Teorema dos valores singulares

E, F espaços vetoriais de dimensão finita munidos de um produto interno. Seja $T: E \to F$ uma transformação linear.

Vimos na aula anterior que

- $T^*T: E \to E$
- $TT^*: F \to F$

são ambos operadores não negativos e além disso

$$\text{posto}(T) = \text{posto}(T^*T) = \text{posto}(TT^*) = \text{posto}\, T^*$$

obs.: $\text{posto}(T) \doteq \dim(\text{Im}\,T)$ $\Longleftrightarrow$ A é a matriz de T em relação a uma base de E e em relação a uma base de F fixadas então $\text{posto}(T) = \text{posto}(A) = \#$ colunas de A linearmente indep.

Corolário: $T: E \to F$ é injetiva $\Longleftrightarrow$ T^*T é invertível
e além disso $T: E \to F$ é sobrejetora $\Longleftrightarrow$ TT^* é invertível.

dem.: T é injetiva $\Longleftrightarrow N(T) = 0 \overset{\text{teo núcleo/imagem}}{\Longleftrightarrow} \dim E = \dim \text{Im}\,T$

$$= \text{posto}\, T$$

$$\Longleftrightarrow \dim E = \text{posto}(T^*T)$$

Logo

T é injetiva $\Longleftrightarrow \dim E = \dim \text{Im}(T^*T)$

$\Longleftrightarrow T^*T$ é invertível.

T é sobrejetiva $\Longleftrightarrow \dim \text{Im}\,T = \dim F$

$\Longleftrightarrow \dim \text{Im}\,TT^* = \dim F$ $\updownarrow$ teo núcleo/imagem

$\Longleftrightarrow N(TT^*) = 0$

$\Longleftrightarrow TT^*$ é invertível ∎

/ /

A seguir apresentamos uma extensão do teorema espectral para uma transformação linear qualquer.

Teo dos valores singulares: Seja $T: E \to F$ uma transformação linear tal que posto$(T) = r$. Então existem bases ortonormais $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E e $\{v_1, \dots, v_m\}$ de F tais que
$$\begin{cases} T u_i = \sigma_i v_i \\ T^* v_i = \sigma_i u_i \end{cases} \text{ com } \sigma_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots, r$$
e
$$\begin{cases} T u_i = 0 \\ T^* v_i = 0 \end{cases}, \text{ se } i > r$$

Antes de apresentar a demonstração vamos explorar um exemplo. Considere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y,z) = (x+z, y) \iff T(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A \in M_{2\times 3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ posto $T = 2$. Agora observe que

$T^*T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ possui posto 2

$\hookrightarrow$ é um operador não negativo

A matriz que representa T^*T é dada por

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ de fato posto = 2.

Vamos calcular os autovalores de $T^{*}T$.

$$p(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\\ 1 & 0\end{matrix}\right|$$

$$=(1-\lambda)^3-(1-\lambda)=(1-\lambda).\left[(1-\lambda)^2-1\right]$$

$$=(1-\lambda).(2-\lambda).(-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda_3=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_1=2$ autovalores $\geqslant 0$.

Vamos calcular os autoespaços associados

- E_{λ_3} com $\lambda_3=0$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=-x\\ y=0\end{cases}$$

$u_3\in E_{\lambda_3} \Leftrightarrow u_3=(x,0,-x)=x.(1,0,-1),\ \forall x\neq 0.$

$\therefore\ E_{\lambda_3}=\langle u_3\rangle$, no qual $u_3=\dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$

- E_{λ_2} com $\lambda_2=1$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ x=0\end{cases}$$

$u\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow u=(0,y,0)=y.(0,1,0),\ \forall y\neq 0.$

$\therefore E_{\lambda_2} = \langle u_2 \rangle$, no qual $u_2 = (0,1,0)$

- E_{λ_1} com $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$u \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow u = (x, 0, x) = x.(1,0,1)$, $x \neq 0$

$\therefore E_{\lambda_1} = \langle u_1 \rangle$, no qual $u_1 = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$

