Autovetores: diagonalização.

Def.: Um operador linear $T: E \to E$ é diagonalizável se existe uma base de E formada por autovetores de T

A razão da nomenclatura é que a matriz de T em relação à base formada pelos autovetores é diagonal. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de autovetores de T em E, então

$$T v_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0\, v_2 + \dots + 0 . v_n$$
$$T v_2 = \lambda_2 v_2 = 0 . v_1 + \lambda_2 . v_2 + \dots + 0 . v_n$$
$$\vdots$$
$$T v_n = \lambda_n v_n = 0 . v_1 + 0 . v_2 + \dots + \lambda_n . v_n$$

Logo $v = x_1 . v_1 + x_2 . v_2 + \dots + x_n v_n$ temos

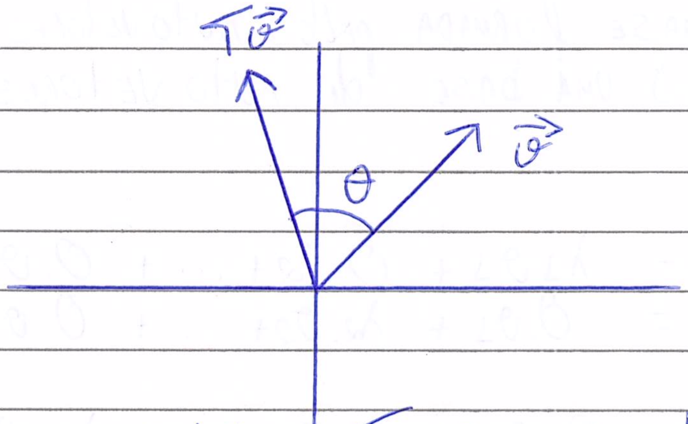
$$Tv = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ Tv_1 & Tv_2 & & Tv_n \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Um operador em geral pode não ser diagonalizável

Exemplo 1: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

T corresponde a rotação de um angulo θ em torno da origem no sentido anti horário.



Logo para $\theta \neq 0$ T não possui autovetores! (arg. geométrico)

Exemplo: $\theta = 30°$

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vamos calcular $p_A(\lambda)$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 - \lambda & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Assim,

$$p_A(\lambda) \doteq \det(A-\lambda I) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-2\lambda)^2+1}{4}$$

$\Rightarrow p_A(\lambda)$ NÃO possui λ RAÍZES REAIS!

Exemplo 2: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x+\beta . y, y)$ para $\beta \neq 0$. Então

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \beta \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ é raiz de $p_A(\lambda)$ com multiplicidade 2.

Vamos encontrar os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$. Seja $\vec{v} \neq 0$ tal que

$$T v = 1 . v \Leftrightarrow Tv - Iv = 0$$

$$\Leftrightarrow (T - 1.I)v = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & \beta \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p/\ v = (x,y)$$

$$\Rightarrow \beta . y = 0 \underset{\beta \neq 0}{\therefore} y = 0.$$

Assim $v=(x,y)\neq(0,0)$ autovetor associado a $\lambda=1$ é tal que $y=0$ $\therefore$

$$E_{\lambda=1}=\{v=(x,0)=x.(1,0)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow \dim E_1 = 1$ $\therefore$ não gera uma base para $\mathbb{R}^2$.

$\therefore$ T não é diagonalizável.

Exemplo 3: Seja $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z)=(x+2y+z,\ 2y-z,\ 2z)$$

Em relação a base canônica a matriz que representa o operador T é dado por

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\ ;\quad \begin{matrix}T(1,0,0)=(1,0,0)\\T(0,1,0)=(2,2,0)\\T(0,0,1)=(1,-1,2).\end{matrix}$$

Calculando $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(1-\lambda).(1-\lambda)^2$

$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ são os autovalores.

Determinação dos auto-espaços

- $E_{\lambda_1}=?$ $\lambda_1=1$

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ portanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = 0 = z.$$

Logo $v = (x, 0, 0)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ é autovetor assoc. a $\lambda_1 = 1$.

E_1 = gerado por $\{(1,0,0)\}$

• $E_{\lambda_2} = ?$ $\lambda_2 = 2$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{portanto} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo $v = (2y, y, 0)$, $\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$ é a família de autovetores ass. a $\lambda_2 = 2$.

E_2 = gerado por $\{(2,1,0)\}$

Conclusão: T não é diagonalizável.

Próximo resultado: autovetores associados a autovalores distintos são sempre L.I.

Proposição: Seja $T: E \to E$ um op. linear ($\dim E = n$). Se $T(v_1) = \lambda_1 . v_1, \ldots, T(v_m) = \lambda_m v_m$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$

são dois a dois distintos então $\{v_1, \dots, v_m\}$ é L.I.

dem.: Vamos utilizar demonstração por indução. Claramente a proposição é verdadeira para $m=1$. Suponhamos que a afirmação seja válida para $m=K$. Vamos mostrar que a afirmação também é verdadeira p/ $m=K+1$.

Suponhamos $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{K+1} v_{K+1} = 0$ (I). Queremos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{K+1} = 0$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{K+1} \cdot v_{K+1} = 0 \quad T$$
$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{K+1} v_{K+1}) = T(0)$$
$$\alpha_1 \cdot T v_1 + \dots + \alpha_{K+1} T v_{K+1} = 0 \quad T \text{ linear}$$
$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_{K+1} \cdot \lambda_{K+1} \cdot v_{K+1} = 0 \quad T v_j = \lambda_j v_j$$

Assim multiplicando a eq. (I) por λ_{K+1} temos

$$\alpha_1 \lambda_{K+1} v_1 + \dots + \alpha_K \lambda_{K+1} v_K + \alpha_{K+1} \cdot \lambda_{K+1} v_{K+1} = 0$$
$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_K \lambda_K v_K + \alpha_{K+1} \cdot \lambda_{K+1} \cdot v_{K+1} = 0$$

Subtraindo temos

$$\underbrace{(\lambda_{K+1} - \lambda_1)}\cdot \alpha_1 v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_{K+1} - \lambda_K)} \alpha_K v_K = 0$$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_K v_K = 0$$

$\Rightarrow$ Hipótese de indução $\quad \beta_i = (\lambda_{K+1} - \lambda_i) \cdot \alpha_i = 0 \quad$ p/ $i = 1, \dots, K$.

Mas $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$ p/ $i = 1 = 1, \ldots, k$

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ p/ $i = 1, \ldots, k$.

Portanto $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} = 0$

$$\Downarrow$$

$$0 \cdot v_1 + \ldots + 0 v_k + \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

Conclusão: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$ ■

Corolário: Se $T: E \to E$ é um op. linear ($\dim E = n$) que admite n autovalores distintos então T é diagonalizável.

Mas $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$ p/ $i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ p/ $i = 1, \dots, k$

Portanto $\alpha_1 0 + \dots + \alpha_k 0 + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$

$\Downarrow$

$0 v_1 + \dots + 0 v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$

$\Updownarrow$

$\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$

Conclusão: $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$

Conclusão: Se $T: E \to E$ é um op. linear ($\dim E = n$) que admite n autovalores distintos então T é diagonalizável.