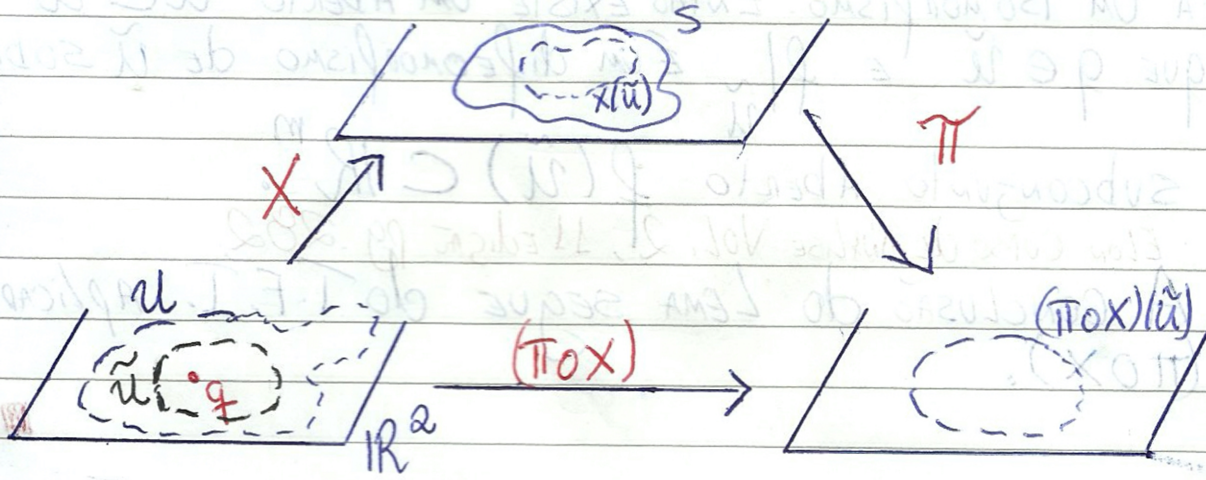
Superfícies regulares – parte II

Objetivo: Vamos provar que toda superfície regular é localmente um gráfico.

Lema: Seja S uma superfície regular e $X: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma aplicação diferenciável tal que $dX(q)$ é injetiva. Então existe uma projeção π sobre um plano tal que $\pi \circ X$ é um difeomorfismo de um aberto $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ contendo q em $\tilde{\mathcal{U}}$ no aberto $(\pi \circ X)(\tilde{\mathcal{U}})$.



dem.:

Seja $E \doteq dX(q)(\mathbb{R}^2)$ que é um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem. Sem perda de generalidade podemos supor que o vetor e_3 da base canônica em $\mathbb{R}^3$ não pertence a E.

Considere $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção
$$\pi(x,y,z) = (x,y)$$
Então $\pi(E) = \mathbb{R}^2$. Agora

$\pi \circ X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é tal que

$$d(\pi \circ X)(q)(v) = d\pi(X(q))[dX(q) \cdot v]$$

$$= \pi[dX(q)v]$$

$$\Rightarrow d(\pi \circ X)(q)[\mathbb{R}^2] = \pi[E] = \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ $d(\pi \circ X)(q)$ é um isomorfismo

Teorema da Função Inversa: Seja $f: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável tal que $df(q): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seja um isomorfismo. Então existe um aberto $\tilde{U} \subset U$ tal que $q \in \tilde{U}$ e $f|_{\tilde{U}}$ é um difeomorfismo de $\tilde{U}$ sobre um subconjunto aberto $f(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^m$.

Ref.: Elon Curso de Análise Vol. 2, 11 edição pg. 282

A conclusão do Lema segue do T.F.I. aplicado a $(\pi \circ X)$.

$\blacksquare$

Proposição: Toda superfície regular S é localmente um gráfico isto é $\forall\, p \in S$ existe $W \subset \mathbb{R}^3$ aberto com $p \in W$ tal que $W \cap S$ é o gráfico de uma aplicação diferenciável $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

dem.: Sejam $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização de S com $p \in X(U)$ e $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma projeção como dada pelo Lema anterior.

Defina $Y = X \circ (\pi \circ X|_{\tilde{U}})^{-1}$ que é dif.

