3º caso) Caso geral: u, v

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \|u\| \cdot \frac{u}{\|u\|}, \|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}\right\rangle$$

$$= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle$$

Caso 2

$$= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta .$$

Conclusão: O produto interno $\langle u, v\rangle = x_1 . x_2 + y_1 . y_2$ em $\mathbb{R}^2$ está intrinsicamente relacionado com propriedades geométricas!

Geometria analítica!

Algebra ———— Geometria
coord., funções, operações — pontos, distância,

Espaços vetoriais com produto interno.

Seja E um espaço vetorial real (um conjunto E munido de uma operação soma e multiplicação por escalar) satisf. os axiomas

op. de grupo:
- comutatividade: $u + v = v + u$
- associatividade: $(u+v)+w = u+(v+w)$
- vetor nulo: $\exists\, \eta \in E$ tal que $v + \eta = \eta + v = v, \forall v \in E$
- inverso aditivo: para cada $v \in E$, existe $\tilde{v}$ tal que $v + \tilde{v} = \eta$

distributividade: $(v+w) . \lambda = v\lambda + w . \lambda$

$(\lambda_1 + \lambda_2).v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$

multiplicação por 1 : $1.v = v \;,\; \forall v \in E$

Exemplo: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e,
$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um esp. vetorial real.

Definição: Um produto interno em E é uma aplicação $\langle\, , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinear, simétrica, positiva.

Exemplo: $\mathbb{R}^2$ com $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por.
$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 . x_2 + y_1 . y_2$.

Mais geralmente em $\mathbb{R}^n$:

$\langle (x_1, x_2, .., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = x_1 y_1 + .. + x_n . y_n$.

Pergunta: Análogo ao exemplo inicial, um espaço com produto interno real possui estrutura geométrica?

Aplicações do produto interno: Seja $(E, \langle\, , \rangle)$ um espaço munido de um produto interno.

Definições

(1) dois vetores $u, v \in E$ são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$

(2) dado $u \in E$ definimos
$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ a norma de u.

NOMENCLATURA: Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores.

PROPOSIÇÃO: todo conjunto de vetores não nulos $\{v_1, \dots, v_n\}$ dois a dois ortogonais em E é L.I.

dem.: Suponhamos $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$
Queremos provar que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. MAS

$$\langle v_1, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rangle = \langle v_1, 0 \rangle = 0.$$
$$\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_1, v_n \rangle = 0.$$
$$\lambda_1 \|v_1\|^2 + \lambda_2 . 0 + \dots + \lambda_n . 0 = 0$$

NÃO NULO

$$\lambda_1 . \|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ ou } \|v_1\| = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Analog. $\lambda_j = 0 \ \forall j = 2, \dots, n$ aplicando v_j ao invés de v_1. ■

DEFINIÇÃO: Uma base de um esp. vet. com produto interno real é ortogonal se seus vetores são 2 a 2 ortogonais e além disso todos possuem norma 1.

$\Leftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é ortogonal se $\langle v_j, v_i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ e $\|v_j\| = 1$.

EXEMPLO: $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ $\{e_1, \dots, e_n\}$ é ortogonal para
$e_j = (0, \dots 0, 1, 0, \dots)$
$\hookrightarrow$ j ésima posição.

Proposição: Seja $\{v_1, .., v_n\}$ uma base ortonormal de $(E, \langle \rangle)$. Então $\forall\, v \in E$ temos

$$v = \langle v, v_1 \rangle . v_1 + .. + \langle v, v_n \rangle . v_n .$$

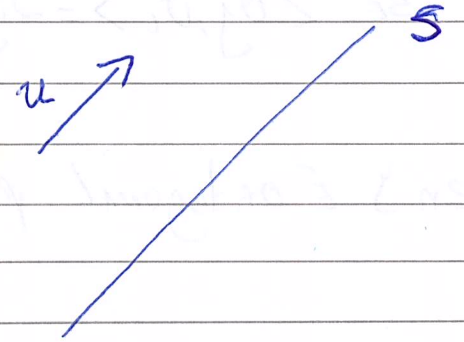
dem.: $\forall\, v \in E$ temos $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + . + \lambda_n v_n$ pois $\{v_1, .., v_n\}$ é uma base. Aplicando $\langle v_j, v \rangle$ como na prop. anterior temos:

$$\begin{aligned}
\langle v, v_j \rangle &= \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + . + \lambda_j v_j + .. + \lambda_n v_n, v_j \rangle \\
&= \lambda_1 . \underbrace{\cancel{\langle v_1, v_j \rangle}}_{0} + .. + \lambda_j . \langle v_j, v_j \rangle + .. + \lambda_n . \underbrace{\cancel{\langle v_j, v_n \rangle}}_{0} \\
&= \lambda_j . \langle v_j, v_j \rangle \\
&= \lambda_j . \underbrace{\|v_j\|^2}_{1} = \lambda_j .
\end{aligned}$$

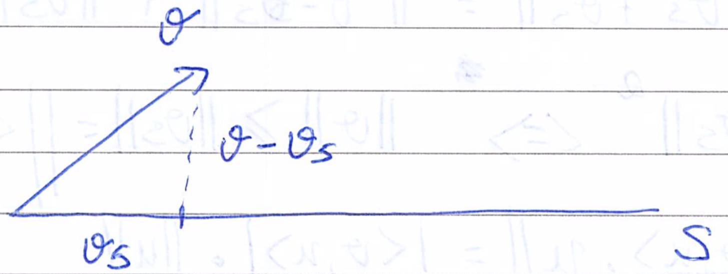
Projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço.

Seja S um subespaço vetorial gerado por um vetor $\vec{u}$, isto é,

$$S = \langle u \rangle = \{ v = \lambda u ,\ \lambda \in \mathbb{R} \}.$$



Afirmação: dado $v \in E$ existe um único vetor $v_S \in S$ tal que $v - v_S$ é ortogonal a S, isto é $\langle v - v_S, u \rangle = 0$.



De fato, $v_S = \lambda u$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. (devemos descobri-lo). Assim

$$\langle v - v_S, u \rangle = 0$$
$$\langle v, u \rangle - \langle v_S, u \rangle = 0$$
$$\langle v, u \rangle - \langle \lambda u, u \rangle = 0$$
$$\langle v, u \rangle = \lambda . \langle u, u \rangle = \lambda . \|u\|^2$$
$$\therefore \boxed{\lambda = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}}$$

v_S: é chamado de proj. ortogonal de v sobre S.

Obs.: suponhamos $u, v \in (E, \langle \, \rangle)$ ortogonais. Então

$$\| u + v \|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \cancelto{0}{\langle u, v \rangle}$$

$\therefore \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \rightarrow$ Teorema de Pitágoras.

Desig. de Cauchy-Schwarz: $|\langle v, u \rangle| \leq \|u\| . \|v\|$.

dem. dados $u, v \in E$ considere v_S a proj. ortogonal de v sobre $\langle u \rangle = S$. Então pelo T. de Pitágoras.

$$\|v\|^2 = \|v - v_S + v_S\|^2 = \|v - v_S\|^2 + \|v_S\|^2 \Rightarrow$$

$$\|v\|^2 \geq \|v_S\|^2 \Leftrightarrow \|v\| \geq \|v_S\| = \left\| \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\|$$

$$\therefore \|v\| \geq \left\| \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u \right\| = |\langle v, u \rangle| \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|^2}$$

$$\Rightarrow \|v\| \cdot \|u\| \geq |\langle v, u \rangle|.$$

A igualdade é válida quando $v - v_S = 0 \Leftrightarrow v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u$

isto é, u, v são L.D.

Aula 2 - Complemento ortogonal de um subespaço.

Seja X um subconjunto de um esp. vet. com produto interno E.

Def.: $X^{\perp} = \{ v \in E : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in X \}$ chamado complemento ortogonal de X.

Proposição: $X^{\perp}$ é um subespaço vetorial de E.

