Matriz de uma transf. Linear.

Sejam E, F espaços vetoriais arbitrários e $T: E \to F$ uma transf. Linear:

- $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$; $\forall\, x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considere

$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base para E

$\varphi = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base para F

A matriz de T em relação as bases β e φ é a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ no qual

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = a_{1j} v_1 + \ldots + a_{mj} v_m.$$

Relembrando.

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

$$Tu = \overbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & \ldots & \uparrow \\ Tu_1 & & Tu_n \end{pmatrix}_{m \times n}}^{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Assim a coluna j de A é formada pelos coef. de Tu_j na base φ.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(x,y,z) = (x-2y+z,\ 2x-y)$$

$\beta = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$\varphi = \{(1,0); (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

Então:

$$T(1,0,0) = (1,2) = 1.(1,0) + 2.(0,1)$$
$$T(0,1,0) = (-2,-1) = -2.(1,0) + (-1).(0,1)$$
$$T(0,0,1) = (1,0) = 1.(1,0) + 0.(0,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$\uparrow T(1,0,0)$ $\quad \uparrow T(0,1,0)$ $\quad \uparrow T(0,0,1)$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Proposição: Se $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\varphi = \{v_1, \dots, v_m\}$ são bases dos esp. vetoriais E e F respectivamente, e $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então existe uma única transf. linear $T: E \to F$ cuja matriz em relação às bases β e φ é a matriz A

dem.: A transf. linear T fica completamente determinada pelos valores $T(u_j)$ para $j = 1, \dots, n$ de T nos vetores da base β, i.e.

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \quad \text{(decomp. é única!)}$$

$\blacksquare$

obs.: Se E e F são esp. vet. com produto interno e $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\varphi = \{v_1, \dots, v_m\}$ são bases ortonormais de E e F respect. então $T: E \to F$ uma transf. linear possui A sua matriz em relação a β e φ no qual

$$a_{ij} = \langle T(u_j), v_i \rangle$$

Justificativa: $\langle T(u_j), v_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{m} a_{kj} v_k , v_i \rangle$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \langle v_k, v_i \rangle$$

$$= a_{ij} \cdot \langle v_i, v_i \rangle$$

$$= a_{ij}$$

A adjunta de uma transf. linear (esp. com produto interno)

Seja $T: E \to F$ uma transf. linear entre esp. com produto interno e sejam

$\beta = \{u_1, .., u_n\}$ base para E
$\varphi = \{v_1, .., v_m\}$ base para F
} bases ortonormais

Vimos que a transf. T está unicamente determinada por uma matriz $A = [a_{ij}]$ no qual $a_{ij} = \langle Tu_j, v_i \rangle$

Seja $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ dada por $b_{ij} = \langle Tu_i, v_j \rangle = a_{ji}$ para $i = 1, .., n$ e $j = 1, .., m$

$\Rightarrow A^t = B$ (A^t matriz transposta de A).

Conside $T^*: F \to E$ a transf. linear associada a matriz B. Vimos na proposição anterior que T^* está unicamente determinada por uma matriz em relação as bases φ e β, isto é,

$$\langle T^* v_j, u_i \rangle \underset{\text{proposição}}{=} b_{ij} \underset{\text{definição.}}{=} \langle Tu_i, v_j \rangle$$ para $j = 1, .., m$ e $i = 1, .., n$

Proposição (def. da adjunta) Seja $T: E \to F$ uma transf. linear entre esp. com produto interno. Então existe uma única transf. linear $T^*: F \to E$ tal que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle, \quad \forall u \in E, \forall v \in F$$

Nomenclatura: A transf. linear $T^*: F \to E$ é chamada adjunta de T.

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transf. linear dada por $T(x,y,z) = (2x-y, x+z, y-3z, x+y+z)$.

Em relação as bases canônicas

$$\left.\begin{array}{l}\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \\ \gamma = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}\end{array}\right\} \text{bases ortonormais.}$$

A matriz que representa a transf. linear é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

$T(1,0,0) = (2,1,0,1)$
$T(0,1,0) = (-1,0,1,1)$
$T(0,0,1) = (0,1,-3,1)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$\therefore T^*: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ é dada por

$$T^*(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$$= (2x+y+w, -x+z+w, y-3z+w)$$

spiral

/ /

Definição: Um operador linear $T: E \to E$ é auto adjunto quando $T = T^*$

Como consequência temos que se A é a matriz de T em relação a uma base ortonormal de E então A é simétrica isto é, $A = A^t$

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$.

