Orientação

Definição: duas bases $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ definem a mesma orientação em $\mathbb{R}^n$ se a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ definida por

$$v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i$$

possui determinante positivo.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & & \\ \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ v_1 & v_2 & & v_n \end{pmatrix} \end{array}$$

A definição acima define uma relação de equivalência cada uma das quais é chamada uma orientação em $\mathbb{R}^n$. A classe de equivalência da base canônica determina a orientação canônica ou "positiva" de $\mathbb{R}^n$. Também dizemos que uma base é positiva se ela determina a orientação positiva de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\beta = \{(1,2) ; (2,3)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{pois} \quad \begin{aligned} (1,2) &= 1.(1,0) + 2(0,1) \\ (2,3) &= 2.(1,0) + 3.(0,1) \end{aligned}$$

é uma base negativa pois $\det A = -1 < 0$.
↳ do $\mathbb{R}^2$

Definição: Um operador linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é positivo (ou T preserva orientação) se T leva bases positivas em bases positivas. Equivalentemente, T é positiva se leva base canônica de $\mathbb{R}^m$ em uma base positiva de $\mathbb{R}^m$

Exemplo: $T(x,y,z) = (z-y, x+z, y)$, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ base canônica (positiva) do $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \therefore \det A = 1 > 0.$$

Definição: Um movimento rígido $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

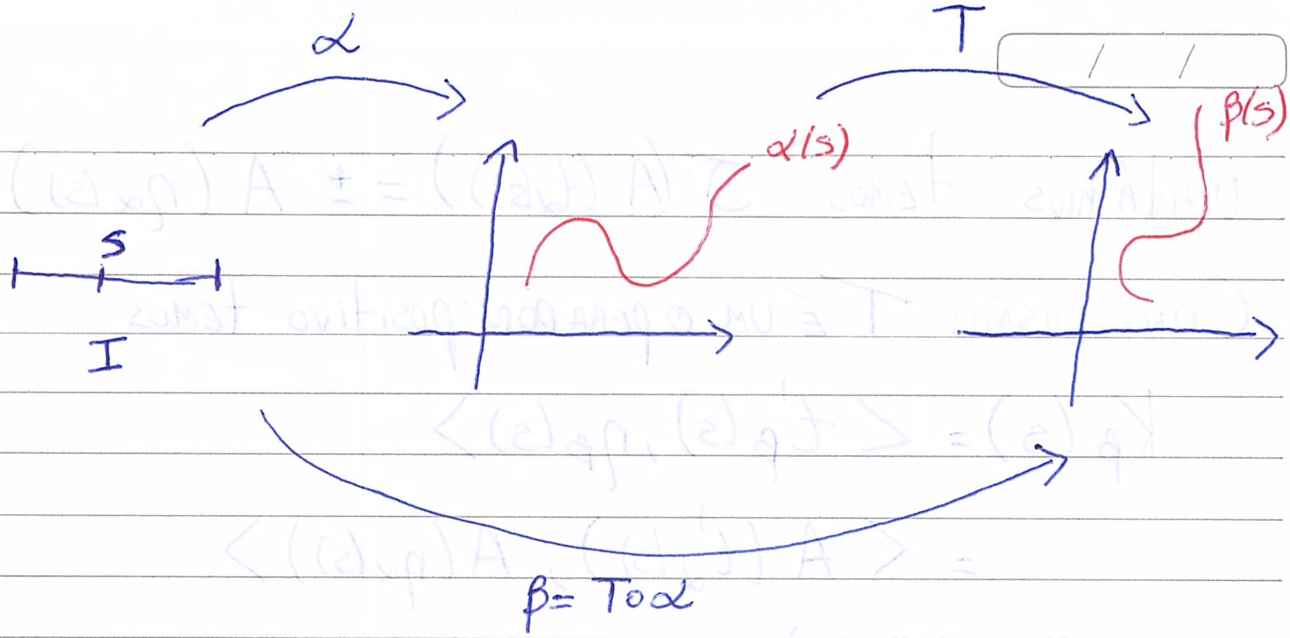
$$F(p) = Ap + v, \quad A \in O(n), \; v \in \mathbb{R}^n$$

preserva orientação (ou é positivo) se sua parte linear A é um operador linear positivo.

