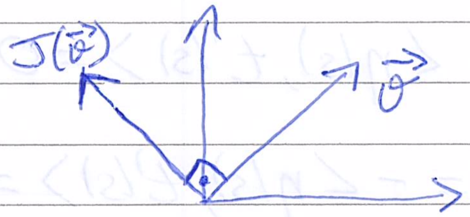
A curvatura de curvas planas

Seja $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva dif. ppca.
Denote $t(s) = \alpha'(s)$ $\forall s \in I$ (t: vetor tangente)

Obs.: α ppca $\Rightarrow \|t(s)\| = 1$, $\forall s \in I$. Em particular

$$\langle t(s), t(s) \rangle = 1, \forall s \in I \Rightarrow \langle t'(s), t(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I.$$

Notação: $J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $J(x,y) = (-y, x)$



Definição (curvatura). Denotamos por $k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle$ no qual $n(s) = J(t(s))$ a curvatura da curva α.

Obs de Algebra Linear: $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ então $v = \langle v, v_1 \rangle \cdot v_1 + \langle v, v_2 \rangle \cdot v_2$

Dessa forma, $t'(s) = \langle t'(s), \eta(s) \rangle \cdot \eta(s) + \langle t'(s), t(s) \rangle t(s)$ já que $t(s) \perp \eta(s)$. Como

$$\langle t'(s), t(s) \rangle = 0 \Rightarrow t'(s) = \langle t'(s), \eta(s) \rangle \cdot \eta(s) = k(s) \cdot \eta(s)$$

Portanto $\boxed{t'(s) = k(s) \cdot \eta(s)}$

Além do mais temos

$$\eta'(s) = \langle \eta'(s), t(s)\rangle . t(s) + \langle \eta'(s), \eta(s)\rangle \eta(s)$$

Como $\|\eta(s)\| = \|J(t(s))\| = \|t(s)\| = 1$, $\forall s \in I$

$$\Rightarrow \langle \eta'(s), \eta(s)\rangle = 0, \ \forall s \in I.$$

Por outro lado

$$\langle \eta(s), t(s)\rangle = 0, \ \forall s \in I$$

$$\Rightarrow \langle \eta'(s), t(s)\rangle + \langle \eta(s), t'(s)\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \eta'(s), t(s)\rangle = -\langle \eta(s), t'(s)\rangle = -k(s)$$

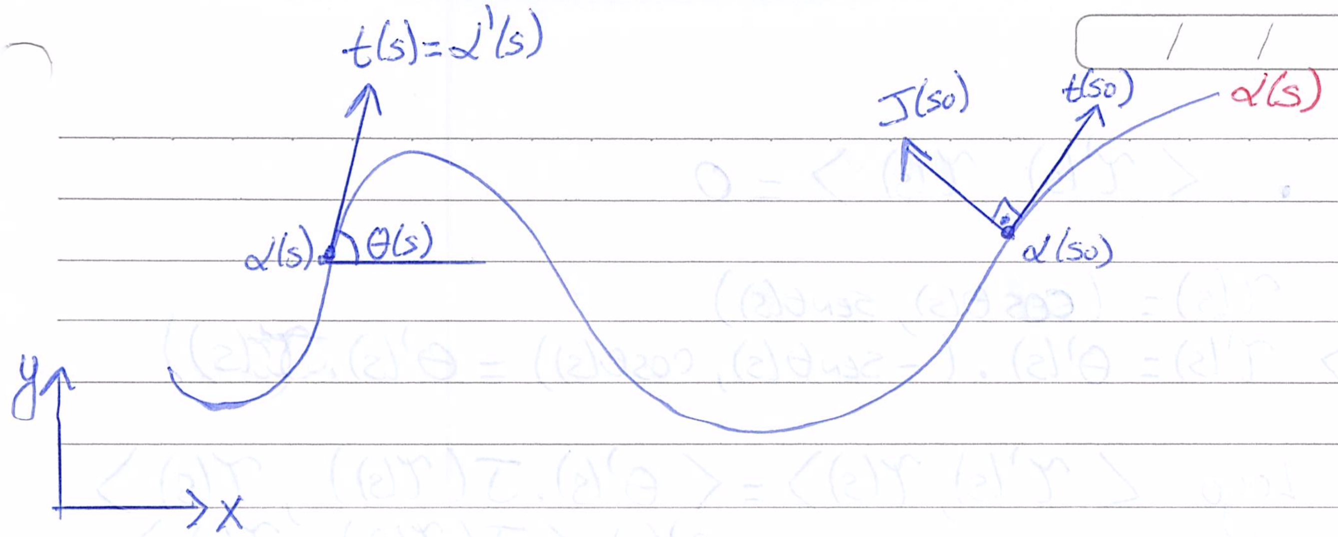
Substituindo na Eq. inicial temos

$$\boxed{\eta'(s) =} \langle \eta'(s), t(s)\rangle t(s) \boxed{= -k(s).t(s)}$$

Juntando as duas identidades destacadas temos

$$\begin{cases} t'(s) = k(s).\eta(s) \\ \eta'(s) = -k(s).t(s) \end{cases}$$

Fórmulas de Frenet.



