(b) Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E formada por autovetores de T e S.

dem.

(a) Seja λ_j um autovalor de T, E_{λ_j} o autoespaço correspondente e $v \in E_{\lambda_j}$. Queremos provar que $S(v) \in E_{\lambda_j}$.
De fato,

$$T(S(v)) = S(T(v)) = S(\lambda_j v) = \lambda_j S(v)$$

$$\therefore (T - \lambda_j I)(S(v)) = 0 \quad \therefore S(v) \in E_{\lambda_j}.$$

(b) Considere o operador $S|_{E_{\lambda_j}} : E_{\lambda_j} \to E_{\lambda_j}$

(bem definido como vimos na dem. do teorema espectral + item (a))

Pelo teorema espectral aplicado a $S|_{E_{\lambda_j}}$ existe uma base ortonormal de E_{λ_j} formada pelos autovetores de S.
Como $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ juntando os autovetores em cada autoespaço (que são simultaneamente autovetores de T e S) obtemos uma base ortonormal de E formada por autovetores de S e T. ∎

Operadores positivos e não negativos

Def.: Um operador linear $T: E \to E$ é não negativo (respect. positivo) se T é auto adjunto e $\langle Tv, v \rangle \geq 0$

$\forall v \in E$ (Respectivamente $\langle Tv, v\rangle > 0$ $\forall v \neq 0$ $, v \in E$)

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (+y, x)$.

T é autoadjunto pois $T(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

e $A = A^t$. Pergunta: T é não negativo? De fato se $v = (x,y)$

$$\langle Tv, v\rangle = \langle (y,x), (x,y)\rangle = 2xy$$

que falha ser não negativo em $\mathbb{R}^2$!

Exemplo 2: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Claramente T é auto adjunto e além do mais se $v = (x,y)$ temos

$$\begin{aligned} \langle Tv, v\rangle &= \langle (x+y, x+y), (x,y)\rangle \\ &= (x+y).x + (x+y).y \\ &= (x+y).(x+y) \\ &= (x+y)^2 \geq 0 \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Note que T é não negativo porém T não é positivo.

Proposição: Um operador linear auto-adjunto $T: E \to E$ é não negativo (resp. positivo) se e só se os auto valores de T são todos não negativos (respect. positivos).

dem.: Suponhamos que T seja não negativo e seja λ um auto valor de T (Lembre que T é auto adjunto). Então se v é um autovetor de T assoc. a λ então

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0$$
$$\langle \lambda v, v\rangle$$
$$\lambda . \|v\|^2 \qquad \Rightarrow \lambda \geq 0$$

Recíproca

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de E formada por autovetores de T assoc. aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respect. (não necessariamente distintos). Então dado $v \in E$ temos

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Assim

$$\langle Tv, v\rangle = \langle T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n), \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\rangle$$
$$= \langle \alpha_1 . Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\rangle$$
$$= \langle \alpha_1 . \lambda_1 . v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\rangle$$
$$= \alpha_1^2 \lambda_1 \|v_1\|^2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n . \|v_n\|^2$$
$$= \underbrace{\alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n}_{\text{soma de termos positivos}} \geq 0$$

$\blacksquare$

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base canônica é $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. O polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2)$. Logo λ_1 e λ_2 são as raízes de $p(\lambda)$ então

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + b \quad e \quad \lambda_1 . \lambda_2 = ab - c^2$$

(ambas)

Portanto se λ_1, λ_2 são não negativas então

$$a.b - c^2 \geq 0 \Rightarrow a.b \geq c^2$$

$\therefore$ a e b possuem os mesmos sinais

$a + b \geq 0 \Rightarrow b, a \geq 0$ pois ambos não podem ser negativos!

Reciprocamente se $\begin{cases} ab - c^2 \geq 0 & (\mathrm{I}) \\ a \geq 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$ ✪

então λ_1 e λ_2 possuem o mesmo sinal de (I).

$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \Rightarrow a$ e b possuem o mesmo sinal e $a \geq 0$

$\Rightarrow a + b \geq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ ambas não negativas.

✪

Exemplo: $T(x,y) = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

é auto adjunto, $a = 2 \geq 0$ mas $\lambda_1 . \lambda_2 = \det A < 0$

$\therefore$ T não é um op. não negativo.

Resumo: $T(x,y) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é não negativo

$\Leftrightarrow ab - c^2 \geq 0$ e $a \geq 0$.

Proposição: Seja $T: E \to F$ uma transf. linear (E, F esp. com produto interno). Então $\begin{cases} T^*T : E \to F \\ TT^* : F \to E \end{cases}$ são não negativos. Além disso, o posto de ambos é igual ao posto de T.

dem.: Note que T^*T é auto adjunto pois

$$(T^*T)^* = T^* (T^*)^* = T^*T$$

Analog. para TT^*

$$(TT^*)^* = (T^*)^* T^* = TT^*.$$

Além do mais

$$\langle T^*Tv, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \geq 0.$$
$$\langle TT^*u, u \rangle = \langle T^*u, T^*u \rangle = \|T^*u\|^2 \geq 0.$$

$\therefore$ ambos não negativos.

Afirmação: $N(T^*T) = N(T)$

De fato $Tv = 0 \underset{T^* \text{ linear}}{\Rightarrow} T^*Tv = T^*(0) = 0$

$\Rightarrow N(T) \subseteq N(T^*T)$.

Agora seja $v \in N(T^*T)$ isto é $T^*Tv = 0$ então

$$\underset{\overset{\|}{0}}{0 = \langle T^*Tv}, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \|Tv\| = 0 \Leftrightarrow Tv = 0 \therefore v \in N(T)$

Logo $N(T^*T) \subseteq N(T) \underset{\text{como o anterior}}{\Rightarrow} N(T^*T) = N(T)$

Analog. $N(TT^*) = N(T^*)$ (EXERCÍCIO)

Por fim

$$\begin{aligned} \text{posto}(T^*T) &= \dim(\text{Im}\, T^*T) \quad , \dim E = n \\ &= n - \dim N(T^*T) \\ &= n - \dim N(T) \\ &= \dim \text{Im}\, T \\ &= \text{posto}\, T \end{aligned}$$

Como $\text{posto}(T^*T) = \text{posto}(T)$
$= \text{posto}(T^*)$

E $\text{posto}(TT^*) = \text{posto}(T^*)$

Então $\text{posto}(TT^*) = \text{posto}(T^*T) = \text{posto}\, T$