Aplicação:

Sejam I intervalo, $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva dif. ppca, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um movimento rígido e defina

$$\beta = T \circ \alpha$$



TEMOS

$$t_\beta(s) = \beta'(s) = (T\circ\alpha)'(s) = A(\alpha'(s)) = A(t_\alpha(s))$$

$$\eta_\beta(s) = J(t_\beta(s)) = J(A(t_\alpha(s)))$$
$$\overset{*}{=} A(J(t_\alpha(s)))$$
$$= A(\eta_\alpha(s))$$

pois J É UM OPERADOR positivo (EXERCÍCIO) E T UM OPERADOR positivo.

De fato

$$0 = \langle t_\alpha(s), \eta_\alpha(s) \rangle$$

$$\overset{A\in O(n)}{=} \langle A(t_\alpha(s)), A(\eta_\alpha(s)) \rangle$$

MAS $\langle J(At_\alpha), At_\alpha \rangle = 0 \Rightarrow J(At_\alpha(s))$ E $A(\eta_\alpha(s))$ SÃO MÚLTIPLOS. ALÉM disso COMO SÃO unitários temos $J(A(t_\alpha(s))) = \pm A(\eta_\alpha(s))$

Conclusão: T é um operador positivo temos

$$K_\beta(s) = \langle t'_\beta(s), \eta_\beta(s) \rangle$$
$$= \langle A(t'_\alpha(s)), A(\eta_\alpha(s)) \rangle$$
$$= \langle t'_\alpha(s), \eta_\alpha(s) \rangle$$
$$= K_\alpha(s), \quad \forall s \in I$$

Analog. se T é negativo então $K_\beta(s) = -K_\alpha(s)$, $\forall s \in I$.

Teorema Fundamental das curvas planas. Se $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\beta: I \to \mathbb{R}^2$ são curvas dif. ppca tal que $K_\alpha(s) = K_\beta(s)$ $\forall s \in I$ (respect. $K_\alpha(s) = -K_\beta(s)$ $\forall s \in I$) então existe um movimento rígido positivo (respect. negativo) tal que $\beta = T \circ \alpha$.

dem.: Fixado $s_0 \in I$ vamos definir $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mov. rígido $Tp = Ap + v$ no qual $A \in O(2)$ e $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(\alpha(s_0)) = \beta(s_0).$$

Note que $\left.\begin{array}{l} \{t_\alpha(s_0), \eta_\alpha(s_0)\} \\ \{t_\beta(s_0), \eta_\beta(s_0)\} \end{array}\right\}$ definem bases ortonormais em $\mathbb{R}^2$.

Considere A o (único) operador linear $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$A(t_\alpha(s_0)) = t_\beta(s_0)$
$A(\eta_\alpha(s_0)) = \eta_\beta(s_0)$

Como A transforma base ortonormal em base ortonormal
$\Rightarrow A \in O(2)$.

Defina $v = \beta(s_0) - A(\alpha(s_0))$. Vamos demonstrar que $\beta = T \circ \alpha$ (vamos utilizar o teorema fundamental das curvas planas).

Seja $\gamma = T \circ \alpha$. Então

- $\gamma(s_0) = T(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$

- $t_\gamma(s_0) = A(t_\alpha(s_0)) = t_\beta(s_0)$

- $\eta_\gamma(s_0) = A(\eta_\alpha(s_0)) = \eta_\beta(s_0)$
  $\hookrightarrow$ A positivo

Como T é positivo $k_\gamma(s) = k_\alpha(s)$, $\forall s \in I$

Hipótese
$\Rightarrow k_\gamma(s) = k_\alpha(s)$, $\forall s \in I$.

