Formas bilineares

$\dim E = n$

Def.: Uma função $f: E\times E \to \mathbb{R}$ é uma função bilinear (real) quando $\forall u_1, u_2, u_3 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

(i) $f(\alpha . u_1 + u_2, u_3) = \alpha f(u_1, u_3) + f(u_2, u_3)$

(ii) $f(u_1, \alpha u_2 + u_3) = \alpha . f(u_1, u_2) + f(u_1, u_3)$

Exemplo 1: todo $\langle\, , \rangle : E\times E \to \mathbb{R}$ produto interno é bilinear

- $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = x_1 . y_1 + \dots + x_n . y_n$

  ↳ produto interno em $\mathbb{R}^n$

- $\langle \{a_j\}_j, \{b_j\}_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j . b_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2, \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 < \infty$

  ↳ produto interno em $\ell^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 2: $E = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $A \in E$ fixada. Então $f_A : E\times E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_A(X,Y) = tr(X^t A Y)$$ é bilinear.

Nomenclatura: $B(E;E)$ = conjunto dos funcionais bilineares definidos em E.

Claramente em $B(E;E)$ podemos definir duas operações naturais:

$+ \; B(E;E) \times B(E;E) \longrightarrow B(E;E)$

$$(f,g) \longmapsto (f+g)(u,v) \doteq f(u,v) + g(u,v)$$

$\bullet \; \mathbb{R} \times B(E;E) \longrightarrow B(E;E)$

$$(\lambda, f) \longmapsto (\lambda f)(u,v) \doteq \lambda . f(u,v)$$

EXERCÍCIO: verifique que $(f+g), (\lambda f) \in B(E;E)$.

PERGUNTA: qual a dimensão de $B(E;E)$?

Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E e seja $f \in B(E;E)$. Então para

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad e \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \quad \text{temos}$$

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \, f\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, f(v_i, v_j), \qquad f(v_i, v_j) \doteq a_{ij}.$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) . \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \cdots & & a_{ij} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

A: matriz de f relativamente a base β de E denotada por $A = [f]_\beta$

Conclusão: essa construção demonstra que

$$B(E;E) \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

↳ isomorfismo (bijeção linear)

$\vdash \mathcal{F}(f) = [f]_\beta$

→ soma de funções bilineares

- $\mathcal{F}$ é linear pois $\mathcal{F}(f_1 + \lambda f_2) = [f_1 + \lambda f_2]_\beta$
  $= [f_1] + \lambda [f_2]_\beta$
  ↳ soma de matrizes

- $\mathcal{F}$ é bijetora (pela construção)

Conclusão: $\dim B(E;E) = n^2$.

Pergunta 2: Como encontrar uma base para $B(E;E)$?

Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para E e $\beta^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ uma base para $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Então defina $f_{ij} : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{ij}(u,w) \doteq v_i^*(u) \cdot v_j^*(w) \text{ para } i,j = 1, \dots, n$$

Note que existem "n^2" funções dessa natureza

Exercício: Sejam $f, g \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$. Prove que $h \in B(E;E)$ no qual $h(u,v) = f(u) \cdot g(v)$.

Pelo exercício anterior $f_{ij} \in B(E;E)$, além do mais

$$f_{ij}(v_i, v_j) = v_i^*(v_i) \cdot v_j^*(v_j) = 1.$$

Afirmação: $\{f_{ij}\}$, $i,j=1,..,n$ formam um conj. L.I.

De fato, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} f_{ij} = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} f_{ij}(u,v) = 0, \quad \forall\, u,v \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, v_i^*(u) \cdot v_j^*(v) = 0, \quad \forall\, u,v \in E$$

Escolho $u = u_K$ p/ algum $K=1,..,n$ $\Rightarrow$ $v_i^*(u_K) = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$

Então

$$\sum_{j=1}^{n} b_{Kj} \cdot v_j^*(v) = 0, \quad \forall\, v \in E.$$

Escolho $v = v_\ell$ p/ algum $\ell=1,..,n$ $\Rightarrow$ $v_j^*(v_\ell) = \begin{cases} 1, & j=\ell, \\ 0, & j \neq \ell. \end{cases}$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} b_{Kj} \cdot v_j^*(v_\ell) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$b_{K\ell} = 0$. Como $K,\ell = 1,..,n$ é livre temos $b_{ij} = 0$ $\forall\, i,j=1,..,n$.