Então $Y: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\pi \circ Y = \pi \circ X \circ \left(\pi \circ X|_{\tilde{U}}\right)^{-1} = Id \text{ em } \tilde{U}$$

$\Rightarrow$

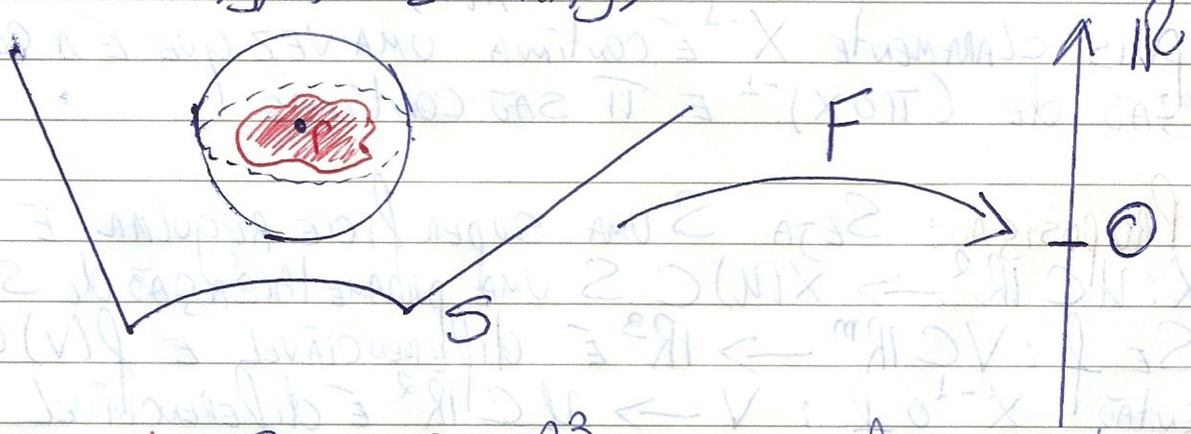
$Y(u,v) = (u, v, h(u,v))$ para alguma h diferenciável.

Note que $W \doteq X(\tilde{U})$ é uma vizinhança aberta de p ∎

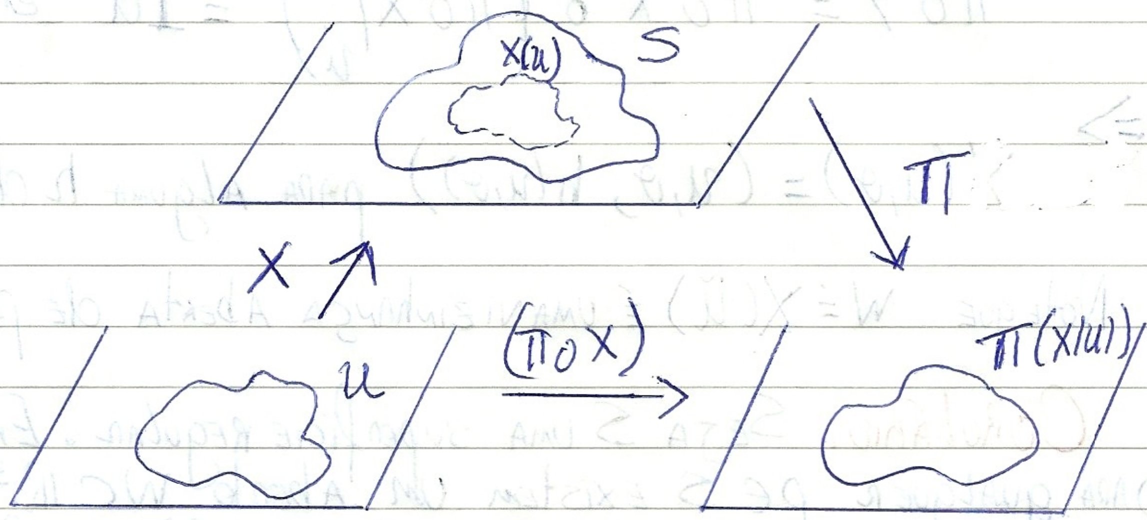
Corolário: Seja S uma superfície regular. Então para qualquer $p \in S$ existem um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ contendo p e uma aplicação $F: W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dif. tal que
$$\begin{cases} \nabla F(q) \neq 0, \ \forall q \in W \\ W \cap S = \{q \in W \text{ tal que } F(q) = 0\} \\ \qquad = F^{-1}\{0\}. \end{cases}$$

dem.: Seja h dada pela proposição anterior. Defina

$$F(x,y,z) = z - h(x,y)$$



Proposição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U) \subset S$ uma aplicação bijetiva satisfazendo a condições (i) e (iii) da def. de uma parametrização. Então a condição (ii) é automaticamente satisfeita



