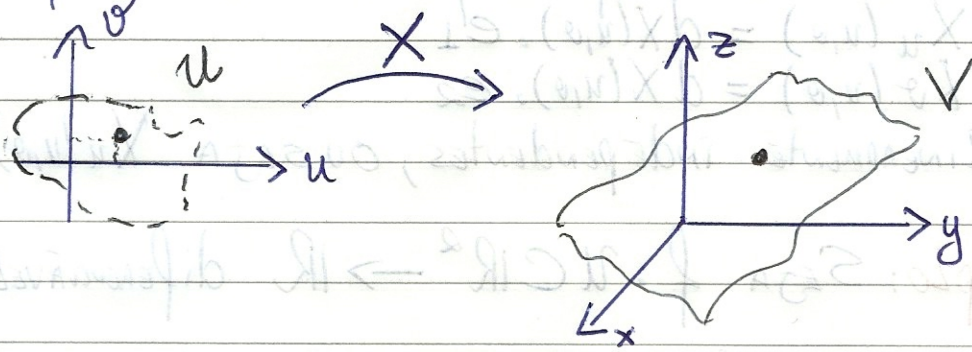
Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$

Uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^3$ definida em um conjunto aberto U é uma parametrização do subconjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ se

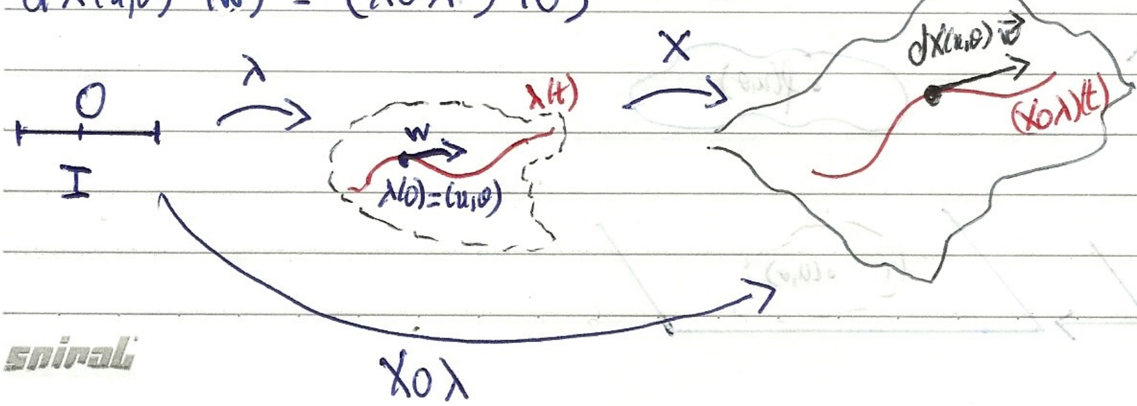
(i) X é diferenciável, ou seja, $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ no qual as funções coord. $x, y, z: U \to \mathbb{R}$ admitem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

(ii) $X: U \to V$ é um homeomorfismo, ou seja, X é uma bijeção cuja inversa $X^{-1}: V \to U$ é contínua.

(iii) A diferencial $dX(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetora $\forall (u,v) \in U$.



Observação: $\lambda: I \subset \mathbb{R} \to U$ é uma curva diferenciável em U tal que $0 \in I$, $\lambda(0) = (u,v)$ e $\lambda'(0) = \vec{w}$ então $dX(u,v)(\vec{w}) = (X \circ \lambda)'(0)$



De fato considere $\lambda(t) \doteq (u,v) + t.e_1 = (u+t, v)$

$$\Rightarrow (X \circ \lambda)'(0) = dX(u,v)(\lambda'(0)) = \frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \right)$$

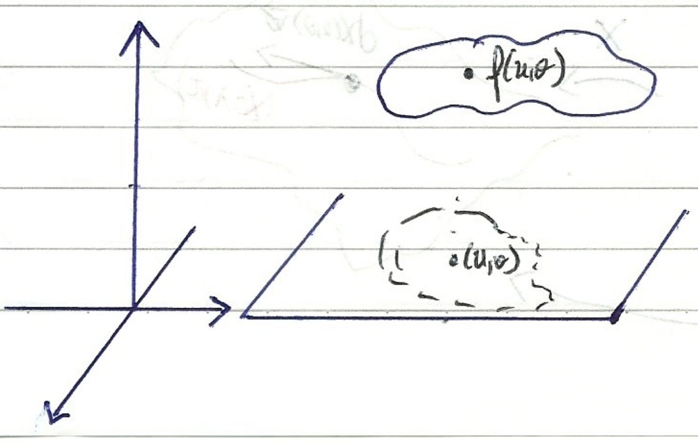
Assim $dX(u,v)(e_1) = \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \doteq X_u(u,v)$