Conclusão: $\{f_{ij}\}_{ij}$ é uma base p/ $B(E;E)$.

Exemplo: Considere $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1.y_2 + x_2y_3$$

$\beta = \{ \underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2} \}$ temos

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1,x_2).\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [f]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- f_{ij} ?

$$f_{ij}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = f_{ij}(x_1.e_1 + x_2e_2, y_1.e_1 + y_2.e_2)$$

$$= y_1.f_{ij}(x_1.e_1 + x_2.e_2, e_1) + y_2.f_{ij}(x_1e_1 + x_2e_2, e_2)$$

$$= y_1.x_1.\underbrace{f_{ij}(e_1,e_1)}_{e_i^*(e_1).e_j^*(e_1)} + y_1.x_2\underbrace{f_{ij}(e_2,e_1)}_{e_i^*(e_2).e_j^*(e_1)}$$

$$+ y_2.x_1\underbrace{f_{ij}(e_1,e_2)}_{e_i^*(e_1).e_j^*(e_2)} + y_2.x_2\underbrace{f_{ij}(e_2,e_2)}_{e_i^*(e_2).e_j^*(e_2)}$$

Assim

$$f_{11}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = y_1.x_1$$
$$f_{12}(\quad , \quad) = y_2.x_1$$
$$f_{21}(\quad , \quad) = y_1.x_2$$
$$f_{22}(\quad , \quad) = y_2.x_2.$$

Observação: considere $\gamma = \{u_1, .., u_n\}$ uma nova base de E. Seja P a matriz mudança da base de β para γ.

Teorema: $[f]_\beta = P^t [f]_\gamma . P$

dem.: $\beta = \{v_1, .., v_n\}$
$\gamma = \{u_1, .., u_n\}$

$$\begin{cases} x = x_1 v_1 + \dots + x_n . v_n \\ \;\; = \tilde{x}_1 u_1 + \dots + \tilde{x}_n u_n \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = y_1 . v_1 + \dots + y_n v_n \\ \;\; = \tilde{y}_1 u_1 + \dots + \tilde{y}_n v_n . \end{cases}$$

Sabemos que $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^t = P . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Analog. $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)^t = P . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Então

$$f(x,y) = (\tilde{x}_1, .., \tilde{x}_n) . [f]_\gamma . \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$$

$$= \left[P . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t [f]_\gamma \; P . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, .., x_n) \, P^t [f]_\gamma \, P . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por outro lado $f(x,y) = (x_1, \dots, x_n) [f]_\beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\therefore \ P^t [f]_\gamma P = [f]_\beta$

Def.: $f \in B(E;E)$ é não degenerada quando admite uma representação matricial inversível, caso contrário dizemos que f é degenerada.

Pelo teorema anterior se existe uma representação inversível referente a uma base então a representação é inversível em relação a qualquer outra base

$$\underbrace{P^t}_{P^t = P^{-1} \text{ inversível}} \underbrace{[f]_\gamma}_{\text{inversível}} \underbrace{P}_{\text{inversível}} = [f]_\beta \longrightarrow \text{inversível.}$$

Def.: Dizemos que $f \in B(E;E)$ é simétrica quando $f(u,v) = f(v,u)$, $\forall u, v \in E$. Denotamos por $B_s(E;E)$ o conjunto das formas bilineares simétricas.

Claramente $B_s(E;E)$ é um subespaço de $B(E;E)$.

Pergunta: qual a dim $B_s(E;E)$?

Seja β uma base de E e $A = [f]_\beta$. Então

$$\begin{cases} f(u,v) = u^t A v \\ f(v,u) = v^t A u \end{cases} \overset{f \text{ simétrica}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{u^t A v}_{\text{nº real}} = \underbrace{v^t A u}_{\text{nº real}} = \underbrace{(u^t A^t v)^t}_{\text{nº real}}$$

Logo $f(u,v) = f(u,v)^t = (u^t A v)^t = v^t A^t u$

$$\overset{\shortparallel}{f(v,u)} = v^t A u \quad , \forall\, u,v \in E$$

$\Longleftrightarrow A = A^t.$

Assim $B_s(E;E) \cong \{M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$

$\Rightarrow \dim B_s(E;E) = \dfrac{n.(n+1)}{2}$

Def.: Dada $f \in B_s(E;E)$ considere $q_f : E \to \mathbb{R}$ dada por

$q_f(v) = f(v,v)$, chamada forma quadrática associada a f.