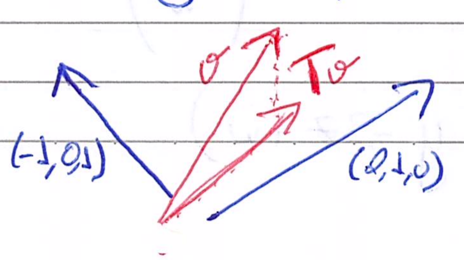
$\beta = \{(1,0); (0,1)\}$ então $T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Note que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^t$

$$\Rightarrow T^*(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y, 2x+y).$$

Exemplo 2: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que representa a projeção ortogonal sobre o plano $\pi: x - 2y + z = 0$

$$\begin{aligned} \text{plano } \pi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } x - 2y + z = 0\} \\ &= \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y.(2,1,0) + z.(-1,0,1) \,;\, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{gerado por } \{(2,1,0); (-1,0,1)\} \end{aligned}$$



Podemos afirmar (sem fazer conta!) que $Tw = w$ para todo $w \in$ plano π e que $Tz = 0$ se z é ortogonal ao plano π.

Assim, seja $\{w_1, w_2\}$ uma base ortonormal do plano π e $\{w_3\}$ um vetor unitário ortogonal ao plano π!

Exercício: Dê exemplo de vetores w_1, w_2, w_3!

Logo $\{w_1, w_2, w_3\}$ determina uma base para $\mathbb{R}^3$ que é

Aula passada: $S =$ plano π $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$
$S^\perp = \langle w_3 \rangle$

ortonormal! Agora

$$T w_1 = w_1 = 1 . w_1 + 0 w_2 + 0 . w_3$$
$$T w_2 = w_2 = 0 . w_1 + 1 w_2 + 0 . w_3$$
$$T w_3 = 0 = 0 . w_1 + 0 . w_2 + 0 w_3$$

Logo a matriz de T em relação a base $\{w_1, w_2, w_3\}$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que é simétrica. Então T é auto-adjunto

Propriedades da Adjunta:

(i) $(T+S)^* = T^* + S^*$

(ii) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$

(iii) $(T^*)^* = T$

(iv) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$

dem (i)
$$\begin{aligned} \langle u, (T+S)^* v \rangle &= \langle (T+S)u, v \rangle \\ &= \langle Tu + Su, v \rangle \\ &= \langle Tu, v \rangle + \langle Su, v \rangle \\ &= \langle u, T^* v \rangle + \langle u, S^* v \rangle \\ &= \langle u, T^* v + S^* v \rangle \\ &= \langle u, (T^* + S^*) v \rangle . \end{aligned}$$

$\therefore \langle u, (T+S)^* v \rangle = \langle u, (T^*+S^*) v \rangle, \forall u, v$

$\Rightarrow (T+S)^* v = (T^* + S^*) v \quad \forall v \iff (T+S)^* = T^* + S^*$.

obs.: $\langle u, T_1 v \rangle = \langle u, T_2 v \rangle \quad \forall u, v \Rightarrow T_1 = T_2$

$T_2, T_1 : F \to E$ transf. lineares. Vimos que a transf. T_1 está unicamente determinada por.

$$T_1 v_j = b_{1j} u_1 + \dots + b_{nj} u_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i$$

e supondo $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ ortonormais temos

$$b_{ij} = \langle u_i, T_1 v_j \rangle = \langle u_i, T_2 v_j \rangle$$

$\therefore$ T_1 e T_2 possuem a mesma matriz associada $\Rightarrow T_1 = T_2$.

dem (ii) $\langle u, (\lambda T)^* v \rangle = \langle (\lambda T)u, v \rangle$
$= \langle \lambda . Tu, v \rangle$
$= \lambda . \langle Tu, v \rangle$
$= \lambda . \langle u, T^* v \rangle$
$= \langle u, \lambda T^* v \rangle$

