Subespaços Invariantes

Def.: Seja $T: E \to E$ um op. linear. Um subespaço $S \subset E$ é invariante por T se $T(S) \subseteq S$ isto é $T(u) \in S$, $\forall\, u \in S$.

Exemplo 1: Um subespaço $S \subset E$ de dim 1, ou seja, gerado por um vetor $v \neq 0$ é invariante $\iff$ v é um autovetor de T

($\Rightarrow$)

$S = \langle v \rangle$ invariante $\Rightarrow$ $Tv \in S \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Tv = \lambda v$

$\therefore$ v é autovetor de T

($\Leftarrow$)

v autovetor de T $\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tq $Tv = \lambda v$.

Seja $w \in S = \langle v \rangle$. Então $w = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, portanto

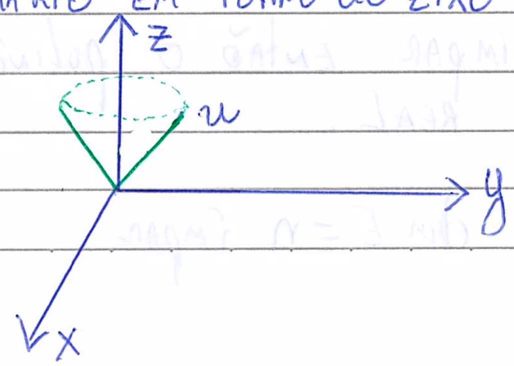
$$T(w) = T(\alpha v)$$

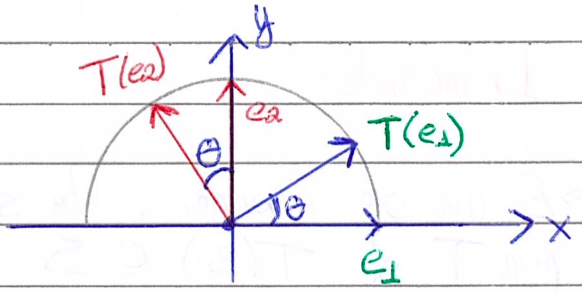
$$\overset{T \text{ linear}}{=} \alpha . Tv$$

$$\overset{v \text{ autovetor}}{=} \alpha . \lambda v \in S$$

Conclusão: $\forall\, w \in S \Rightarrow Tw \in S$ $\therefore$ $T(S) \subseteq S$.

Exemplo 2: Seja $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que consiste geom. em uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário em torno do eixo Oz.





$e_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1,0)$

$T_\theta(e_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$
$T_\theta(e_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$
$T_\theta(e_3) = (0, 0, 1)$

Portanto $T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Assim

$T_\theta(u) = u \quad \forall\, u$ no eixo Oz
$T_\theta(x,y,0) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cdot\cos\theta, 0)$

Oz : subespaço invariante
plano xy : subespaço invariante

Proposição: Todo operador linear $T: E \to E$ possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2. Além disso, $\dim E$ é ímpar então T possui um subespaço invariante de dimensão 1.

dem.: $\dim E$ é ímpar então o polinômio característico possui uma raiz real.

Supónhamos $\dim E = n$ ímpar.

De fato, fixado uma base β de E então existe $A \in M_{n\times n}$ tal que

$$T\vartheta = \overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}^{A}_{n\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

no qual $(\vartheta)_\beta = (x_1, \dots, x_n)$

Exercício: β_1 uma base de E e $A_1 \in M_{n\times n}$ a matriz associada a T em função de β_1. Definimos

$p_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I)$ polinômio característico de T

Seja β_2 uma outra base de E e $A_2 \in M_{n\times n}$ a matriz associada a T em função de β_2. Mostre que $p_{A_1}(\lambda) = p_{A_2}(\lambda)$

isto é $\det(A_1 - \lambda I) = \det(A_2 - \lambda I)$.

↳ O exercício demonstra que o polinômio característico independe da matriz (base fixada) associada a T.

Voltando a demonstração.

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ de ordem n ímpar

$\Rightarrow p_A(\lambda)$ possui ao menos uma raiz real ← Teorema Fundamental da Álgebra.
digamos λ_1.

$\therefore \exists\ \vartheta \neq 0$ tal que
$T\vartheta = \lambda_1 . \vartheta$ Logo T possui um autovetor ϑ

$\therefore S = \langle \vartheta \rangle$ é um subespaço invariante.

spiral

/ /

Para a segunda parte vamos precisar do seguinte Lema:

Lema: Seja $T: E \to E$ um operador linear que não admite subespaço de dim 1 (ou seja, T não possui autovetores) então T

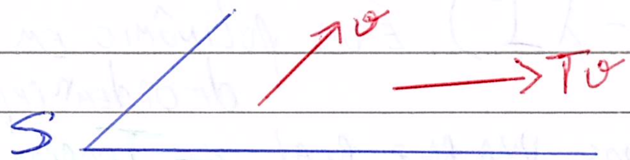
admite um subespaço de dim 2 $\iff$ existe um polinômio mônico irredutível p de grau 2 tal que $p(T)$ não seja invertível.

$p(x) = x^2 + ax + b$ que não pode ser reescrito da forma $(x-c).(x-d)$ p/ $c, d \in \mathbb{R}$.

dem.

