FUNCIONAIS LINEARES

$(E, +, \cdot)$ espaço vetorial

Def.: $\mathcal{L}(E; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(E) = \{ T : E \to \mathbb{R} \text{ linear} \}$

Exemplo 1: $E = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ contínua} \}$. Então

$$T(f) \doteq \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{é uma transf. linear.}$$

obs.: os elementos de $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ são chamados "funcionais lineares".

obs. 2: $T \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ e $\dim E = n$ então pelo Teorema do Núcleo e Imagem temos

$$\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T).$$

Como $Im(T) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \dim Im(T) = 0 \\ \dim Im(T) = 1 \end{cases}$

- $Im(T) = 0 \Rightarrow T(v) = 0,\ \forall v \in E \therefore T$ é o operador nulo
- $Im(T) = 1 \Rightarrow T$ é sobrejetivo

Logo $\dim N(T) = n - 1 \therefore$ se $n > 1 \Rightarrow T \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ nunca é injetivo!

Exemplo 2: $T \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ e $\dim E = 1$ então para $T \neq 0$ temos T é bijetivo.

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ isto é $E = \mathbb{R}$ então

$T(x) = T(1.x) = x \cdot T(1)$ $\therefore$ uma função da forma

$T(x) = x.a.$

Exemplo 3: $E = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $tr: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad p/ \quad A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

$$tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}.$$

Pergunta: Qual a dimensão de $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$? Daqui em diante vamos fixar $\dim E = n < \infty$ (note que no Exemplo 1 $\dim E = \infty$).

Seja $\beta \in \{v_1, .., v_n\}$ uma base para E. Então se $v \in E$ temos

$$v = \lambda_1 . v_1 + .. + \lambda_n v_n.$$

Considere agora $T \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$, assim sabemos que

$$(*) \begin{cases} T(v) = T(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \\ \quad = \lambda_1 . T(v_1) + ... + \lambda_n . T(v_n) \\ \quad = \lambda_1 . a_1 + ... + \lambda_n . a_n \end{cases}$$; a_i's estão fixados.

Defina $T_i \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ para $i = 1, ..., n$ dadas por

$$T_i(v_j) = \begin{cases} 1 & , v_j = v_i \ (i = j) \\ 0 & , v_j \neq v_i \ (i \neq j) \end{cases}.$$

/ /

Claramente T_i está bem def. (ou seja é linear) e além do mais

$$T_i(v) = T_i(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$
$$= \lambda_1 T_i(v_1) + \dots + \lambda_n . T_i(v_n)$$
$$= \lambda_i . T_i(v_i)$$
$$= \lambda_i.$$

Substituindo na identidade ★ temos

$$T(v) = \lambda_1 . a_1 + \dots + \lambda_n . a_n$$
$$= T_1(v) . a_1 + \dots + T_i(v) . a_i + \dots + T_n(v) . a_n$$

Conclusão: o conjunto $\{T_1, \dots, T_n\}$ são geradores de $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$. Além do mais esse conjunto é L.I. De fato

$$\beta_1 . T_1 + \dots + \beta_n . T_n = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\beta_1 . T_1 v + \dots + \beta_n . T_n v = 0 \quad , \forall v \in E$$

Em particular para $v = v_i$ (i-ésimo elemento da base β) temos

$$\beta_1 . \underbrace{T_1 v_i}_{=0} + \dots + \beta_i \underbrace{T_i v_i}_{=1} + \dots + \beta_n . \underbrace{T_n v_i}_{=0} = 0.$$
$$\Updownarrow$$
$$\beta_i = 0 \quad , i = 1, \dots, n.$$

$\Rightarrow \{T_1, \dots, T_n\}$ é uma base para $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$.

