulas de Frenet para a curva α.

Já vimos que

$$t_\alpha'(s) = K_\alpha(s) . \eta_\alpha(s)$$
$$b_\alpha'(s) = \tau_\alpha(s) . \eta_\alpha(s)$$

Pergunta: $\eta_\alpha'(s) = ?$

De fato,

$$\eta_\alpha'(s) = \langle \eta_\alpha'(s), t_\alpha(s) \rangle . t_\alpha(s) + \langle \eta_\alpha'(s), \eta_\alpha(s) \rangle . \eta_\alpha(s)$$
$$+ \langle \eta_\alpha'(s), b_\alpha(s) \rangle . b_\alpha(s).$$

Mas $\langle \eta_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle = 0, \forall s \in I$

$$\Downarrow$$

$$\langle \eta_\alpha'(s), t_\alpha(s) \rangle + \langle \eta_\alpha(s), t_\alpha'(s) \rangle = 0, \forall s \in I$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \eta_\alpha'(s), t_\alpha(s) \rangle} = - \langle \eta_\alpha(s), t_\alpha'(s) \rangle$$
$$\boxed{= -K_\alpha(s)}$$

E como

$\langle \eta_\alpha'(s), \eta_\alpha(s) \rangle = 0$ pois $|\eta_\alpha(s)| = 1$ temos

$$\begin{cases} t_\alpha'(s) = K_\alpha(s) . \eta_\alpha(s) \\ \eta_\alpha'(s) = -K_\alpha(s) . t_\alpha(s) - \tau_\alpha(s) . b_\alpha(s) \\ b_\alpha'(s) = \tau_\alpha(s) . \eta_\alpha(s) \end{cases}$$

Chamado triedro de Frenet

que em notação matricial pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} t_\alpha' \\ \eta_\alpha' \\ b_\alpha' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & -\tau_\alpha \\ 0 & \tau_\alpha & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz ortogonal (isto é } A^t = -A)} \cdot \begin{pmatrix} t_\alpha \\ \eta_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix}$$

Exemplo: Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a hélice circular dada por $\gamma(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t, bt)$.

Calcule a curvatura e a torção de γ

Inicial vamos reparametrizar γ da forma p.pca

temos $s(t) = l_0^t(\gamma) = \int_0^t |\gamma'(u)|du$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = \sqrt{a^2+b^2} \cdot t$$

$$\doteq ct \quad \text{para} \quad c = \sqrt{a^2+b^2}$$

Assim definimos $\alpha(u) = (\gamma \circ s^{-1})(u)$

$$\Rightarrow \alpha(u) = \gamma(s^{-1}(u)) = \gamma\left(\frac{u}{c}\right)$$

$$= \left(a \cdot \cos\left(\frac{u}{c}\right), a \cdot \text{sen}\left(\frac{u}{c}\right), b \cdot \frac{u}{c}\right)$$

$\Rightarrow$ Renomeando as variáveis

$$\alpha(s) = (a \cdot \cos(ds), a \cdot \text{sen}(ds), bds)$$

para $d \doteq \frac{1}{c}$ e $u \rightsquigarrow s$.

Então:

$$\boxed{t_\alpha(s)} = \alpha'(s) = d\cdot(-a\,\text{sen}(ds), a\cos(ds), b)$$

E

$$\alpha''(s) = d^2\cdot(-a\cos(ds), -a\,\text{sen}(ds), 0) \Rightarrow$$

$$\boxed{n_\alpha(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{1}{d^2\cdot a}\cdot\alpha''(s)$$
$$= -(\cos ds, \text{sen}\,ds, 0).$$

Note que $\boxed{k_\alpha(s)} = \|\alpha''(s)\| = a\cdot d^2 = \dfrac{a}{a^2+b^2} = cte.$