($\Rightarrow$) Seja S um subespaço invariante de dim 2. Então dado $v \in S$ temos

$T(v) \in S$ mas $T(v)$ não é multiplo de v (T não possui autovetores)



Logo $\{v, Tv\}$ é uma base para S. Então

$T^2(v) = T(\underbrace{T(v)}_{\in S}) \in S$ Logo

$T^2(v) = \alpha v + \beta . T(v)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dessa forma

$$T^2(v) - \beta T(v) - \alpha(v) = 0 \quad \Updownarrow$$

$$(\underbrace{T^2 - \beta T - \alpha I}_{p(T)})(v) = 0 \quad \therefore p(T) \text{ é não invertível.}$$

Seja $p(x) = x^2 - \beta x - \alpha$ então $p(x)$ é um polinômio de grau 2, mônico e além disso $p(x)$ é irredutível pois

$p(x) = (x-c).(x-d)$ então

$$0 = p(T)(v) = (T-cI)\circ(T-dI)(v) \implies$$

(i) $(T-dI)(v) = 0$

(ii) $(T-dI)(v) = w \neq 0$ e $(T-cI)(w) = 0$

No caso (i) temos $(T-dI)(v) = 0 \iff Tv = dv$ impossível!

No caso (ii) temos $w \neq 0$ tal que $(T-cI)(w) = 0$
$\iff Tw = cw$ impossível (T não possui autovetores)

$\therefore$ $p(x)$ é irredutível

($\Leftarrow$) Seja $p(x) = x^2 - \beta x - \alpha$ um pol. mônico irredutível de grau 2 tal que $p(T)$ não seja invertível. Então $\exists\, v \neq 0$ tal que

$$(T^2 - \beta T - \alpha I)(v) = 0$$

Seja $S = \langle v; T(v) \rangle$ então S é um subespaço de dim 2
$\hookrightarrow$ gerado por v, Tv

Note que $\{v, T(v)\}$ são L.I. uma vez que T não possui autovetores. Para demonstrar que S é invariante basta demonstrar que $Tv, T^2(v) \in S$. De fato,

- $T(v) \in S$, por definição
- $T^2(v) = \alpha v + \underbrace{\beta . T(v)}_{C.L.} \in S$

Antes de retomar a demonstração da proposição vamos definir alguns ingredientes:

$$V \doteq \{ T : E \to E \text{ operadores lineares} \}$$

Definimos em V as seguintes operações:

$$+ : V \times V \longmapsto V \qquad \text{(soma de funções)}$$
$$(T_1, T_2) \longmapsto (T_1 + T_2)$$

definido por

$$(T_1 + T_2) v \doteq T_1 v + T_2 v$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longmapsto V \qquad \text{(mult. por um escalar)}$$
$$(\lambda, T) \longmapsto (\lambda T)$$

definido por

$$(\lambda T) v = \lambda [T(v)].$$

Exercício: $T_1, T_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (T_1 + T_2), (\lambda T_1) \in V$ isto é são transf. lineares

Exercício 2: mostre que $(V, +, \cdot)$ é um esp. vetorial.

Fixe β uma base de E.

Sabemos que ~~cada~~ para cada $T \in V$ existe (única) $M \in M_{n \times n}$ tal que

$$\underbrace{V \qquad \overset{\Gamma}{\text{isomorfismo.}} \qquad M_{n\times n}(\mathbb{R})}$$

$T: E \to E$ transf. linear $\qquad\qquad M$

- bijeção
- $\Gamma(T_1 + \lambda T_2) = M_1 + \lambda M_2$

$T_1 + \lambda T_2$: $+$ soma de funções; λT_2 multip. por escalar.

$M_1 + \lambda M_2$: $+$ soma de matriz; λM_2 multi de nº por matriz.

Conclusão: $\dim V = \dim(M_{n\times n}(\mathbb{R})) = n^2$

Vamos voltar a proposição, relembrando: $T: E \to E$ um op. linear então existe um subespaço $F \subset E$ com dim 1 ou dim 2 que é invariante por T.

Considere $V = \{T: E \to E \text{ op. lineares}\} \Rightarrow \dim V = n^2$. Logo

$$\underbrace{\{I, T, T^2, \ldots, T^{n^2-1}, T^{n^2}\}}_{n^2+1} \text{ são L. D.}$$

Então existem $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2} \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$(*) \quad a_0 . I + a_1 . T + a_2 . T^2 + \ldots + a_{n^2-1} . T^{n^2-1} + a_{n^2} . T^{n^2} = 0$$

Seja $m = \{0, \ldots, n^2\}$ o maior índice tal que $a_m \neq 0$

/ /

Dividindo (*) por am, obtemos:

$$T^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} . T^{m-1} + \dots + \frac{a_0}{a_m} I = 0$$

Defina o polinômio $q(x) \doteq x^m + b_{m-1} . x^{m-1} + \dots + b_0$, no qual

$$b_i = \frac{a_i}{a_m}, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Então $q(T) = 0$.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra o polinômio q pode ser decomposto da forma

$$q = q_1 . q_2 . \dots . q_s$$

no qual q_i é um pol. mônico irred. de grau 1 ou 2.

(λ_i é raiz complexa $\Rightarrow \overline{\lambda_i}$ também é raiz. Logo $(x-\lambda).(x-\overline{\lambda})$ divide $q(x)$; $q_i(x) = (x-\lambda_i).(x-\overline{\lambda_i})$ é um pol. mônico irred. de grau 2).

$$x^2 - x . (\underbrace{\lambda_i + \overline{\lambda_i}}_{\text{REAL}}) + \lambda_i \overline{\lambda_i} = \underbrace{|\lambda_i|^2}_{\text{REAL}}.$$

Logo

$$0 = q(T) = q_1(T) . q_2(T) . \dots q_s(T)$$

$\Rightarrow q_i(T) w \neq 0$ para algum i e $w \neq 0$

$\therefore q_i(T)$ não é invertível.

spiral