Claramente $\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{(1,0,+1)}{\sqrt{2}} ; (0,1,0) ; \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} \right\}$ determina uma base ortonormal de autovetores em $\mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{cases} T^*Tu_i = \lambda_i u_i , & i = 1, 2 \\ T^*Tu_i = 0 , & i = 3 \end{cases}$$

Agora $\langle Tu_j, Tu_i \rangle = \langle u_j, T^*Tu_i \rangle$

$= \langle u_j, \lambda_i u_i \rangle$

$= \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle$ (base ortonormal)

$= \lambda_i . \delta_{ij}$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow \|Tu_i\|^2 = \lambda_i$ e $\{Tu_1, Tu_2\}$ são ortogonais

$\Rightarrow \|Tu_i\| = \sqrt{\lambda_i} \doteq \sigma_i$ para $i = 1, 2$.

Tendo como inspiração esse exemplo vamos a demonstração do teorema.

demonstração: Considere o operador linear $A \doteq T^*T : E \to E$.
Vimos que A é um operador auto-adjunto não negativo tal que posto$A$ = posto (T^*T) = posto $T = r$. Então o teorema espectral aplicado a A implica que existe uma base ortonormal $\{u_1, .., u_n\}$ de E formada por autovetores de A

$$\begin{cases} A u_1 = \lambda_1 u_1 , & \lambda_1 = \sigma_1^2 \Leftrightarrow \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \\ A u_2 = \lambda_2 u_2 , & \lambda_2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \\ \vdots & \\ A u_r = \lambda_r u_r , & \lambda_r = \sigma_r^2 \Leftrightarrow \sigma_r = \sqrt{\lambda_r} \\ A u_i = 0 , & \forall \; r+1 \leq i \leq n , \text{ no qual } \sigma_1, .., \sigma_r > 0. \end{cases}$$

⊛

Além do mais,

$$\begin{aligned} \langle T u_i, T u_j \rangle &= \langle T^* T u_i, u_j \rangle \\ &= \langle A u_i, u_j \rangle \\ &= \langle \sigma_i^2 u_i, u_j \rangle \\ &= \sigma_i^2 . \langle u_i, u_j \rangle , \quad \forall \; i = 1, .., r \end{aligned}$$

e como $N(T) = N(T^*T)$, pois posto(T) = posto(T^*T), segue que
$T^*Tu_i = 0 \Rightarrow Tu_i = 0$ para $i = r+1, ..., n$.

Dessa forma $\{Tu_1, .., Tu_r\}$ são dois a dois ortogonais e $\| Tu_i \| = \sigma_i$ para $i = 1, .., r$ e $Tu_i = 0$ para $i = r+1, .., n$.

Definamos $v_i \doteq \frac{1}{\sigma_i} T u_i$ para $i = 1, .., r$.

Claramente $\{v_1, .., v_r\}$ é uma base ortonormal para $\operatorname{Im} T$
Além do mais,
$$F = \operatorname{Im}(T) \oplus N(T^*), \text{ pois } \operatorname{Im}(T)^{\perp} = N(T^*)$$

/ /

$\Rightarrow$ podemos completar F com uma base para $N(T^*)$ dada por $\{v_{r+1},..,v_m\}$ tal que $\{v_1,..,v_r,v_{r+1},..,v_m\}$ é uma base ortonormal de F. Então

- $Tu_i = \sigma_i v_i$ para $i=1,..,r$ (pela def. de v_i)
- $Tu_i = 0$ para $i=r+1,..,n$
- $T^*v_i = 0$ para $i=r+1,..,n$ (pois $v_i \in N(T^*)$)