Defina $\theta : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} k(\xi)\, d\xi \qquad ⊛$$

no qual $\theta_0 \in \mathbb{R}$ é uma das determinações do ângulo que $t(s_0)$ faz com o eixo Ox, isto é $t(s_0) = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$.

obs.: $\|v\| = 1 \Rightarrow v = (\cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda)$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pela definição ⊛ temos $\theta'(s) = k(s)$.

Afirmação: $t(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$, $\forall s \in I$

Justificativa: defina $\tau(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$ e

$\delta(s) = \| t(s) - \tau(s) \|^2$. Como $\delta(s_0) = 0$ basta provarmos que $\delta'(s) = 0$ $\forall s \in I$ (lembrando que I é um intervalo). De fato

$$\delta'(s) = 2\langle t'(s) - \tau'(s), t(s) - \tau(s) \rangle$$
$$= \langle t'(s), t(s) \rangle - \langle t'(s), \tau(s) \rangle - \langle \tau'(s), t(s) \rangle + \langle \tau'(s), \tau(s) \rangle.$$

- $\langle \tau'(s), \tau(s) \rangle = 0$

$\tau(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$

$\Rightarrow \tau'(s) = \theta'(s).(-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s)) = \theta'(s).J(\tau(s))$

Logo $\langle \tau'(s), \tau(s)\rangle = \langle \theta'(s).J(\tau(s)), \tau(s)\rangle$

$$= \theta'(s).\underbrace{\langle J(\tau(s)), \tau(s)\rangle}_{=0}$$

$$= 0.$$

- $\langle t'(s), t(s)\rangle = 0$, $\forall s \in I$ (α ppca)

- $\langle t'(s), \tau(s)\rangle = ?$

Note que

$$\begin{aligned}
\langle t'(s), \tau(s)\rangle &= \langle k(s).\eta(s), \tau(s)\rangle \\
&= k(s)\langle \eta(s), \tau(s)\rangle \\
&= k(s).\langle J(t(s)), \tau(s)\rangle \quad (\Delta) \\
&= -k(s).\langle t(s), J(\tau(s))\rangle \\
&= -\theta'(s)\langle t(s), J(\tau(s))\rangle \\
&= -\langle t(s), \theta'(s).J(\tau(s))\rangle \\
&= -\langle t(s), \tau'(s)\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle t'(s), \tau(s)\rangle + \langle t(s), \tau'(s)\rangle = 0$

(Δ) usamos que $\langle Jz, w\rangle = -\langle z, Jw\rangle$ (exercício)

Além do mais J é ortogonal e $J^2 = -I$

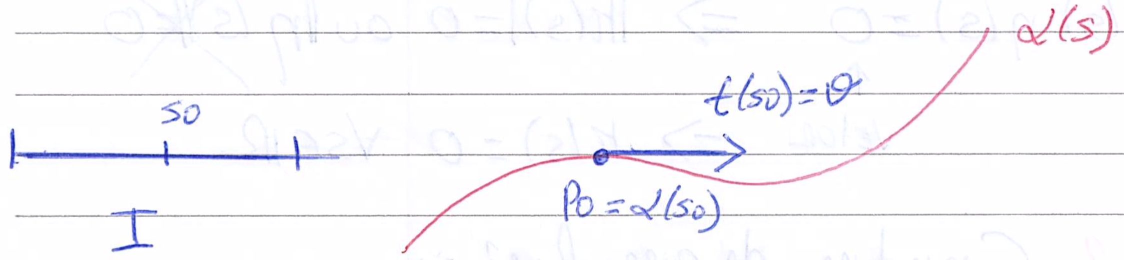
Dessa forma $\Omega'(s) = 0$, $\forall s \in I$. ∎

Conclusão: dada $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dif. ppca existe $\theta: I \to \mathbb{R}$ tal que $t(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$ e $K(s) = \langle t'(s), \eta(s) \rangle$ que satisfaz $K(s) = \theta'(s)\ \forall s \in I$

Agora estamos prontos para o seguinte resultado

Teorema Fundamental das curvas planas: dada uma função dif. $K: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e fixados $s_0 \in I$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ existe uma única curva dif. ppca $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} \alpha(s_0) = P_0 \\ t(s_0) = \vec{v} \qquad (\text{estamos assumindo } \|\vec{v}\| = 1) \\ K_\alpha(s) = K(s), \ \forall s \in I. \end{cases}$$



dem.: Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$. Defina $\theta: I \to \mathbb{R}$ dado por

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} K(\xi)\, d\xi$$

e $t(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$. Então

$$\alpha(s) = P_0 + \int_{s_0}^{s} t(u)\, du \text{ é a curva desejada!}$$

■

/ /

Exemplo: Curvatura de retas

Seja $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Defina $\gamma(t) = P_0 + s\vec{v}, s \in \mathbb{R}$.

