Operadores Ortogonais

Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^m$ isto é $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\|u_i\| = 1$.

Definição: Uma matriz $A \in M_{m\times n}$ é chamada ortogonal quando os n vetores colunas de A formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^m$

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$ não é uma matriz ortogonal

Exemplo 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ é uma matriz ortogonal

Exemplo 3: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ não é uma matriz ortogonal.

1 - Se $A \in M_{m\times n}$ é uma matriz ortogonal $\Longleftrightarrow A^t A = Id_{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ u_1 & u_2 & & u_n \end{pmatrix}_{m\times n} \Longleftrightarrow A^t = \begin{pmatrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \vdots \\ \leftarrow u_n \end{pmatrix}_{n\times m}$$

$$\Updownarrow$$

$\Leftrightarrow$

$$A^t A = \begin{pmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \dots & \langle u_1,u_n\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \dots & \langle u_2,u_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle u_n,u_1\rangle & \langle u_n,u_2\rangle & \dots & \langle u_n,u_n\rangle \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$= Id_{n\times n}$$

$\vdash$ $A \in M_{m\times n}$ ORTOGONAL $\Rightarrow$ posto $A = n$ (nº COLUNAS L.I.)

E CLARAMENTE $m \geq n$ (AS COLUNAS DE A FORMAM UM CONJ L.I. EM $\mathbb{R}^m$)

obs.: SE $A \in M_{n\times n}$, isto É quadrada, E A É ortogonal ENTÃO

$$A^t A = Id_n.$$

Como posto de A É n $\Rightarrow$ A possui UMA INVERSA

$\Rightarrow A^{-1} = A^t$

Conclusão: $A \in M_{n\times n}$ ORTOGONAL $\Rightarrow$ $A^t = A^{-1}$.

Neste CASO ESPECIAL temos

$$A A^{-1} = Id \Leftrightarrow A \cdot A^t = Id_n$$

Logo AS LINHAS DE A TAMBÉM FORMAM UM CONJUNTO DE VETORES ORTONORMAIS

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{matrix}$ Note que $A = A^t = A^{-1}$

Exemplo 4: $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal

Propriedades

(i) Composição de matrizes ortogonais é ortogonal, i.e. $A \in M_{n\times p}$ e $B \in M_{m\times n}$ são ortogonais $\Rightarrow$ $B \circ A$ é ortogonal

De fato $(BA)^t(BA) = A^t B^t B A$

$= A^t \, Id \, A$ ← B ortogonal

$= A^t A$

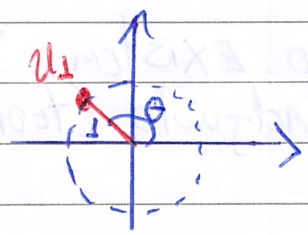
A ortogonal ← $= Id$

(ii) A é ortogonal $\Rightarrow A^t$ é ortogonal (exercício)

Matrizes ortogonais 2x2

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal .:. $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal em $\mathbb{R}^2$, no qual $u_1 = (a,c)$ e $u_2 = (b,d)$

Como $\|u_1\| = 1 \Rightarrow u_1 = (\underbrace{\cos\theta}_{a}, \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{c})$ para algum θ.



Como $u_1 \perp u_2$ temos duas possibilidades p/ u_2

$u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ ou

$u_2 = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$

/ /

Dessa forma

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \det A = 1 \qquad\qquad \Downarrow \det A = -1.$$

- Considere $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Vamos calcular possíveis autovetores.

$$p_A(\lambda) = (\cos\theta-\lambda)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2$$
$$= \lambda^2 - (2\cos\theta)\lambda + 1$$

$$\therefore \Delta = 4(\cos\theta)^2 - 4.1 = 4.[(\cos\theta)^2-1]$$
$$= -4.\operatorname{sen}^2\theta$$

Só possui raízes reais $\Leftrightarrow$ $\theta=0$ ou $\theta=180°$

Nesses casos $A=\pm Id$

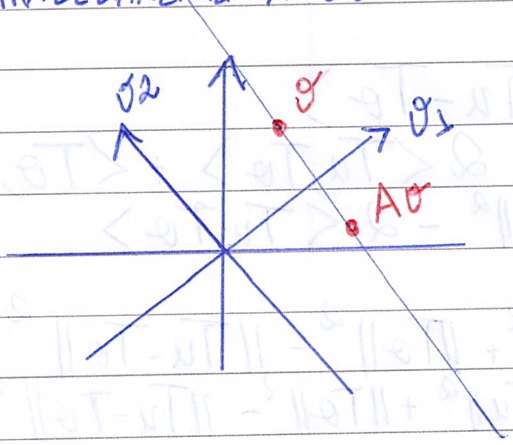
- Considere $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = -(\cos\theta-\lambda).(\cos\theta+\lambda) - (\operatorname{sen}\theta)^2$$
$$= \lambda^2 - 1$$

$\therefore \lambda = \pm 1$ são os autovalores. Logo existem $\{v_1, v_2\}$ tais que $\begin{cases} Av_1 = v_1 \\ Av_2 = -v_2 \end{cases}$ $\therefore$ A é auto adjunto (teorema espectral).