Observe que

$$q_f(u+v) = f(u+v, u+v) = f(u,u) + 2f(u,v) + f(v,v)$$
$$= q_f(u) + 2f(u,v) + q_f(v)$$

$$\Rightarrow \quad f(u,v) = \frac{1}{2}\left[q_f(u+v) - q_f(u) - q_f(v) \right]$$

$\forall\, u,v \in E.$

Def.: Uma função $q : E \to \mathbb{R}$ é chamada uma forma quadrática se existe $f \in B(E;E)$ tal que

$$q(v) = f(v,v)$$

Vimos que se $f \in B_s(E;E)$ então q_f define uma forma quadrática. Agora, a recíproca é verdadeira? Isto é toda forma quadrática provem de uma $f \in B_s(E;E)$?

Por definição $q(v) = f(v,v)$ p/ alguma $f \in B(E;E)$

Defina
$$\tilde{f}(u,v) := \frac{1}{2}\left[f(u,v) + f(v,u) \right]$$
$\Rightarrow \tilde{f} \in B_s(E;E)$ e além do mais $f(v,v) = \tilde{f}(v,v)$

$\therefore q(v) = \tilde{f}(v,v)$ p/ $\tilde{f} \in B_s(E;E)$.

Teorema: Sejam $(E, \langle\,\rangle)$ esp. vetorial sobre $\mathbb{R}$, $\dim E = n < \infty$, $f \in B(E;E)$. Então $\exists!\, T \in \mathcal{L}(E;E)$ tal que
$$f(u,v) = \langle u, Tv \rangle, \quad \forall u,v \in E.$$

Exemplo: ($\mathbb{R}^2$, $\langle , \rangle$ prod. int. usual) e $f \in B(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ dada por
$$f(\underbrace{(x_1,x_2)}_{u}, \underbrace{(y_1,y_2)}_{v}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$$
$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Quem é T? $\beta = \{\underset{e_1}{(1,0)}, \underset{e_2}{(0,1)}\}$ então

$$\begin{cases} f(u,e_1) = \langle u, Te_1 \rangle \\ f(u,e_2) = \langle u, Te_2 \rangle \end{cases}$$ e sabemos

$$Te_1 = \langle e_1, Te_1 \rangle . e_1 + \langle e_2, Te_1 \rangle . e_2$$
$$Te_2 = \langle e_1, Te_2 \rangle . e_1 + \langle e_2, Te_2 \rangle . e_2$$

$$Te_1 = f(e_1,e_1).e_1 + f(e_2,e_1).e_2$$
$$Te_2 = f(e_1,e_2).e_1 + f(e_2,e_2).e_2$$

$$\therefore\ T(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

dem. do teorema: Seja $v_0 \in E$ e defina $h: E \to \mathbb{R}$ dada por $h(u) = f(u, v_0)$.

$+$ h é linear pois $f(\cdot, v_0)$ é linear

$\therefore\ h \in E^* \underset{\text{teorema}}{\Rightarrow} \exists\ Tv_0 \in E$ tal que $h(u) = \langle u, Tv_0 \rangle$

Logo
$$f(u, v_0) = \langle u, Tv_0 \rangle.$$
Como $v_0 \in E$ é arbitrário então exibimos $T: E \to E$ tal que
$$f(u,v) = \langle u, Tv \rangle.$$

Precisamos verificar que T é linear e única!

- Linearidade: $T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $f(u, v_1 + \lambda v_2) = \langle u, T(v_1 + \lambda v_2) \rangle$
$$\| $$
$$f(u,v_1) + \lambda f(u,v_2) = \langle u, T(v_1) \rangle + \\ + \lambda \langle u, T(v_2) \rangle$$

Assim $\langle u, T(v_1+\lambda v_2)\rangle = \langle u, T(v_1)+\lambda T(v_2)\rangle$
$\forall u \in E$

$$\Rightarrow T(v_1+\lambda v_2) = T(v_1)+\lambda T(v_2)$$

- T É ÚNICA

Suponhamos que existam $T_1, T_2 : E \to E$ lineares tais que

$$f(u,v) = \langle u, T_1 v\rangle = \langle u, T_2 v\rangle \quad , \forall u, v \in E$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle u, T_1 v\rangle = \langle u, T_2 v\rangle \quad , \forall u, v \in E$$

$$\Leftrightarrow \quad T_1 v = T_2 v \quad , \forall v \in E \quad \therefore T_1 = T_2$$

$\blacksquare$

spiral