Agora vamos determina $b_\alpha(s)$ que por definição é dado por

$b_\alpha(s) = t_\alpha(s) \times n_\alpha(s)$

produto vetorial ↵

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -ad\,\text{sen}(ds) & ad\cos(ds) & b \\ -\cos(ds) & -\text{sen}(ds) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ad\cos(ds) & b \\ -\text{sen}(ds) & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} -ad\,\text{sen}(ds) & b \\ -\cos(ds) & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{j}$$

$$+ \begin{vmatrix} -ad\,\text{sen}(ds) & ad\cos(ds) \\ -\cos(ds) & -\text{sen}(ds) \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

$$= (b\cdot\text{sen}(ds), -b\cos(ds), ad)$$

$\therefore \boxed{b_\alpha(s) = (b\,\text{sen}(ds), -b\cos(ds), ad)}$

$\Rightarrow b_\alpha'(s) = (bd\cos(ds), +bd\,\text{sen}(ds), 0)$

Dessa forma

$$\boxed{\tau_\alpha(s) = \langle b_\alpha'(s), n_\alpha(s)\rangle}$$
$$= \langle (bd\cos ds, +bd\,\text{sen}(ds), 0), (-\cos ds, -\text{sen}\,ds, 0)\rangle$$
$$= -bd = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = cte.$$

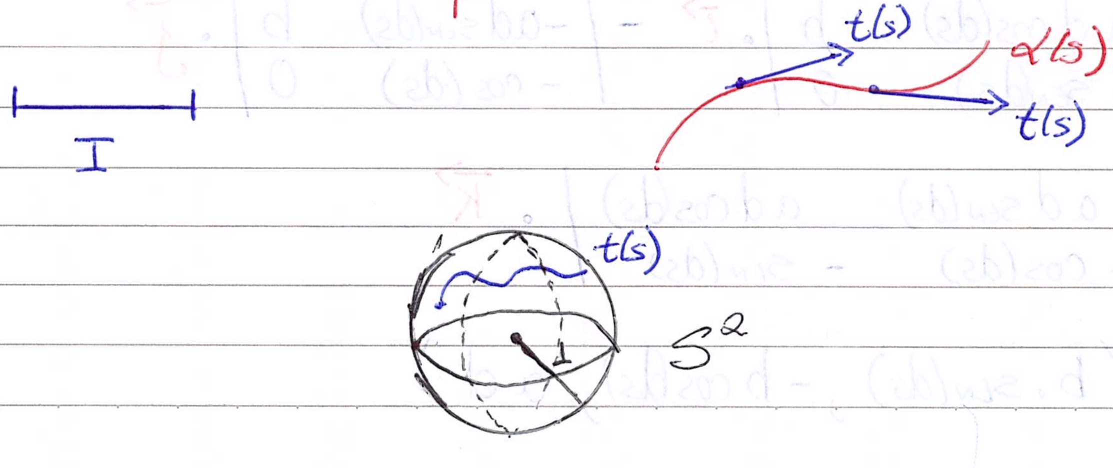
obs.: $\langle t_\alpha(s), e_3\rangle = bd = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, no qual $e_3 = (0,0,1)$

$\forall s \in I$

Ou seja o vetor tangente faz um ângulo cte com o vetor e_3.

Em geral, uma curva $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que o vetor tangente t_β faz um ângulo constante com um vetor fixo $v \in \mathbb{R}^3$ é chamado de um hélice.

A indicatriz esférica de uma curva



A indicatriz esférica da curva dif. ppca $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é a curva na esfera S^2 obtida transladando o vetor unitário $t_\alpha(s)$ para cada $s \in I$ de modo que sua extremidade inicial seja a origem

Def.: Uma curva ppca $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice $\Leftrightarrow$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle t_\alpha(s), v \rangle = cte$, $\forall s \in I$ isto é a indicatriz esférica de t_α tem seu traço contido (na esfera) e em plano ortogonal a v, logo $t_\alpha(I)$ está contido em um círculo em S^2.

