Operadores Auto-Adjuntos

Def.: $T: E \to E$ é auto adjunto se $T = T^*$, em outras palavras $\langle Tv, u \rangle = \langle v, Tu \rangle$, $\forall\, u, v \in E$.

Proposição: $T: E \to E$ é auto adjunto $\Leftrightarrow$ a matriz de T em relação a uma (portanto qualquer) base ortonormal de E é uma matriz simétrica.

dem.: Seja β uma base ortonormal para E e A a matriz de T em relação à base β, então sabemos que A^t (matriz transposta) é a matriz de T^* em relação a β. Dessa forma

$$T = T^* \Leftrightarrow A = A^t \text{ isto é } A \text{ é simétrica}$$

■

Exemplo: Seja $T(x,y,z) = (x - y + 4z, -x + 2y + 6z, 4x + 6y + 3z)$. Então T é auto adjunto.

De fato se β é a base canônica de $\mathbb{R}^3$ (que é ortonormal)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = A^t$$

Exemplo 2: Mostre que o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que corresponde a proj. ortogonal sobre o plano $x + y - 2z = 0$ é auto-adjunto.

Seja $x + y - 2z = 0$ eq. geral do plano π

$$\Updownarrow$$

$$\langle (x,y,z), (1,1,-2) \rangle = 0$$

$\therefore$ $v_3 \doteq (1,1,-2)$ é $\perp$ plano π. Por outro lado, $(x,y,z) \in \pi$ temos

$$(x,y,z) = (-y+2z, y, z) = y.(-1,1,0) + z.(2,0,1)$$

$\Rightarrow$ plano π $\underset{\hookrightarrow \text{gerado}}{=}$ $\langle \underset{\overset{\shortparallel}{v_1}}{(-1,1,0)} ; \underset{\overset{\shortparallel}{v_2}}{(2,0,1)} \rangle$.

Note que $\{v_1, v_2, v_3\}$ determina uma base para $\mathbb{R}^3$ mas não é ortonormal.

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$$

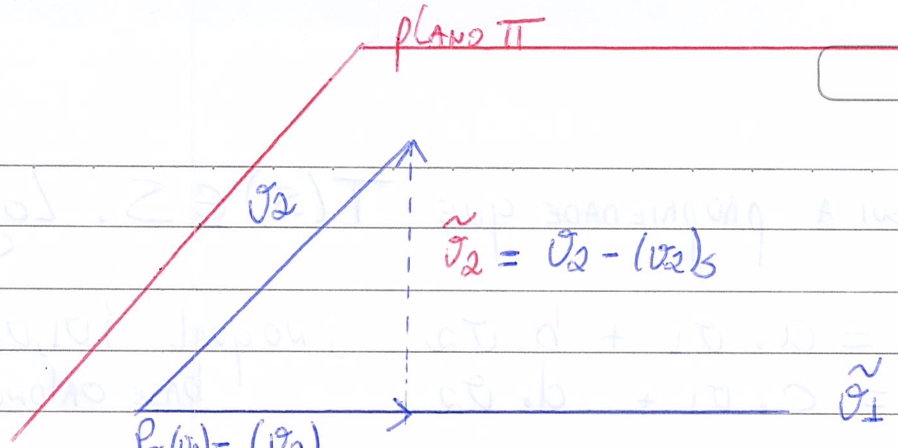
Precisamos encontrar $\tilde{v}_2 \in$ plano π tq $\tilde{v}_1 \perp \tilde{v}_2$ (note que v_1 não é ortogonal a v_2). Pelo processo de GS

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2 - \langle \tilde{v}_1, v_2 \rangle . \tilde{v}_1}{\|v_2 - \langle \tilde{v}_1, v_2 \rangle . v_1\|} = $$

$$= \frac{(2,0,1) - \frac{(-2)}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} . (-1,1,0)}{\| \quad \text{vetor acima} \quad \|}$$

$$= \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

obs. $\langle \tilde{v}_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (-1,1,0), (2,0,1) \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}}$



$P_{\tilde{v}_1}(v_2) = (v_2)_S$

$= \langle v_2, \tilde{v}_1 \rangle . \tilde{v}_1$

Note que $\tilde{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in$ plano π.

Além do mais como $v_3 \perp$ plano π $\Rightarrow \tilde{v}_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

$\perp \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ portanto $\beta = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ é uma base ortonormal.

Agora por definição de T temos:

$$T\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1 = 1.\tilde{v}_1 + 0.\tilde{v}_2 + 0.\tilde{v}_3$$
$$T\tilde{v}_2 = \tilde{v}_2 = 0.\tilde{v}_1 + 1.\tilde{v}_2 + 0.\tilde{v}_3$$
$$T\tilde{v}_3 = 0 = 0.\tilde{v}_1 + 0.\tilde{v}_2 + 0.\tilde{v}_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t \therefore T \text{ é auto-adjunto.}$$

Proposição: todo operador $T: E \to E$ linear auto-adjunto possui um autovetor, isto é, possui um subespaço invariante de dim 1.

dem.: Em vista da proposição da última aula podemos supor sem perda de generalidade que T possui um subespaço invariante de dimensão 2. Seja $S = \langle v_1; v_2 \rangle$ tal subespaço.
↳ gerado

spiral

que possui a propriedade que $T(S) \subseteq S$. Logo.

$$(\star) \quad \begin{aligned} T v_1 &= a \cdot v_1 + b \cdot v_2 \\ T v_2 &= c \cdot v_1 + d \cdot v_2 \end{aligned}$$

, no qual $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal para S.

Podemos então pensar que $\dim E = 2$, T dado como em $(\star)$ e auto adjunto. Dessa forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ é a matriz de T associada a base $\{v_1, v_2\}$

e como $T = T^* \iff A = A^t \underset{b=c}{\iff} A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

Agora o polinômio característico de T é dado por.

$$p_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda) \cdot (d-\lambda) - c^2$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - c^2$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4 \cdot (ad - c^2)$$

$$= a^2 + d^2 + 2 \cdot ad - 4ad + 4c^2$$

$$= a^2 - 2ad + d^2 + 4c^2$$

$$= (a-d)^2 + 4c^2 > 0$$

Portanto $p_A(\lambda)$ sempre possui uma raiz real $\iff$ autovalor e conseq. um autovetor.

Lema: Se $T: E \to E$ é auto-adjunto e $F \subset E$ é invariante por $T \Rightarrow F^{\perp}$ também é invariante por T.

dem.: Queremos provar que se

$$v \in F^{\perp} \Rightarrow T(v) \in F^{\perp}$$

Dado $u \in F$ temos

$$\langle T(v), u \rangle \underset{T=T^*}{=} \langle v, \underbrace{Tu}_{\in F \text{ pois } F \text{ é invariante por } T} \rangle$$

$$= 0 \text{ pois } v \in F^{\perp} \text{ e } Tu \in F$$

Logo $T(v) \in F^{\perp}$

∎

Proposição: Seja $T: E \to E$ um operador auto-adjunto. Se $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $T(v_j) = \lambda_j v_j$ com $\lambda_j \neq \lambda_i$ então $\langle v_j, v_i \rangle = 0$

Em outras palavras: autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

dem.:

$$\lambda_i . \langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle$$
$$= \langle T v_i, v_j \rangle$$
$$= \langle v_i, T v_j \rangle \quad (T=T^*)$$
$$= \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j).\langle v_i, v_j \rangle = 0 \underset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Rightarrow} \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

∎

spiral