Forma de Jordan

- E espaço vetorial real
- $\dim E < \infty$
- $T \in \mathcal{L}(E) \;.\equiv.\; T: E \to E$ linear

Def.: T é nilpotente se existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $T^K = 0$. O menor K natural tal que $T^K = 0$ e $T^{K-1} \neq 0$ é chamado de "índice de nilpotência" de T.

Exemplo 1: $T(x,y,z) = (0, x, x+y)$ é nilpotente.

De fato, $T(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

e $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^3 = 0$.

$\therefore$ 3 é o índice de nilpotência de T.

obs.: Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é nilpotente se existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $A^K = 0$.

obs. 2: Seja $T \in \mathcal{L}(E)$ e β uma base de E. Considere $[T]_\beta$ a matriz que representa T associada a base β. Então

$$T^K = 0 \iff [T]_\beta^K = 0$$

Note que a observação anterior independe da base fixada, isto é se γ é uma outra base de E então sabemos que

$$[T]_\gamma = P^{-1}[T]_\beta P$$

no qual P é a matriz mudança de base de γ para β e dessa forma

$$[T]_\gamma^K = (P^{-1}[T]_\beta P)^K$$

$$= P^{-1}[T]_\beta \underbrace{P . P^{-1}}_{I}[T]_\beta P \dots P^{-1}[T]_\beta P$$

$$= P^{-1}([T]_\beta^K) . P$$

Logo $[T]_\gamma^K = 0 \Leftrightarrow [T]_\beta^K = 0.$

Pergunta: Uma matriz diagonalizável pode ser nilpotente?

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável $.\equiv.$ $\exists$ D diagonal e P invertível tal que $A = P^{-1}DP$. Logo pela obs. acima

$$A^K = P^{-1}D^K P$$

$$\therefore A^K = 0 \Leftrightarrow D^K = 0 \underset{\Uparrow}{\Leftrightarrow} D = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

D diagonalizável

Exemplo 2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são nilpotentes de índice 2.

Exercício: Verifique se $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -43 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ é nilpotente.

Proposição: Seja $T \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente de índice K e seja $v_0 \in E$ tal que $T^{K-1}(v_0) \neq 0$. Então

(i) $\{v_0, Tv_0, \ldots, T^{K-1}v_0\}$ é L.I.

(ii) $W = [v_0, Tv_0, \ldots, T^{K-1}v_0]$ é um subespaço invariante por T.

↳ gerado pelos vetores

dem.:

(i) $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 Tv_0 + \ldots + \alpha_{K-1} T^{K-1} v_0 = 0$ ⊛

devemos mostrar que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{K-1} = 0$. Aplicando T^{K-1} em ⊛ temos

$$\alpha_0 T^{K-1} v_0 + \alpha_1 . \underbrace{T^{K} v_0}_{=0} + \ldots + \alpha_{K-2} \overbrace{T^{(K-1).(K-2)}}^{=0} v_0 + \alpha_{K-1} \underbrace{T^{2(K-1)}}_{=0} v = 0$$

uma vez que $T^j = 0$ p/ $j \geq K-1$ e assim

$$\alpha_0 \underbrace{T^{K-1} v_0}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

spiral

/ /

Agora aplicando T^{k-2} em ⊛ segue $\alpha_1 = 0$ e assim por diante.

(ii) Basta verificar que T aplicado a cada gerador pertence a W, isto é

$$T v_0 \in W = [v_0, T v_0, \dots, T^{k-1} v_0]$$

$$\vdots$$

$$T(T^{k-2} v_0) = T^{k-1} v_0 \in W = [v_0, \dots, T^{k-1} v_0].$$

$$T(T^{k-1} v_0) = T^k v = 0 \in W.$$

$\blacksquare$

Corolário: $\dim E = k$ e $\beta = \{v_0, T v_0, \dots, T^{k-1} v_0\}$ é uma base para E (como antes) então segue que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

chamado "bloco de Jordan".

. $\dim E > k$?

Proposição: Se $v_0 \in E$ é tal que $T^{k-1}(v_0) \neq 0$ então existe $M \subset E$ subespaço invariante por T tal que $E = M \oplus W$, no qual

$W = [v_0, Tv_0, \dots, T^{k-1}v_0]$ e $\dim M = n-k$.

Pergunta: pode acontecer $k > n$? (para pensar).

Exercício: Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dada por

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que T não é nilpotente.

Def.: Seja $T: E \to E$ um op. linear nilpotente e F um subespaço vetorial de E. Dizemos que F é cíclico em relação a T se existe $u \in F$ tal que $T^m u = 0$ e $\{u, Tu, \dots, T^{m-1}u\}$ é uma base para F.

Como consequência temos que $F \subset E$ cíclico por T

$\Rightarrow$ F é invariante por T e $T|_F$ é nilpotente de índice m.

Teorema: Seja $T: E \to E$ nilpotente de índice k e $\dim E = n$. Então existem inteiros positivos

- $k = k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \dots \geq k_r > 0$
- $F_1, \dots, F_r$ subespaços cíclicos
- $\dim F_i = k_i$

tais que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$.

Continuação: Seminários!