Proposição: Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva ppca com $k_\alpha(s) \neq 0$ e $\tau_\alpha(s) \neq 0$ $\forall s \in I$. Então α é uma hélice $\Leftrightarrow$ $\dfrac{k_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} = cte$, $\forall s \in I$.

dem.:

($\Rightarrow$) Seja $v \in \mathbb{R}^3$ unitário tal que $\langle t_\alpha(s), v \rangle = K$ $\forall s \in I$. Como $\|t(s)\| = 1 = \|v\|$ então pela desig. de Cauchy-Schwartz $|K| \leq 1$ $\therefore$ $K = \cos\theta_0$ para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Claramente

$$\langle t_\alpha(s), v \rangle = K \Rightarrow k(s).\langle n_\alpha(s), v \rangle = 0, \forall s \in I$$

$$\overset{k(s) \neq 0}{\Rightarrow} \langle n_\alpha(s), v \rangle = 0, \forall s \in I$$

Assim

$$v = \langle v, t_\alpha(s) \rangle . t_\alpha(s) + \langle v, b_\alpha(s) \rangle . b_\alpha(s) + \cancel{\langle v, n_\alpha(s) \rangle}^{0} . n_\alpha(s)$$

$$= \langle v, t_\alpha(s) \rangle . t_\alpha(s) + \langle v, b_\alpha(s) \rangle . b_\alpha(s)$$

/ /

$v = \cos\theta_0 . t_\alpha(s) + \text{sen}\,\theta_0 . b_\alpha(s)$, $(\star)$

UMA VEZ QUE $\langle v, b_\alpha(s)\rangle = \text{sen}\,\theta_0$ $\left(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\|v\|^2}} = \cos^2\theta_0 + [\ ]^2 \right)$

pelo teorema de pitágoras

DERIVANDO $(\star)$ temos

$$0 = \cos\theta_0 . t'_\alpha(s) + \text{sen}\,\theta_0 . b'_\alpha(s) \quad , \forall s \in I$$
$$0 = \cos\theta_0 . K_\alpha(s) . n_\alpha(s) + \text{sen}\,\theta_0 . \tau_\alpha(s) . n_\alpha(s)$$
$$0 = [\cos\theta_0 . K_\alpha(s) + \text{sen}\,\theta_0 . \tau_\alpha(s)] . n_\alpha(s)$$

$$\Rightarrow 0 = [\cos\theta_0 . K_\alpha(s) + \text{sen}\,\theta_0 . \tau_\alpha(s)]$$

$$\therefore \frac{K_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} = -tg\,\theta_0 = cte$$

$(\Leftarrow)$ SE $\frac{K_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} = cte$ ENTÃO $\frac{K_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} \overset{(\star\star)}{=} -tg\,\theta_0$ PARA ALGUM $\theta_0 \in \mathbb{R}$

Definimos

$$v(s) = \cos\theta_0 . t_\alpha(s) + \text{sen}\,\theta_0 . b_\alpha(s)$$

$\Rightarrow v'(s) = 0$ pela def. $(\star\star)$

$\therefore v(s) = v$ cte $\forall s \in I$. Assim

$$\langle t_\alpha(s), v\rangle = \cos\theta_0 = cte \quad \forall s \in I$$

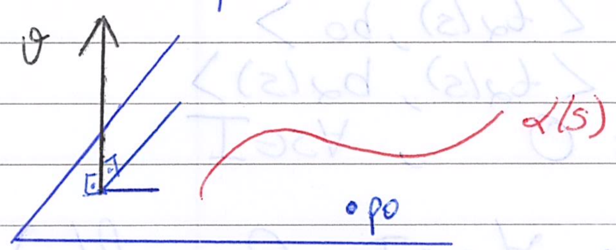
$\Rightarrow \alpha$ É UMA HÉLICE.

PROPOSIÇÃO: Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva diff. ppca tal que $K_\alpha(s) \neq 0, \forall s \in I$. Então α é uma curva plana, ou seja $\alpha(I)$ está contido em um plano de $\mathbb{R}^3$ $\iff$ $\tau_\alpha(s) = 0, \forall s \in I$.