Geometricamente A é uma reflexão em torno de v_1

paralelamente a v_2



Def.: Seja $T: E \to F$ uma transformação . Dizemos que

(i) T preserva norma quando $\|Tv\| = \|v\|, \forall v \in E$

(ii) T preserva distância quando $\|Tv - Tu\| = \|v - u\|, \forall u, v \in E$

(iii) T preserva produto interno $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ $\forall u, v \in E$

Teorema: T linear preserva norma $\Leftrightarrow$ p. distância $\Leftrightarrow$ p. produto interno.

dem.:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Vamos provar a seguinte identidade

$$\langle Tu, Tv \rangle = \frac{1}{2}\left[\|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2\right]$$

De fato

$$\|Tu - Tv\|^2 = \langle Tu - Tv, Tu - Tv \rangle$$
$$= \langle Tu, Tu \rangle - 2\langle Tu, Tv \rangle + \langle Tv, Tv \rangle$$
$$= \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - 2\langle Tu, Tv \rangle$$

$$\therefore \quad 2\langle Tu, Tv \rangle = \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2$$
$$\langle Tu, Tv \rangle = \frac{1}{2}\left[\|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2 \right]$$

Agora vamos voltar a demonstração

(i) ⇒ (ii)

$$\underbrace{\|Tv - Tu\| = \|T.(v-u)\|}_{T \text{ linear}} \underbrace{= \|v - u\|}_{T \text{ preserva norma}}, \quad \forall v, u \in E$$

(ii) ⇒ (i)

Como $T(0) = 0$, pois T é linear então

$$\|Tv\| = \|Tv - T(0)\| \underbrace{=}_{T \text{ preserva distância}} \|v - 0\| = \|v\|, \quad \forall v \in E$$

(ii) ⇒ (iii) Por hipótese temos $\|Tu\| = \|u\|$, $\|Tv\| = \|v\|$ e

$\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$, então substituindo na identidade inicial temos

$$\langle Tu, T\theta \rangle = \frac{1}{2}\left[\|Tu\|^2 + \|T\theta\|^2 - \|Tu - T\theta\|^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\|u\|^2 + \|\theta\|^2 - \|u - \theta\|^2 \right]$$

$$= \langle u, \theta \rangle$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Como $\langle Tu, T\theta \rangle = \langle u, \theta \rangle$, $\forall u, \theta \in E$ em particular tomando $u = \theta$ temos

$$\|T\theta\|^2 = \langle T\theta, T\theta \rangle = \langle \theta, \theta \rangle = \|\theta\|^2, \forall \theta \in E$$

$\therefore$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Conclusão: toda as propriedades são equivalentes ∎

Def.: Dizemos que uma transf. linear $T: E \to F$ é ortogonal se T satisfaz uma (portanto todas) das propriedades (i), (ii) ou (iii).

Exemplo: $T(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (\cos\theta x - \operatorname{sen}\theta y, +\operatorname{sen}\theta x + \cos\theta . y)$

Então $\|T(x,y)\|^2 = (\cos\theta . x - \operatorname{sen}\theta . y)^2 + (\operatorname{sen}\theta . x + \cos\theta y)^2$

$= x^2 . \cos^2\theta + y^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2xy . \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

$+ x^2 . \operatorname{sen}^2\theta + y^2 . \cos^2\theta + 2xy \cos\theta . \operatorname{sen}\theta$

$= x^2 + y^2$

$= \|(x,y)\|^2$ $\therefore$ T é ortogonal.

Pergunta: Seja β uma base ortonormal para E e γ uma base ortonormal para F e seja A a matriz associada a transformação linear $T: E \to F$.

T é ortogonal $\iff$ A é ortogonal ?

Teorema: Sejam T, E, F, β, γ como antes. São equivalentes as seguintes propriedades:

(iii) T é ortogonal

(iv) $T^*T = Id_E$

(v) A matriz de T em relação a qualquer par de bases β e γ ortonormais de E e F respect. é uma matriz ortogonal.