Pelo teorema fundamental das curvas planas $\gamma = \beta$ ■

Exemplo: Seja $\beta: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva dif. ppca tal que $K_\beta(s) = \frac{1}{r}$, $r>0$. Mostre que $\beta(I)$ está contida em um círculo de raio r.

sol. Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização ppca no sentido anti-horário de um círculo com centro na origem e raio r. Então pelo teorema anterior temos que existe um mov. rígido T tal que $\beta = T \circ \alpha$. Logo.

$\beta(I) = T(\alpha(I))$ está contido em um círculo de raio r.

sol. alternativa

Defina $h(s) = \beta(s) + r\,\eta_\beta(s)$. Então

$$h'(s) = \beta'(s) + r.\eta_\beta'(s)$$ Frenet.

$$= t_\beta(s) + r.(-K_\beta(s).t_\beta(s))$$

$$= t_\beta(s) - r.\frac{1}{r}.t_\beta(s)$$

$$= 0.$$

Logo $\exists\ P_0 \in \mathbb{R}^2$ tq $\beta(s) + r\,\eta_\beta(s) = P_0$

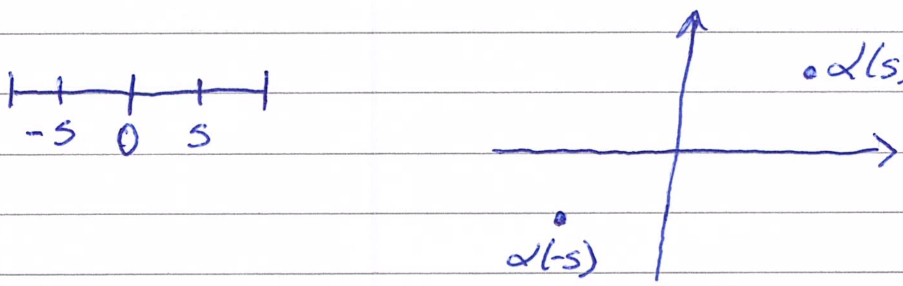
$$\Leftrightarrow \beta(s) = P_0 - r\,\eta_\beta(s)$$

$$\Leftrightarrow \|\beta(s) - P_0\| = \|r\,\eta_\beta(s)\| = r$$

Exemplo 2: Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva dif. ppca tal que $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\alpha(0) = 0$ e $K_\alpha(-s) = -K_\alpha(s)$ $\forall s \in I$. Mostre que α é simétrica em relação a origem.

sol. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $A(x,y) = (-x,-y)$ (que é uma transf. linear positiva pois $\det A = 1 > 0$).

α simétrica em relação a origem $\iff A(\alpha(-s)) = \alpha(s)$ $\forall s \in I$.



Defina $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(s) = A(\alpha(-s))$ assim.

- $t_\beta(s) = -A(t_\alpha(-s))$
- $\eta_\beta(s) = -A(\eta_\alpha(-s))$

Então
$$K_\beta(s) = \langle t'_\beta(s), \eta_\beta(s) \rangle$$
$$= \langle +A(t'_\alpha(-s)), -A(\eta_\alpha(-s)) \rangle$$
$$= -\langle t'_\alpha(-s), \eta_\alpha(-s) \rangle$$
$$= -(K_\alpha(-s)) = K_\alpha(s)$$

↳ Hipótese.

Além disso, $\beta(0) = A(\alpha(0)) = A(0) = 0 = \alpha(0)$

E

def. de A

• $t_\beta(0) = \beta'(0) = -A(t_\alpha(0)) = t_\alpha(0)$

Pelo teorema fundamental das curvas planas $\beta(s) = \alpha(s)$ $\forall s \in I$

$\Longleftrightarrow A(\alpha(-s)) = \alpha(s), \forall s \in I.$