DEM.:

($\Rightarrow$) Suponha que α seja um curva plana então existe $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $v \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \alpha(s) - p_0, v \rangle = 0, \forall s \in I \quad (\star)$$



Derivando ($\star$) temos

$$\langle \alpha'(s), v \rangle = 0, \forall s \in I$$
$$\Updownarrow$$
$$\langle t_\alpha(s), v \rangle = 0$$

derivando novamente

$$\langle t'_\alpha(s), v \rangle = 0, \forall s \in I$$
$$\Updownarrow \text{ def. curvatura}$$
$$K(s) \langle \eta_\alpha(s), v \rangle = 0, \forall s \in I$$

$$\xRightarrow{K(s) \neq 0} \langle \eta_\alpha(s), v \rangle = 0, \forall s \in I$$

Portanto $\langle t_\alpha(s), v \rangle = \langle \eta_\alpha(s), v \rangle = 0 \; \forall s \in I$

$$\xRightarrow{\text{def } b_\alpha(s)} b_\alpha(s) = \pm \frac{v}{\|v\|} \; \forall s \in I$$

Assim $b_\alpha'(s) = 0, \forall s \in I$

$\Rightarrow \tau_\alpha(s) = 0, \forall s \in I$.

$(\Leftarrow)$ Se $\tau_\alpha(s) = 0, \forall s \in I$ temos $b_\alpha'(s) = 0, \forall s \in I$.
Logo $b_\alpha(s) = b_0, \forall s \in I$.

Afirmação: $f(s) \doteq \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b_0 \rangle = 0$
$\forall s \in I$.

De fato, $f'(s) = \langle \alpha'(s), b_0 \rangle$
$= \langle t_\alpha(s), b_0 \rangle$
$= \langle t_\alpha(s), b_\alpha(s) \rangle$
$= 0, \forall s \in I$

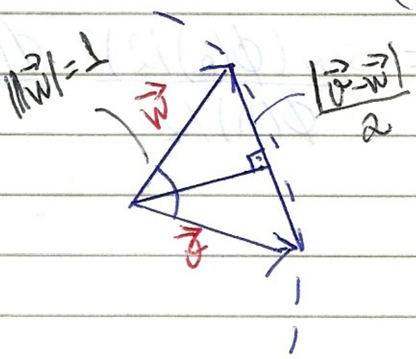
$\Rightarrow f(s) = K$, cte $\forall s \in I$. Como $f(s_0) = 0$ temos
$f(s) = 0 \ \forall s \in I$.

Da afirmação anterior temos que $\alpha(s)$ está no plano passando por $\alpha(s_0)$ que é normal a b_0.

Interpretação geométrica da curvatura e da torção

Dados dois vetores unitários $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ temos

$$|\vec{v} - \vec{w}| = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sphericalangle(\vec{v},\vec{w})}{2}\right)$$



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\sphericalangle(\vec{v},\vec{w})}{2}\right) = \frac{|\vec{v}-\vec{w}|}{2}$$

Assim se $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é uma curva dif. ppca, dado $s_0 \in I$ temos

$$|t_\alpha(s_0+h) - t_\alpha(s_0)| = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta(h)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{|t_\alpha(s_0+h) - t_\alpha(s_0)|}{h} = \frac{2}{h} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta(h)}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\theta(h)/2)}{\theta(h)/2} \cdot \frac{\theta(h)/2}{h} \cdot 2$$

$$\Rightarrow K_\alpha(s_0) = \lim_{h \to 0} \left| \frac{t_\alpha(s_0+h) - t_\alpha(s_0)}{h} \right| = \theta'(0),$$

no qual

$\theta(h)$ é o ângulo entre $t_\alpha(s_0+h)$ e $t_\alpha(s_0)$.

O plano gerado por $t_\alpha(s)$ e $n_\alpha(s)$ é chamado de plano osculador de α em s. Assim, o ângulo entre os planos osculadores $\phi(h)$ a α em $\alpha(s_0)$ e $\alpha(s_0+h)$ é o ângulo entre os vetores binormais $b_\alpha(s_0)$ e $b_\alpha(s_0+h)$, logo

$$\left| \frac{b_\alpha(s_0+h) - b_\alpha(s_0)}{h} \right| = \dots = \frac{\operatorname{sen}(\phi(h)/2)}{\phi(h)/2} \cdot \frac{\phi(h)/2}{h} \cdot 2$$

$$\Rightarrow |\tau_\alpha(s_0)| = |b'_\alpha(s_0)| = \phi'(0)$$