- $v_1, v_2 \in X^{\perp} \Rightarrow v_1 + v_2 \in X^{\perp}$

De fato, $\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle$
$= 0 + 0 = 0$
pois $v_1, v_2 \in X^{\perp}$.

- $v \in X^{\perp} \Rightarrow \lambda v \in X^{\perp}$ Exercício! ■

Obs.: Não é necessário que X seja um subespaço vetorial.

Exemplo:

$X = \{ (1,2,0,3), (0,1,2,2) \} \subset \mathbb{R}^4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X^{\perp} \iff \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,2,0,3) \rangle = 0$
$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0,1,2,2) \rangle = 0$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 3x_4 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2 \cdot x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_2 = -2x_3 - 2x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 = -2x_2 - 3x_4 &= -2 \cdot (-2x_3 - 2x_4) - 3x_4 \\ &= +4x_3 + 4x_4 - 3x_4 \\ &= 4x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Então: $X^{\perp} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \ldots \}$
$= \{ (+4x_3 - x_4, -2x_3 - 2x_4, x_3, x_4)$
$= \{ x_3 . (4, -2, 1, 0) + x_4 . (-1, -2, 0, 1)$
$\forall x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}.$

Soma direta de subespaço.

Dados dois subespaços $S_1, S_2 \subset E$, a soma direta $S_1 + S_2$ é definida por

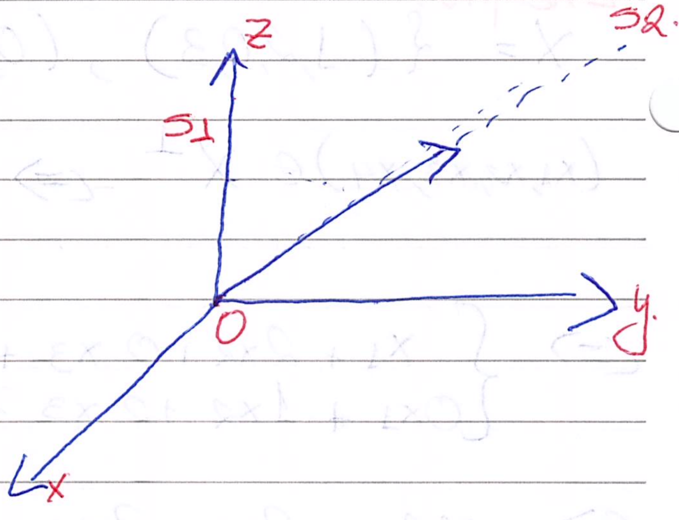
$$S_1 + S_2 = \{ v_1 + v_2 \ , \ v_1 \in S_1 \text{ e } v_2 \in S_2 \}.$$

Exercício: demonstrar que $S_1 + S_2$ também é um espaço vetorial ($\underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in S_1 + S_2} + \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in S_1 + S_2} = \underbrace{\underbrace{(v_1 + u_1)}_{\in S_1} + \underbrace{(v_2 + u_2)}_{\in S_2}}_{\in S_1 + S_2}$

Exemplo: $\mathbb{R}^3$

S_1 = eixo Oz
S_2 = gerado por $(0, 1, 1)$

$S_1 + S_2$ = plano yz



Observação importante Suponhamos que
- $\{ v_1, \ldots, v_m \}$ geram S_1
- $\{ v_{m+1}, \ldots, v_n \}$ geram S_2

Então $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ geram $S_1 + S_2$.

De fato, como $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in S_1$
$u = \beta_{m+1} v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n \in S_2$.
$\Rightarrow v + u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \beta_{m+1} v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n$. ■

Exemplo: $S_1 = \text{gerado}\{(1,0,0); (0,1,0)\}$
$S_2 = \text{gerado}\{(0,0,1), (2,3,0)\}$.

$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3 = \text{gerado}\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Proposição: $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$

Note que do exemplo acima temos $\dim S_1 = \dim S_2 = 2$
mas $\dim(S_1 + S_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim S_1 + \dim S_2 = 4$.

demonstração.

$\dim S_1 = t$
$\dim S_2 = q$
$\dim(S_1 \cap S_2) = s$. Claramente $t \geq s$ e $q \geq s$.

Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ uma base para $S_1 \cap S_2$.
Podemos completar a base $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ a uma base
$\{u_1, u_2, \dots, u_s, w_{s+1}, \dots, w_t\}$ de S_1.
$\{u_1, u_2, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_q\}$ de S_2.

Afirmação: $\beta = \{u_1, \dots, u_s, w_{s+1}, \dots, w_t, v_{s+1}, \dots, v_q\}$

É uma base para $S_1 + S_2$.

Se provarmos a afirmação então a proposição está terminada pois.

$$\dim(S_1+S_2) = q+t-s = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Claramente β gera S_1+S_2 pela obs anterior. Basta demonstrarmos que são L.I.

Suponhamos

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s + \lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_q v_q}_{U} + \underbrace{\beta_1 w_{s+1} + \dots + \beta_t w_t}_{W} = 0$$

Sabemos que $U \in S_1$ e $W \in S_2$. Como $U = -W$ então temos que $U \in S_1 \cap S_2$ e $W \in S_1 \cap S_2$.

Assim $U = x_1 u_1 + \dots + x_s u_s$.

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s + \lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_q v_q = x_1 u_1 + \dots + x_s u_s$$
$$(\lambda_1 - x_1) u_1 + \dots + (\lambda_s - x_n) u_s + \lambda_{s+1} v_{s+1} + \dots + \lambda_q v_q = 0.$$

Vetores L.I.

$\Rightarrow$ $\lambda_j = x_j$ p/ $j = 1, \dots, s$

$\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_q = 0$.

Agora $W = -U = -\lambda_j u_1 - \dots - \lambda_s u_s$. Substituindo W temos

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s + \beta_1 w_{s+1} + \dots + \beta_t w_t = 0$$

Vetores L.I.

$\Rightarrow$ $\lambda_j = 0$ p/ $j = 1, \dots, s$ e $\beta_1 = \dots = \beta_t = 0$.

Corolário 1: Se $E = S_1 + S_2$ então são equivalentes.

(i) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

(ii) cada vetor $v \in E$ se escreve de modo único como soma $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in S_1$ e $v_2 \in S_2$.

dem.: (ii) $\Rightarrow$ (i)

$v \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v = v + 0$ p/ $v \in S_1$

$= 0 + v$ p/ $v \in S_2$.

Não descritos de maneira única $\Leftrightarrow v = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $v = v_1 + v_2$, $v_1, u_1 \in S_1$ e $v_2, u_2 \in S_2$.

$= u_1 + u_2$

Então $v_1 + v_2 = u_1 + u_2$

$\underbrace{v_1 - u_1}_{\in S_1} = \underbrace{u_2 - v_2}_{\in S_2}$. Como $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ então

$v_1 - u_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = u_1$

$v_2 - u_2 = 0 \quad v_2 = u_2$.

Notação: $E = S_1 \oplus S_2 \;.\!=.\; E = S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \phi$.
chamada soma direta.

Corolário 2: Se S é um subespaço vetorial de $(E, \langle\rangle)$ então $E = S \oplus S^{\perp}$! Em particular.

$$\dim S^{\perp} = \dim E - \dim S$$

dem.: dado $v \in E$ podemos escrever $v = v - v_S + v_S$ no qual $v - v_S \in S^{\perp}$ e $v_S \in S$. Como $S \cap S^{\perp} = \{0\}$ segue o resultado.

Corolário 3: $(F^\perp)^\perp = F$, F subesp. vetorial de $(E, \langle\,\rangle)$.

dem: $w \in F$ então $\langle w, v \rangle = 0, \forall v \in F^\perp$

$\Rightarrow w \in (F^\perp)^\perp = \{u \in E$ tq. $\langle u, v \rangle = 0$
$\forall v \in F^\perp\}$.

Agora $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$
$= \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp$

$\Rightarrow \dim (F^\perp)^\perp = \dim F$

Propriedade geral: $A \subseteq B$ e $\dim B = \dim A \Rightarrow A = B$.