Analog. $dX(u,v)e_2 = \frac{dX}{dv}(u,v) = X_v(u,v)$ (associada a curva
$\lambda(t) = (u,v) + t.e_2 = (u, v+t)$)

obs. 2: Verificar que $dX(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva é equivalente a verificar que os vetores
$X_u(u,v) = dX(u,v).e_1$
$X_v(u,v) = dX(u,v).e_2$
são linearmente independentes, ou seja $X_u(u,v) \times X_v(u,v) \neq 0$

Exemplo: Seja $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Considere
$X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ dado por $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$

Então $V \doteq X(\mathcal{U})$ é o gráfico de f.



Afirmação: X é uma parametrização de V

(i) X é dif. pois cada uma de suas componentes

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$ são diferenciáveis.

(ii) Considere $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x,y,z) = (x,y)$.
Então

$(\pi \circ X) = id : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \Rightarrow X^{-1}$ possui inv. a esquerda

Note que $\pi(u,v,f(u,v)) = (u,v)$, $\forall (u,v) \in \mathcal{U}$.
Portanto $X^{-1} = \pi|_V : V \to \mathcal{U}$

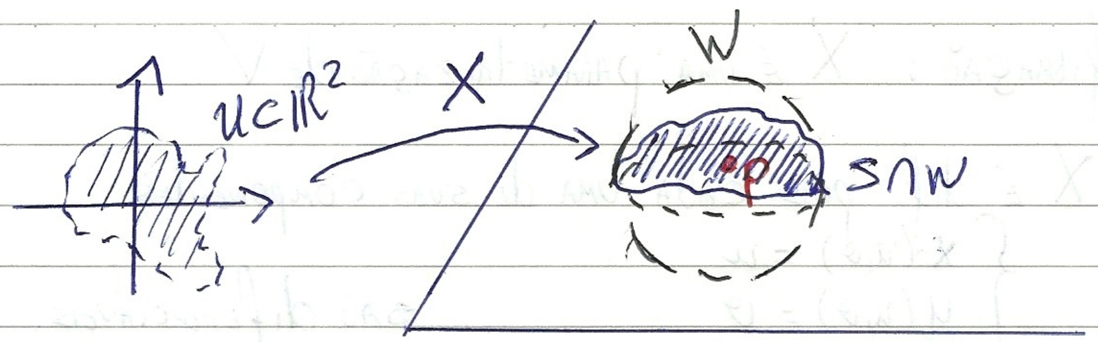
(iii) $$X_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)$$
$$X_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$$ $, \forall (u,v) \in \mathcal{U}$

são claramente L.I. $\therefore$ $dX(u,v)$ é injetiva $\forall (u,v) \in \mathcal{U}$

Definição: Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada $p \in S$ existem subconjuntos abertos $W \subset \mathbb{R}^3$, $p \in W$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ e uma parametrização

$$X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow W \cap S,$$ isto é

localmente S é a imagem de uma parametrização.



Exemplo 1: O gráfico de uma função diferenciável $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma superfície regular.

De fato, $Gra(f) = \{(u, v, f(u,v)) : \forall (u,v) \in U)$
$= X(U)$

portanto $Gra(f)$ pode ser coberto por uma única parametrização $X: U \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$X(u,v) = (u, v, f(u,v)).$$

Exemplo 2: $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ é uma superfície regular