Pela obs anterior $(\lambda T)^* = \lambda T^*$

dem (iii) $\langle u, (T^*)^* v \rangle = \langle T^* u, v \rangle$
$= \langle u, Tv \rangle$

Pela obs. anterior $(T^*)^* = T$

Antes da dem. (iv) vamos fazer algumas observações

Seja $T: E \to F$ e $S: F \to G$ transf lineares e β, φ e γ bases de E, F e G respectivamente. Denotamos por A e B as matrizes de T e S respect. em relação as bases β, φ e φ, γ. Então

$Tv = Av$ e $S(w) = Bw \Rightarrow (S \circ T)v = S(Tv)$
$= S(Av)$
$= (BA)v$

Portanto BA é a matriz de $S \circ T$ em relação as bases β e γ.

dem (iv) Em vista do comentário acima temos que $(BA)^t$ é a matriz de $(S \circ T)^*: G \to E$ em relação as bases γ e β.

/ /

Como $(BA)^t = A^t B^t$, A^t é a matriz de T^* em relação as bases φ, β, B^t é a matriz de S^* em relação as bases γ, φ então

$$(S \circ T)^*(\vartheta) = A^t B^t \vartheta = T^*(B^t \vartheta) = (T^* \circ S^*)(\vartheta)$$

$$\Rightarrow (S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

obs.: utilizando as propriedades de matrizes
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda . A^t$
- $(A^t)^t = A$

demonstrar os itens (i), (ii), (iii).

Proposição:

(i) $N(T^*) = Im(T)^\perp$

(ii) $Im(T^*) = N(T)^\perp$

(iii) $N(T) = Im(T^*)^\perp$

(iv) $Im(T) = N(T^*)^\perp$

Relembrando: $T: E \to F$

$$N(T) = \{ u \in E : Tu = 0 \}$$
$$Im(T) = \{ w = Tu : u \in E \}.$$

Exercício de revisão: T transf. linear prove que $N(T)$, ImT são subespaços vetoriais de E e F respect.

spiral

dem (i) $w \in N(T^*) \iff T^*(w) = 0$

$\iff \langle T^*(w), u \rangle = 0 \quad \forall u \in E$

$\iff \langle w, Tu \rangle = 0 \quad \forall u \in E$

$\iff w \in Im(T)^\perp$

dem (ii) $Im(T^*) = \left[Im(T^*)^\perp\right]^\perp \underset{\substack{\downarrow \\ (iii)}}{=} \left[N(T)\right]^\perp$

dem (iii) $u \in N(T) \iff Tu = 0$

$\iff \langle Tu, v \rangle = 0 \quad \forall v \in F$

$\iff \langle u, T^* v \rangle = 0 \quad \forall v \in F$

$\iff u \in Im(T^*)^\perp$

dem (iv) $Im(T) = \left[Im(T)^\perp\right]^\perp = \left[N(T^*)\right]^\perp$

Aplicação: Seja

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

um sistema de eq. lineares com m equações e n incógnitas. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ então o sistema acima pode ser reescrito como

$AX = B$, no qual $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Defina agora $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como a transf. linear cuja matriz em rel. as bases canônicas é A, ou seja $TX = AX$.

Em particular, dado $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ o sistema anterior possui sol. $\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(X_0) = B$

$\Leftrightarrow B \in \operatorname{Im} T \Leftrightarrow B \in N(T^*)^\perp$

prop. anterior

Note que $C \in N(T^*) \Leftrightarrow T^*(C) = 0$
$\Leftrightarrow A^t C = 0$ ☆

Conclusão: o sistema inicial possui sol. p/ um certo vetor $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ B é ortogonal a toda sol C de ☆

Aplicação 2: $\operatorname{posto}(T) = \operatorname{posto}(T^*)$

Relembrando: $\operatorname{posto}(T) =$ dimensão da $\operatorname{Im}(T)$

dem.:
$$\begin{aligned}\operatorname{posto}(T^*) &= \dim \operatorname{Im}(T^*) \\ &= \dim N(T)^\perp \\ &= \dim E - \dim N(T) \\ &= \dim \operatorname{Im} T \\ &= \operatorname{posto}(T)\end{aligned}$$