dem.: Como consequência do Lema inicial, reduzindo U se necessário temos que

$$\pi \circ X : U \longrightarrow \pi(X(U))$$

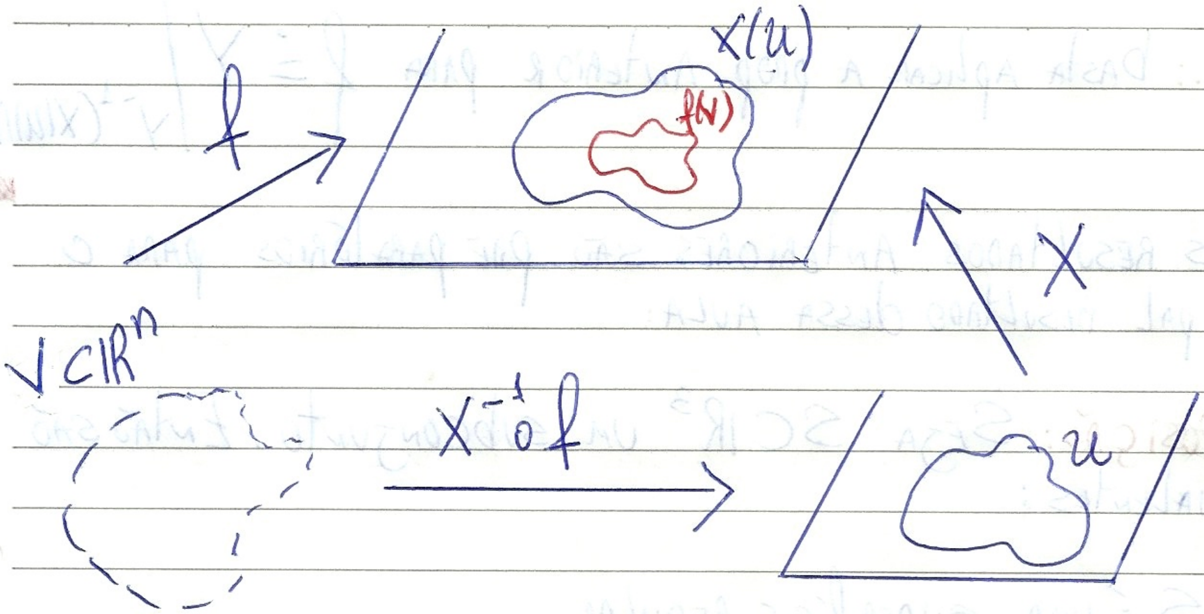
é um difeomorfismo. Então

$$X^{-1} = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi \Big|_{X(U)}$$

e claramente X^{-1} é contínua uma vez que é a composição de $(\pi \circ X)^{-1}$ e π são contínuas.

Proposição: Seja S uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow X(U) \subset S$ uma parametrização de S. Se $f : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável e $f(V) \subset X(U)$ então $X^{-1} \circ f : V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ é diferenciável.

dem.:

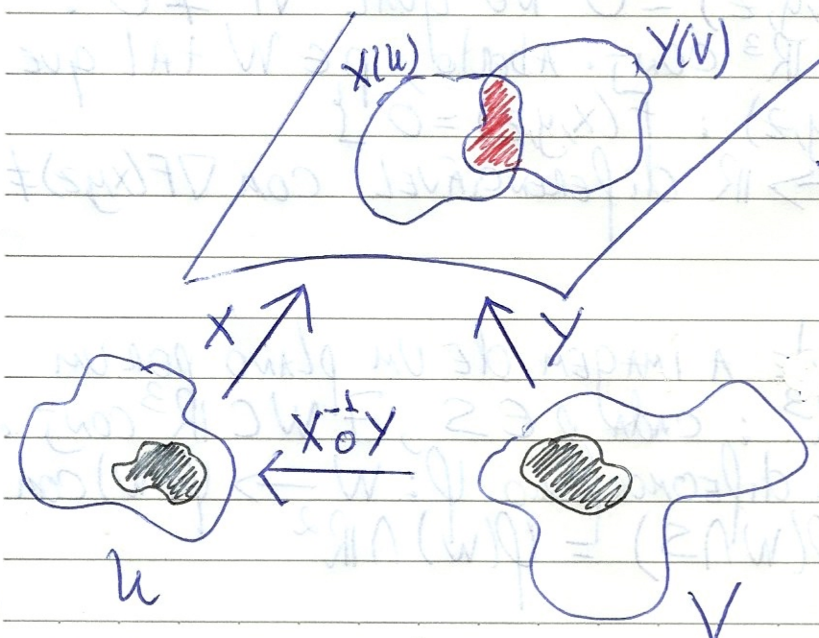


Seja π dada pelo Lema e $X^{-1} \doteq (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi|_{X(U)}$ restringindo U se necessário