(vi) A matriz de T em relação a um par de bases ortonormais β de E e γ de F é uma matriz ortogonal

(vii) T transforma uma certa base ortonormal β de E em um conjunto ortonormal $\mathcal{X}$ de F.

(viii) T transforma qualquer base ortonormal de E em um conjunto ortonormal $\mathcal{X}$ de F

Demonstração

(iii) $\Rightarrow$ (iv) De fato, como T é ortogonal então

$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in E$. Logo, para $\forall u, v \in E$

temos $\langle u, v \rangle = \langle u, T^*Tv \rangle \Rightarrow v = T^*Tv$, $\forall v \in E$

Assim $T^*T = Id_E$

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) Sejam β e γ bases ortonormais de E e F respectivamente. Considere A a matriz associada a $T: E \to F$, então

$$T^*T = Id_E \iff A^t . A = Id_{n\times n}, \quad \dim E = n$$

Logo A é uma matriz ortogonal

(v) $\Rightarrow$ (vi) imediato!

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Seja $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de E e $\gamma = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma base ortonormal de F. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz associada a T em relação às bases fixadas β e γ. Assim

$$Tu_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \quad \text{e portanto}$$

$$\langle Tu_j, Tu_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i, \sum_{l=1}^{m} a_{lk} v_l \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} a_{ij} a_{lk} \langle v_i, v_l \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{array}{cccc} & Tu_j & & Tu_k \\ A = & \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \cdots & \boxed{\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array}} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & a_{2k} & & a_{2n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mk} & & a_{mn} \end{array}\right)_{m \times n} \end{array}$$

$$A^t = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & & a_{mj} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{1k} \quad \cdots \quad a_{mk}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{array}\right)_{n \times m} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow Tu_j \\ \\ \leftarrow Tu_k \\ \\ \\ \end{array}$$

Vimos que $A^t A = I_{dn} \therefore \sum_{i=1}^{m} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$

Com isso provamos que $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ são dois a dois ortogonais e unitários $\therefore$ formam um conj. ortonormal em F

(vii) $\Rightarrow$ (viii)

Seja $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de E tal que $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é um conjunto ortonormal de F (hipótese)

Então $\langle Tu_i, Tu_j \rangle = \delta_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$

$\Rightarrow \langle Tv, Tu \rangle = \langle v, u \rangle, \forall v, u \in E$

Exercício

$\therefore$ (vii) $\Rightarrow$ (iii)

Agora vamos demonstrar que (iii) $\Rightarrow$ (viii).

Seja $\tilde{\beta} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n\}$ uma base ortonormal qualquer de E. Então por hipótese

$$\langle T\tilde{u}_i, T\tilde{u}_j \rangle = \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Logo $\{T\tilde{u}_1, \ldots, T\tilde{u}_n\}$ é um conjunto ortonormal em F

Por transitividade (vii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (viii)

também temos (viii) $\Rightarrow$ (vii) $\therefore$ (vii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (viii).

(viii) $\Rightarrow$ (iii) imediato!

Proposição: Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de um operador linear $T: E \to E$ ortogonal $\Rightarrow \lambda = \pm 1$.

dem.: $\exists\, v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$ e T ortogonal

$$\Updownarrow$$

T preserva norma

temos

$$\|Tv\| = \|v\| \quad \text{e} \quad \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

$$\Rightarrow |\lambda|\,\|v\| = \|v\| \underset{v \neq 0}{\Leftrightarrow} |\lambda| = 1$$

Proposição: Seja $T: E \to E$ um op. linear ortogonal. Se $X \subseteq E$ é invariante por $T \Rightarrow X^{\perp}$ também é invariante.

dem.: Seja $v \in X^{\perp}$, queremos mostrar que $Tv \in X^{\perp}$, isto é

$$\langle Tv, u \rangle = 0 \quad , \forall u \in X$$

Afirmação: T é sobrejetivo em X, isto é $T|_X : X \to X$ é sobrejetivo.

Sabemos que T é injetivo pois T preserva norma e assim $Tv = 0 \Leftrightarrow v = 0$ $(\|Tv\| = \|v\|, \forall v \in E)$

Agora $T(X) \subseteq X \therefore T|_X : X \to X$ é bijetivo!

Voltando: $v \in X^{\perp}$ e $u \in X \therefore \exists w \in X$ tal que $u = Tw$, assim

$$\langle Tv, u \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

pois $v \in X^{\perp}$ e $u \in X$. T preserva prod. interno