Eq. vet. da reta que passa por P_0 e possui direção $\vec{v}$.

$P_0 = (x_0, y_0)$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
$\gamma(s) = (x_0 + s v_1, y_0 + s v_2), s \in \mathbb{R}$.

$\vdash$ γ é ppca se $\|\vec{v}\| = 1$ uma vez $\gamma'(s) = \vec{v}$.

Assim $t(s) = v$ e $t'(s) = 0 \ \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow k(s).\eta(s) = 0 \quad \Rightarrow |k(s)| = 0$ ou $\cancel{\|\eta(s)\| = 0}$

vetor $\quad \Rightarrow k(s) = 0 \ \forall s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2: Curvatura da circunferência

Uma parametrização p/ a circunf. de centro em $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio $r > 0$ é dada por $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (x_0, y_0) + (r\cos t, r\sin t)$$
$$= (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$$

$$\Rightarrow \alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

$$\therefore \|\alpha'(t)\| = r.$$

Vamos "normalizar" a curva pel. comp. de arco.

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du = \int_0^t r\,du = r.t$$

E considere $\varphi \doteq s^{-1}$.: $\varphi(s) = \dfrac{s}{r}$ (s: parametro)

Logo $\beta \doteq \alpha \circ \varphi$ é tal que $\beta(s) = \alpha\left(\dfrac{s}{r}\right)$

$$\Rightarrow \beta(s) = \left(x_0 + r\cos\left(\frac{s}{r}\right), y_0 + r\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

é uma reparametrização de α ppca.

De fato, $\beta'(s) = \left(-\mathrm{sen}\left(\dfrac{s}{r}\right), \cos\left(\dfrac{s}{r}\right)\right)$

$$\Rightarrow t_\beta(s) = \left(-\mathrm{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

$$\Rightarrow t'_\beta(s) = -\frac{1}{r}\left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\left[-\eta_\beta(s)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\eta_\beta(s) \Rightarrow \boxed{K_\beta(s) = \frac{1}{r}}$$

pois

$$J(t_\beta(s)) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right) = -\left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Complemento sobre o Teorema Fundamental das curvas planas

Vamos reescrever o teorema novamente destacando as conclusões:

- dada uma função $K: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ existe uma curva $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dif. (isto é de classe C^∞) ppca tal que $K_\alpha(s) = K(s)$ para todo $s \in I$.

- fixados $s_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ dado por $p_0 = (x_0, y_0)$ e $v_0 \in \mathbb{R}^2$ vetor unitário existe uma única curva satisfazendo o item anterior tal que $\begin{cases} \alpha(s_0) = p_0 \\ \alpha'(s_0) = v_0 \end{cases}$

dem.: Como $\|v_0\| = 1$ então $v_0 = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$ para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} K(\xi)\,d\xi \Rightarrow \theta(s) \text{ de classe } C^\infty$$

Definimos também $t(s) = (\underbrace{\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)}_{\text{comp. de funções } C^\infty})$ e

$\alpha(s) = (x(s), y(s))$ no qual

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)\,ds \; ; \; y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\theta(s)\,ds.$$

Claramente $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^∞ e

$\|\alpha'(s)\| = \|t(s)\| = 1$ portanto p.p.c.a.

Além do mais $\alpha(s_0) = (x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0) = p_0$

e

$$\alpha'(s_0) = t(s_0) = (\cos\theta(s_0), \operatorname{sen}\theta(s_0))$$
$$= (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$$
$$= v_0.$$

UNICIDADE

Suponhamos $\alpha, \beta : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ppca tais que

$$\begin{cases} \alpha(s_0) = \beta(s_0) = p_0 \\ \alpha'(s_0) = \beta'(s_0) = v_0 \\ K_\alpha(s) = K_\beta(s) = k(s), \ \forall s \in I \end{cases}$$

Vamos provar que $\alpha(I) = \beta(I)$, isto é, $\alpha(s) = \beta(s)\ \forall s \in I$.

Sabemos que $\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$, no qual
$\beta'(s) = (\operatorname{sen}\tilde{\theta}(s), \operatorname{sen}\tilde{\theta}(s))$

$\theta(s), \tilde{\theta}(s) : I \to \mathbb{R}$ (respect. parametrizações associadas a funções angulos) e tais que

$$\theta'(s) = \tilde{\theta}'(s) = k(s)$$

$$\Rightarrow \theta(s) = \tilde{\theta}(s) + c, \text{ no qual } c = 2k\pi$$
(função angulo)

Conclusão: $\alpha'(s) = \beta'(s)$

Como $\alpha(s_0) = \beta(s_0) \Rightarrow \alpha(s) = \beta(s)\ \forall s \in I$.