Agora para $i=1,..,r$ temos

$$T^*v_i = \langle T^*v_i, u_1\rangle . u_1 + \dots + \langle T^*v_i, u_r\rangle . u_r + \cancel{\langle T^*v_i, u_{r+1}\rangle} . u_{r+1} + \dots + \cancel{\langle T^*v_i, u_n\rangle} . u_n$$

$$= \sigma_i u_i \text{ para } i=1,..,r.$$

$\boxed{\sigma_i^2 = \lambda_i}$

pois

- $j, i=1,..,r$ temos $\langle T^*v_i, u_j\rangle = \underline{\sigma_i^{-1}}\langle T^*Tu_i, u_j\rangle = \underline{\lambda_i}\langle u_i,u_j\rangle = \sigma_i.\langle u_i,u_j\rangle$
- $i=1,..,r$ e $j=r+1,..,n$ temos $\langle T^*v_i, u_j\rangle = \langle v_i, Tu_j\rangle_2 = \sigma_i^{-1}\langle u_i, T^*Tu_j\rangle \underline{\sigma_i} = 0$ pois $Au_j=0$ ⊛

Aplicação: Considere a cônica em $\mathbb{R}^2$ cuja equação é dada por

$$4x^2 + 2xy + 2y^2 = 1.$$

(a) identifique os eixos de simetria da cônica
(b) determine o tipo da cônica
(c) encontre sua equação em relação ao sist. de coordenadas cujos eixos coord. são os eixos de simetria.

Sol. Considere $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o op. linear cuja matriz na base canônica é A. Então

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4x+y, x+2y)$$

Note que

$$\begin{aligned} \langle T(x,y),(x,y) \rangle &= \langle (4x+y, x+2y), (x,y) \rangle \\ &= x.(4x+y) + y.(x+2y) \\ &= 4x^2 + xy + yx + 2y^2 \\ &= 4x^2 + 2xy + 2y^2 \doteq q(x,y) \end{aligned}$$

Sabemos que T é um operador não-negativo $\overset{\text{teo espect.}}{\Longrightarrow}$ existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada pelos autovetores T associada aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Seja $\{v_1, v_2\}$ a base em questão. Então

$v = (x,y) = x'v_1 + y'v_2$ (mudança de base) segue

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \langle T(x,y), (x,y) \rangle \\ &= \langle T(x'v_1 + y'v_2), x'v_1 + y'v_2 \rangle \\ &= \langle x'.Tv_1 + y'Tv_2, x'v_1 + y'v_2 \rangle \\ &= \langle x'\lambda_1 v_1 + y'.\lambda_2 v_2, x'v_1 + y'v_2 \rangle \\ &= \lambda_1.(x')^2 + \lambda_2 (y')^2 \end{aligned}$$

Assim a cônica em rel. ao sist. de coord cujo eixos coordenados são os vetores v_1 e v_2 é dado por

$$\lambda_1.(x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 1 \iff \left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

no qual $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.

Vamos encontrar v_1 e v_2.

$$p_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix}4-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (4-\lambda).(2-\lambda)-1 = \lambda^2-6\lambda+7$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\underbrace{+6\pm\sqrt{36-28}}}{2} = 3\pm\sqrt{2} \quad \therefore \quad \lambda_1 = 3+\sqrt{2}$$
$$\lambda_2 = 3-\sqrt{2}$$

- E_{λ_1}, $\lambda_1 = 3+\sqrt{2}$

$$v \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4-(3+\sqrt{2}) & 1\\ 1 & 2-(3+\sqrt{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x+(-1-\sqrt{2})y = 0 \Leftrightarrow x = (1+\sqrt{2})y.$$

$E_{\lambda_1} = \langle v_1 \rangle$, NO QUAL $v_1 = \dfrac{(1+\sqrt{2},1)}{\|(1+\sqrt{2},1)\|}$

- E_{λ_2}, $\lambda_2 = 3-\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4-(3-\sqrt{2}) & 1\\ 1 & 2-(3-\sqrt{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x+(-1+\sqrt{2})y = 0 \Leftrightarrow x = (1-\sqrt{2})y$$

$E_{\lambda_2} = \langle v_2 \rangle$, NO QUAL $v_2 = \dfrac{(1-\sqrt{2},1)}{\|(1-\sqrt{2},1)\|}$

Obs.: Note que $\langle(1+\sqrt{2},1),(1-\sqrt{2},1)\rangle = (1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})+1 = 1-2+1 = 0$

$a \approx 0{,}48$
$b \approx 0{,}80$