Tópicos em Análise no $\mathbb{R}^n$

Uma aplicação $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria (ou movimento rígido) quando

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad , \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = x + v$, $v \in \mathbb{R}^n$ (aplicação translação por um vetor). Então

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x + v - (y - v)\| = \|x - y\|.$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

$\therefore$ T é uma isometria

Exemplo 2: Seja $A \in O(n)$. Então A é uma isometria.

$$O(n) = \{ A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ transf. linear tal que } A^* A = I \}$$

A^*: (transf. linear) adjunta de A, isto é

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle \quad , \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

$\vdash$ $A \in O(n) \iff \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

(Exercício)

Voltando ao exemplo.

$$\|Ax - Ay\|^2 = \langle Ax - Ay, Ax - Ay \rangle$$
$$= \langle A(x-y), A(x-y) \rangle$$
$$= \langle x-y, x-y \rangle$$
$$= \|x-y\|^2$$

Exercício 14.4 (pg 191 - Elon Algebra Linear, 7ª edição)

Toda isometria $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é da forma

$$g(x) = Ax + v \quad , \text{ no qual } A \in O(n) \text{ e } v \in \mathbb{R}^n$$

(composição de $O(n)$ com uma translação)

Aplicações $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Definição: Seja U um aberto do $\mathbb{R}^m$, $p \in U$ e $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é diferenciável no ponto p se existe uma transf. linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$r(v) \doteq f(p+v) - f(p) - Tv$$

possui a propriedade que $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|} = 0$.

Notação: A transf. linear T é chamada diferencial de f no ponto p e é denotada por $df(p)$ ou $f'(p)$.

Da teoria de Algebra Linear sabemos que ($\{e_1, \dots, e_m\}$, $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ bases ortonormais de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respect.) a matriz associada a transf. T em relações as bases canônicas é dada por:

$$a_{ij} = \langle Te_i, \tilde{e}_j \rangle$$

Afirmação: $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $\therefore$ $\underset{df}{\overset{\shortparallel}{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$

Regra da cadeia: Se $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dif no ponto p e $g: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ é dif. em $f(p)$ com $f(U) \subset V$ então $g \circ f$ é dif. em p e

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$$

Contexto das curvas: Seja $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável. Então temos "duas" definições para $\alpha'(t_0)$

- $\alpha'(t_0)$ uma transformação linear $d\alpha(t_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

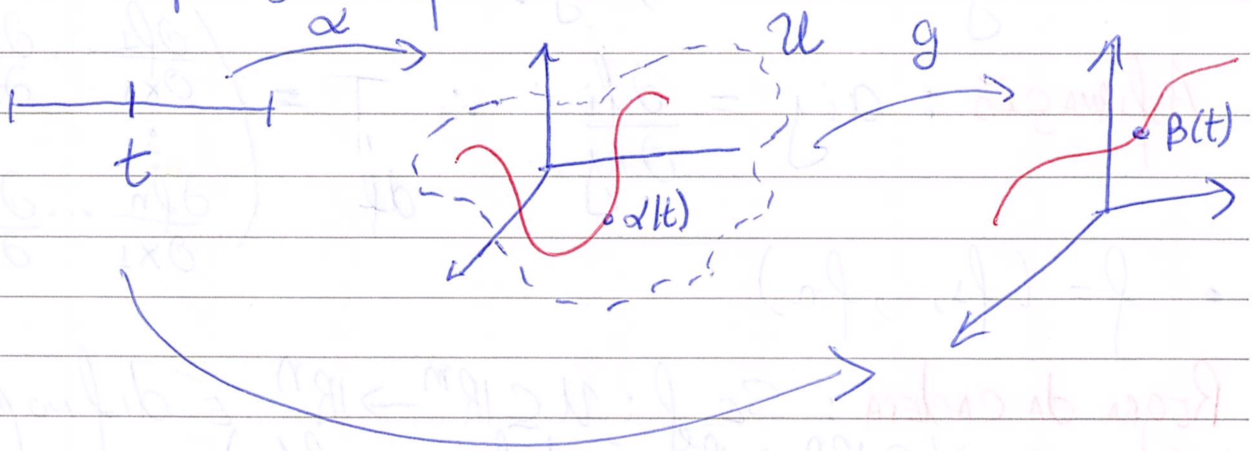
Observe que para toda transf. linear $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ temos

$$T(t) = T(1.t) = \underbrace{t}_{n^o} \underbrace{T(1)}_{vetor}$$

Assim a transf. T é determinada pelo vetor $T(1)$

Dessa forma $[d\alpha(t_0)]1 = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \alpha'(t_0)$.

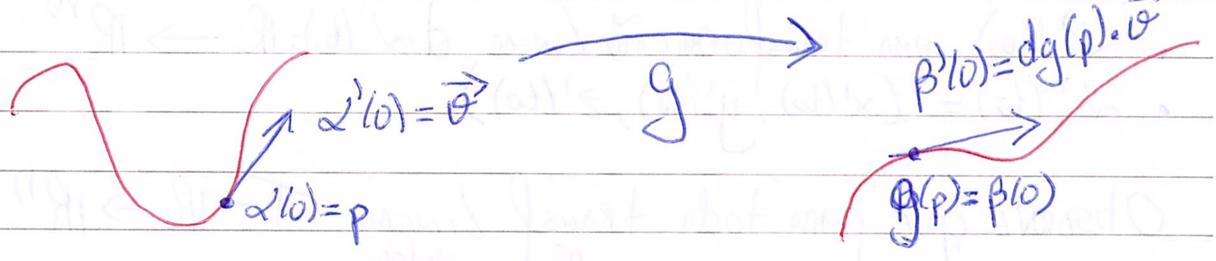
Como consequência da regra da cadeia temos que se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma curva dif. e $g : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação dif. então



$$\beta \doteq (g \circ \alpha)$$

$$\beta'(t) \cong d\beta(t)(1) = \underbrace{dg(\alpha(t))}_{\text{Matriz } m \times n} \cdot \big(\underbrace{d\alpha(t) \cdot 1}_{\text{Vetor } n \times 1.}\big)$$

$$\cong dg(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$



Exemplo: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um movimento rígido, ou seja $F(p) = A(p) + w$ para alguma $A \in O(n)$ e algum $w \in \mathbb{R}^n$. Prove que $dF(p) = A$.

De fato

$$F(p+w) - F(p) = A(p+w) + \vartheta - [A(p) + \vartheta]$$
$$= A(p) + A(w) + \vartheta - A(p) - \vartheta$$
$$= A(w)$$

Escolho $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transf. linear que satisfaz

$$r(w) \doteq F(p+w) - F(p) - Aw = 0 \quad \therefore \lim_{w \to 0} \frac{r(w)}{\|w\|} = 0$$

$$\Rightarrow dF(p) = A$$

Aplicação: $\beta = F \circ \alpha$ no qual $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva dif. então

$$\beta'(t) \doteq dF(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = A(\alpha'(t)).$$