$\Rightarrow X^{-1} \circ f$ é a composição de aplicações dif. ■

Corolário: Seja S uma superfície regular e $X: U \to X(U) \subset S$ e $Y: V \to Y(V) \subset S$ parametrizações de S tais que

$$X(U) \cap Y(V) \neq \emptyset$$



Então

$$X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \to X^{-1}(X(U) \cap Y(V))$$

é um difeomorfismo.

dem.: Basta aplicar a prop. anterior para $f \doteq Y|_{Y^{-1}(X(U) \cap Y(V))}$ ∎

Os resultados anteriores são preparatórios para o principal resultado dessa aula:

Proposição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto. Então são equivalentes:

(i) S é uma superfície regular

(ii) S é localmente o gráfico de uma função diferenciável: cada $p \in S$, $\exists\, W \subset \mathbb{R}^3$ conj. aberto, $p \in W$ tal que

$$W \cap S = \{(x,y,z) : h(x,y) = z,\ (x,y) \in U\}$$

para alguma $h: U \to \mathbb{R}$ diferenciável.

(iii) S é localmente dada implicitamente por uma equação do tipo $F(x,y,z) = 0$ no qual $\nabla F \neq 0$: cada $p \in S$, $\exists\, W \subset \mathbb{R}^3$ conj. aberto, $p \in W$ tal que

$$W \cap S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$$

para alguma $F: W \to \mathbb{R}$ diferenciável com $\nabla F(x,y,z) \neq 0$ $\forall (x,y,z) \in W$

(iv) S é localmente a imagem de um plano por um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$: cada $p \in S$, $\exists\, W \subset \mathbb{R}^3$ conj. aberto, $p \in W$ e um difeomorfismo $\varphi: W \to \varphi(W)$ com $0 \in \varphi(W)$ tal que $\varphi(W \cap S) = \varphi(W) \cap \mathbb{R}^2$

dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ok!

(iii) $\Rightarrow$ (iv) dado $p \in S$ sejam $W \subset \mathbb{R}^3$ aberto com $p \in W$ e $F(x,y,z)$ dada por (iii). Como $\nabla F \neq 0$ sem perda de generalidade podemos supor $F_x(p) \neq 0$. Defina

$$\varphi : W \to \varphi(W) \text{ dada por } \varphi(x,y,z) = (F(x,y,z), y, z)$$

$$\Rightarrow J\varphi(p) = \begin{pmatrix} F_x(p) & F_y(p) & F_z(p) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $d\varphi(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um isomorfismo ($\det d\varphi(p) = F_x(p) \neq 0$) portanto restringindo W se necessário φ é um difeomorfismo de W em $\varphi(W)$ pelo T.F.I.

Além disso

$$(x,y,z) \in S \cap W \iff F(x,y,z) = 0 \iff \varphi(x,y,z) \in \varphi(W) \cap \boxed{\{0\} \times \mathbb{R}^2} \cong \varphi(W) \cap \mathbb{R}^2$$

$$\therefore \varphi(W \cap S) = \varphi(W) \cap \mathbb{R}^2$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) basta tomar $X : \varphi^{-1} : \varphi(W) \cap \mathbb{R}^2 \to W \cap S$ como uma parametrização de S ∎

Exemplo: A esfera $S(p_0, r) \doteq \{ \|X - p_0\|^2 = r^2 \}$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $r > 0$ pode ser escrita como

$$S(p_0, r) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0 \} \text{ no qual}$$

$$F(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2$$

Note que

$$\nabla F(x,y,z) = (2.(x-x_0), 2(y-y_0), 2.(z-z_0)) \neq (0,0,0)$$

$\forall (x,y,z) \in S$ pois $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin S$. Aqui

$W \doteq \mathbb{R}^3 - \{p_0\}$ é um conj. aberto e $F: W \to \mathbb{R}$.

Exemplos adicionais: Página 38 - 43, Exemplo 18: Cone menos o vértice, Exemplo 19: quádricas, Exemplo 21: Helicóide; Exemplo 22: Superfícies regradas da bibliografia Introd. a Geo. Dif de Ronaldo F. de Lima.