Teorema espectral para operadores auto-adjuntos

Teorema: Seja $T: E \to E$ um operador linear com $\dim E = n$ auto adjunto. Então existe uma base ortonormal de E formada por autovetores de T.

dem.: Vamos provar por indução em n

- $n = 1$ ok!

De fato $v \in E$ e $\|v\| = 1$ então $\{v\}$ é uma base ortonormal para E, isto é $w = \alpha v$ $\forall w \in E$ e além disso como $Tv \in E = \langle v \rangle \Rightarrow Tv = \lambda v$ $\therefore$ v autovetor de T.

- Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $k = n-1$ isto é $\tilde{T}: \tilde{E} \to \tilde{E}$ é um operador linear com $\dim \tilde{E} = n-1$ auto adjunto então existe uma base ortonormal de $\tilde{E}$ formada pelos autovetores de T. Vamos provar a propriedade para $T: E \to E$ op. linear autoadjunto tq $\dim E = n$.

Pela Proposição da aula passada T possui um autovetor v_1 unitário. Denote

$F \doteq \langle v_n \rangle$ subespaço gerado por v_n

Sabemos que $E = F \oplus F^{\perp}$ tal que $\dim F^{\perp} = n-1$ e pelo Lema da aula passada $F^{\perp}$ é invariante por T.

Conclusão: $T: \underbrace{F \oplus F^{\perp}}_{E} \to \underbrace{F \oplus F^{\perp}}_{E}$ linear $\Rightarrow$

$T|_{F^\perp}$ (T restrito a $F^\perp$) $: F^\perp \to F^\perp$

está bem definida, é linear e auto adjunto.
(EXERCÍCIO)

Aplicando a hipótese de indução existe uma base de autovetores de $T|_{F^\perp}$ digamos $\{v_1, .., v_{n-1}\}$.

Afirmação: $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ é uma base de autovetores de T.

De fato.

(i) Como $\{v_1, .., v_{n-1}\}$ é uma base p/ $F^\perp$ e $\{v_n\}$ é uma base para F então como $E = F \oplus F^\perp$ temos que

$\{v_1, .., v_{n-1}, v_n\}$ é uma base para E

(ii) v_j é autovetor de $T|_{F^\perp}$ então v_j é autovetor de T para $j = 1, \dots, n-1$. $\blacksquare$

Consequências:

Seja $T: E \to E$ um operador auto-adjunto. Pelo Teorema Espectral existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E formada por autovetores de T. Sejam $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ os autovalores distintos de T ($r \leq n$) e sejam $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ os auto espaços correspondentes, isto é

$$E_{\lambda_j} = N(T - \lambda_j I) = \{v \in E \text{ tq. } T(v) = \lambda_j v\}$$

Dado $v \in E$ sabemos que v se escreve C.L. de $\{v_1, .., v_n\}$, isto é,

$$v = \beta_1 . v_1 + \dots + \beta_n v_n$$
$$= w_1 + \dots + w_r \quad , \text{ no qual } w_j \in E_{\lambda_j} \text{ p/ } j = 1, \dots, r.$$

Ex: $n = 3$ e $r = 2$ tq. $E_{\lambda_1} = \langle v_1 \rangle$ e $E_{\lambda_2} = \langle v_2, v_3 \rangle$

$$\therefore \; v = \beta_1 . v_1 + \underbrace{\beta_2 . v_2 + \beta_3 v_3}$$
$$= w_1 + \quad w_2 .$$

Afirmação: A decomposição acima é única!

Suponhamos $\quad v = w_1 + \dots + w_r$
$$= \tilde{w}_1 + \dots + \tilde{w}_r \quad , \text{ no qual } w_j, \tilde{w}_j \in E_{\lambda_j}$$
para $j = 1, \dots, r$.