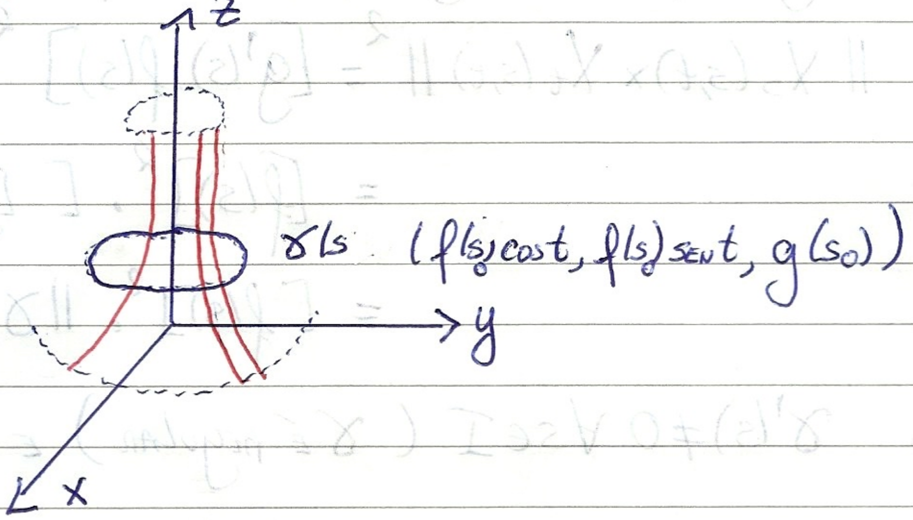
De fato o conjunto S^2 pode ser coberto pela imagem de 6 parametrizações como gráfico de aplica-ções.

Exercício: Liste as 6 parametrizações.

Ex: $X(x,y) = (x, y, \pm\sqrt{1-(x^2+y^2)})$, $(x,y) \in U \doteq x^2+y^2<1$

parametriza calota superior e inferior s/ o equador.

Superfícies de Revolução



Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(s) = (f(s), g(s))$, $f(s) > 0$ $\forall s \in I$, γ diferenciável, γ homeomorfismo sobre $\gamma(I)$ e γ regular.

Defina

$$X : I \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$$
$$X(s,t) = (f(s).\cos t,\ f(s).\text{sen}\, t,\ g(s))$$

Afirmação: X é uma parametrização

(i) X é dif. pois cada função coord. é dif. (produto de funções dif.)

(iii)
$$X_s(s,t) = (f'(s).\cos t,\ f'(s).\text{sen}\, t,\ g'(s))$$
$$X_t(s,t) = (-f(s).\text{sen}\, t,\ f(s).\cos t,\ 0)$$

$$X_s(s,t) \times X_t(s,t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'(s).\cos t & f'(s).\text{sen}\, t & g'(s) \\ -f(s).\text{sen}\, t & f(s).\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-g'(s) f(s) \cos t, g'(s) f(s) \operatorname{sen} t, f(s). f'(s))$

$\Rightarrow \| X_s(s,t) \times X_t(s,t) \|^2 = [g'(s). f(s)]^2 + [f(s). f'(s)]^2$

$= [f(s)]^2 . [[g'(s)]^2 + [f'(s)]^2]$

$= [f(s)]^2 . \| \gamma'(s) \|^2 \neq 0$

pois $\gamma'(s) \neq 0 \; \forall s \in I$ (γ é regular) e $f(s) > 0$.

(ii) Escrevendo

$$\begin{cases} x(s,t) = f(s). \cos t \\ y(s,t) = f(s). \operatorname{sen} t \\ z(s,t) = g(s) \end{cases} \Rightarrow f(s) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\therefore \gamma(s) = (f(s), g(s)) = (\sqrt{x^2+y^2}, z)$

$\Rightarrow s = \gamma^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, z)$ (γ é um homeomorfismo)

Agora

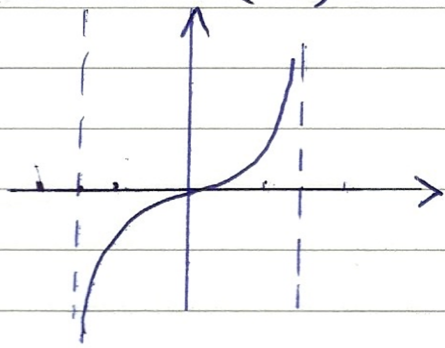
$$tg\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(t/2)}{\cos(t/2)} = \frac{2 \operatorname{sen}(t/2). \cos(t/2)}{2 [\cos(t/2)]^2} = \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$$

com

$\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{f}$ e $\cos t = \dfrac{x}{f}$

Conclusão: $tg\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{y}{f+x} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

Sabemos que $p(t) = tg\left(\frac{t}{2}\right)$ é um homeomorfismo de $]-\pi,\pi[$ em $\mathbb{R}$



Logo $t = p^{-1}\left(tg\left(\frac{t}{2}\right)\right) = p^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$

Conclusão: $X^{-1}(x,y,z) = (s,t)$; no qual

$$\left.\begin{array}{l} s = s(x,y,z) = \gamma^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) \\ t = t(x,y,z) = p^{-1}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right) \end{array}\right\} \text{são contínuas.}$$