/ /

Resumo:

- $\beta = \{v_1, .., v_n\}$ base para E

$$\Downarrow$$

- $\beta^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ base para $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$, no qual

$\underset{\in \mathcal{L}(E;\mathbb{R})}{v_i^* = T_i}$ tal que $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Notação: $E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = \mathcal{L}(E)$, β^* é chamada base dual de E^*

Teorema: $\dim E^* = n$

Exemplo: $E = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{v_1, v_2\}$, no qual $\begin{cases} v_1 = (1,0) \\ v_2 = (1,1) \end{cases}$.

Encontre v_1^* e v_2^*.

Note que $(x,y) = \lambda_1 . (1,0) + \lambda_2 . (1,1)$

$$\Updownarrow \text{ Exercício}$$

$(x,y) = (x-y).(1,0) + y(1,1) = (x-y).v_1 + y.v_2$

Assim
$$\begin{aligned} v_1^*(x,y) &= v_1^*((x-y).v_1 + y.v_2) \\ &= (x-y).\,v_1^*(v_1) + y.\,v_1^*(v_2) \\ &= (x-y).1 + y.0 \\ &= (x-y) \end{aligned}$$

Analog.
$$\begin{aligned} v_2^*(x,y) &= v_2^*((x-y).v_1 + y.v_2) \\ &= (x-y).v_2^*(v_1) + y.v_2^*(v_2) = y. \end{aligned}$$

Seja $\beta = \{v_1, .., v_n\}$ uma base de E e $\beta^* = \{v_1^*, .., v_n^*\}$ a base dual em E^*. Podemos definir $L : E \to E^*$ um operador linear dado por

$$L(v_i) = v_i^*, \quad i = 1, .., n.$$

Como L leva base em base e $\dim E = \dim E^*$ claramente L é uma bijeção linear (isomorfismo).

Problema: para calcular v^* usamos fortemente a dependência da base $\beta = \{v_1, .., v_n\}$ fixada. Entretanto, se E é munido de produto interno então o cálculo de v^* é simples.

Teorema. Seja $(E, \langle\,\rangle)$ esp. com produto interno e $\dim E = n$ finita. A correspondência $\xi : E \to E^*$ dada por $\xi(v) = v^*$ no qual $v^*(w) = \langle w, v\rangle$ $\forall w \in E$, é um isomorfismo.

dem.: Considere ξ definido como no teorema. Vamos provar que ξ é linear e bijetiva.

- $\xi(v_1 + \lambda v_2) = (v_1 + \lambda v_2)^*$, $\forall v_1, v_2 \in E$,
  $\xi(v_1) + \lambda\,\xi(v_2) = v_1^* + \lambda v_2^*$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

Devemos provar que $(v_1 + \lambda v_2)^* = v_1^* + \lambda v_2^*$ (igualdade de funcionais)

Assim,

$$\begin{aligned}
(v_1 + \lambda v_2)^*(w) &= \langle v_1 + \lambda v_2, w\rangle \\
&= \langle v_1, w\rangle + \lambda \langle v_2, w\rangle \\
&= v_1^*(w) + \lambda\, v_2^*(w) \\
&= (v_1^* + \lambda v_2^*)(w) \quad , \forall w \in E.
\end{aligned}$$

/ /

- $\mathfrak{z}$ É injetiva

$$\mathfrak{z}(v)=0 \Leftrightarrow v^*=0 \Leftrightarrow v^*(w)=0\ ,\forall w\in E$$
$$\Leftrightarrow \langle v,w\rangle=0\ ,\forall w\in E$$
$$\Leftrightarrow v=0.$$

- $\mathfrak{z}$ É sobrejetiva: JÁ SABEMOS pois $\dim E^* = \dim E = n$.

Aplicação: Seja $h\in E^*$. Como E e E^* são isomorfos via a função $\mathfrak{z}$ isto é $\mathfrak{z}(E)=E^*$ temos que $\exists\, v\in E$ tal que $\underset{v^*}{\mathfrak{z}(v)}=h \Rightarrow h(w)=v^*(w)=\langle w,v\rangle$

Conclusão: dado $h\in E^*$ existe $v\in E$ tq. $h(w)=\langle w,v\rangle$.