Então (subtraindo) temos

$$0 = (w_1 - \tilde{w}_1) + \dots + (w_r - \tilde{w}_r)$$
$$\underset{\in E_{\lambda_1}}{\tilde{w}_1 - w_1} = \underbrace{(w_2 - \tilde{w}_2)}_{\in E_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{(w_r - \tilde{w}_r)}_{\in E_{\lambda_r}}$$

Pela proposição da aula passada $\tilde{w}_1 - w_1$ é ortogonal a cada parcela $w_j - \tilde{w}_j$ (autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais; note que $w_j - \tilde{w}_j$ é C.L de autovetores v's $\therefore$ tbm autovetores associados a um mesmo autovalor), Logo

$$\langle \tilde{w}_1 - w_1, \tilde{w}_1 - w_1 \rangle = \langle w_2 - \tilde{w}_2, \tilde{w}_1 - w_1 \rangle + \dots +$$
$$\langle w_r - \tilde{w}_r, \tilde{w}_1 - w_1 \rangle$$
$$= 0$$

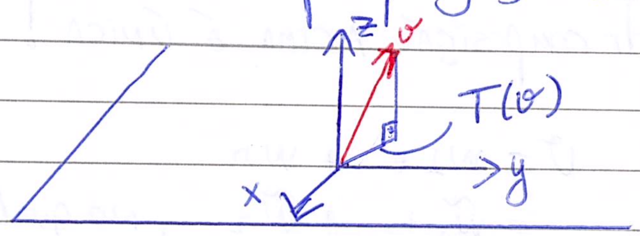
$$\Rightarrow \| \tilde{w}_1 - w_1 \| = 0 \quad \therefore \; \tilde{w}_1 = w_1 .$$

Analogamente $\; w_j = \tilde{w}_j \quad \forall j = 2, \dots, r.$

Conclusão: $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ (soma direta ortogonal)

e $T|_{E_{\lambda_j}} = \lambda_j I$.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ op. projeção ortogonal sobre o plano xy.



$T(e_1) = e_1$
$T(e_2) = e_2$
$T(e_3) = 0$

$\therefore T(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

T é autoadjunto pois A é simétrica.
Além do mais $\lambda = 1$ e $\lambda = 0$ são autovalores $(p_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2)$
e

$E_0 = \langle e_3 \rangle$
$E_1 = \langle e_1; e_2 \rangle$

$\therefore \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal de autovetores.

Claramente $\mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_1$.

Proposição: Sejam $T, S : E \to E$ op. auto-adjuntos tal que $TS = ST$. Então

(a) cada auto-espaço de um deles é invariante pelo outro.

(b) Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E formada por autovetores de T e S.

dem.

(a) Seja λ_j um autovalor de T, E_{λ_j} o autoespaço correspondente e $v \in E_{\lambda_j}$. Queremos provar que $S(v) \in E_{\lambda_j}$. De fato,

$$T(S(v)) = S(T(v)) = S(\lambda_j v) = \lambda_j S(v)$$

$$\therefore (T - \lambda_j I)(S(v)) = 0 \quad \therefore S(v) \in E_{\lambda_j}.$$

(b) Considere o operador $S|_{E_{\lambda_j}} : E_{\lambda_j} \to E_{\lambda_j}$ (bem definido como vimos na dem. do teorema espectral + item (a))

Pelo teorema espectral aplicado a $S|_{E_{\lambda_j}}$ existe uma base ortonormal de E_{λ_j} formada pelos autovetores de S. Como $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ juntando os autovetores em cada autoespaço (que são simultaneamente autovetores de T e S) obtemos uma base ortonormal de E formada por autovetores de S e T. $\blacksquare$

Operadores positivos e não negativos

Def.: Um operador linear $T: E \to E$ é não negativo (respect. positivo) se T é auto adjunto e $\langle Tv, v \rangle \geq 0$

$\forall\, v \in E$ (respectivamente $\langle Tv, v \rangle > 0$ $\forall\, v \neq 0$, $v \in E$)

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (+y, x)$

T é autoadjunto pois $T(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

e $A = A^t$. Pergunta: T é não negativo? De fato se $v = (x,y)$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle (y,x), (x,y) \rangle = 2xy$$

que falha ser não negativo em $\mathbb{R}^2$!

Exemplo 2: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Claramente T é auto adjunto e além do mais se $v = (x,y)$ temos

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle (x+y, x+y), (x,y) \rangle \\ &= (x+y).x + (x+y).y \\ &= (x+y).(x+y) \\ &= (x+y)^2 \geq 0 \text{ para } v \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Note que T é não negativo porém T não é positivo.

Proposição: Um operador linear auto-adjunto $T: E \to E$ é não negativo (resp. positivo) se e só se os autovalores de T são todos não negativos (respect. positivos).